

仮想待ち時間分布に関する 2, 3 の考察

Considerations on Virtual Waiting Time Distribution

村上 泰司*

Yasuji Murakami

Abstract

The idea of Virtual waiting time distribution is very attractive to investigate characteristics of IP networks and optical packet switches. The virtual waiting time is time that a fictitious customer, which arrived at an arbitrary point of time, has to wait before being served. In this paper, we considered some aspects concerning the virtual waiting time distribution. Firstly, we introduced the level crossing method to obtain the distribution and verified a theorem of the level crossing method. Next, an equation of the distribution in the form of both Laplace and Laplace-Stieltjes transformations was obtained. Lastly, we obtained an equation to estimate the blocking probability of customers using the virtual waiting time distribution in an infinite queuing system. We believed that the equations and considerations, which were presented in this paper, are useful to study characteristics of IP networks and structures of optical packet switches.

1. はじめに

G/G/s/K システムを解析する一般的な待ち行列システム理論において、システム内客数や待ち時間分布を求める解法として、**隠れマルコフ連鎖法** (embedded Markov chain approach) がある。この解法の本質は、本来ある時点 t でのシステム内客数 $N(t)$ と経過サービス時間 $X(t)$ の 2 変数によってあらわされるシステム状態 $\{N(t), X(t)\}$ に対して、時間軸上における特定の選ばれた点群のみを考えて一変数でシステム状態を解析する方法である[1]。解析は、1)システムに新しい客が到着した時点 (到着過程法)、または 2)客がサービスを受けてシステムから退出する時点 (退出過程法)、という 2 つの時点についての解法を与えている。

一方、M/G/1 システムを考えると、到着過程がマルコフ過程であるので、**PASTA** (Poisson arrivals see time average) の関係により、2つの解法は同じ解を与える。その解は、結局任意の時間に対する解でもある。すなわち、時間軸上の選ばれた点の集まりのみを考えて得た解は、結局すべての時間点での解を与えている。

任意の時点における待ち行列分布を求めるため、**仮想待ち時間** (virtual waiting time) の概念が Taka'cs により提案された[2]。仮に任意時間に客が到着したとすると、サービス

*大阪電気通信大学 情報通信工学部 通信工学科

を受けるまでにどの程度待つことが期待されるかという待ち時間より、その平均値を求める方法である。仮想待ち時間における平均とは、ある客が期待する待ち時間の時間平均である。一方、隠れマルコフ連鎖法では、到着時または退出時の待ち行列数から平均的な待ち時間を求めるため、その平均とは客数に対する平均となる。平均を求める場合、個々の客が待つ時間を客数で平均することが本来の定義であるので、この待ち時間を**実待ち時間** (actual waiting time) と呼んでいる。到着過程がマルコフ過程であると、仮想待ち時間から求められる時間平均は、隠れマルコフ連鎖法における 2 方法と同様、PASTA の関係により実待ち時間と同じ結果を得る。

仮想待ち時間分布という概念は、到着がマルコフ過程に限定されその得られる結果が時間平均であるという点から、誤解されやすい側面があり、一般的に利用されている訳ではない。この点を改良するために、本論文では、仮想待ち時間分布の解法、利用法について説明すると同時に考察を与える。2 節では、レベル交差法で用いられる定理を証明する。この定理はレベル交差法の提案者である P. H. Brill の博士論文で証明されているとしているが [3-4]、その入手が困難であるので、改めて証明を与える。3 節では、レベル交差法により、M/G/1 システムでの仮想待ち時間分布関数をラプラス変換として導出する。これは、隠れマルコフ連鎖法により求められるポラツェック・ヒンキン変換公式として知られているものである。4 節では、その有効な利用法である廃棄率（呼損率）評価式を導出する。この廃棄率評価式は、光パケット交換機の理論に利用されている [5-7]。

2. レベル交差法

待ち時間の分布を解析的に求める場合、システムに到着した客の挙動を丹念に追い、その挙動の経過時間から Z 変換やラプラス変換を用いて求めることが一般的であるが [1]、複雑すぎるのが欠点とされている。より直感的な理解で求める方法に、**レベル交差法** (level crossings) [3-4] がある。レベル交差法では、経過時間に対する仮想待ち時間を示した図より、待ち時間分布の微積分方程式を直接導くことができる。

図 1 に、レベル交差法を理解するために示した、経過時間 t に対する仮想待ち時間 $W(t)$ の例を示す。**到着順処理規律** (FCFS : first-come first-service) に従う GI/G/1 システムを想定する。実線で、仮想待ち時間の**標本軌跡** (sample path) を示した。仮想待ち時間は、任意の時間に到着した客がサービスを受けるまでの時間であり、到着後には新たな客は到着しないという仮定であるので、その値は処理規律に依存する。たとえば、逆順処理 (LCFS) ではより小さな時間となる。しかし、システムから見ると、これは任意の時間における待ち行列がその時点からすべてなくなるまでの時間であるので、この意味で**残余仕事量** (workloads) とも呼ばれる。残余仕事量で定義すると、その値は処理規律に依存しない。

図 1 の例では、 $[0, t_1]$ の間システムは空であるので待ち時間はなく、 t_1 で客が到着してこの客のサービス時間分が待ち時間として垂直に立ち上がり、そこから時間の経過とともに待ち時間が減少する様子を示している。 t_2 および t_3 にて新たな客が到着するので、その

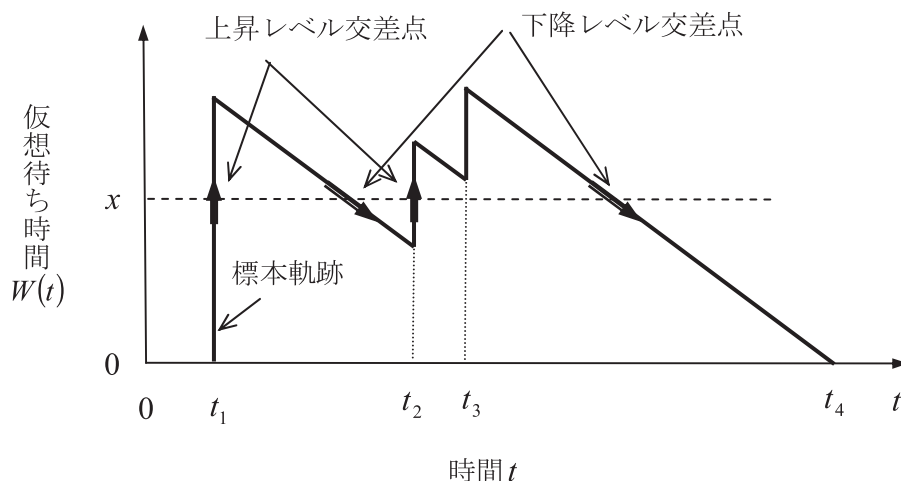


図 1. 経過時間に対する仮想待ち時間

時点で待ち時間は垂直に上昇するが、客が到着しない限り待ち時間は経過時間分減少する。

ここで、 x の待ち時間を考え、図 1 で待ち時間が x となる時刻をみると、客が到着して垂直に上昇する時点と、時間とともに減少して交差する時点となる。前者を上昇レベル交差点 (up-crossing)、後者を下降レベル交差点 (down-crossing) と呼ぶ。システムが安定な定常状態にあるとすると、長い時間では上昇レベル交差点と下降レベル交差点は対を形成しており、その間では待ち時間が x 以上となる。すなわち、待ち時間が x 以上となる時間割合は、2 つの交差点間の時間割合となる。

今、 $W(t) \leq x$ となる確率を $V(t, x)$ とおく。すなわち、

$$P[W(t) \leq x] = V(t, x) \quad (1)$$

である。システムは安定していて $t \rightarrow \infty$ の定常状態が定義できるとすると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[W(t) \leq x] \equiv P(w \leq x) = V(x) \quad (2)$$

とおける。ここで、 w は $w \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} W(t)$ で定義される仮想待ち時間であり、 $V(x)$ は $w \leq x$ と

なる累積分布関数 (CDF: Cumulative Distribution Function) である。また、 $V(x)$ の補完分布関数 (complementary distribution function) を

$$P(w > x) \equiv V^c(x) = 1 - V(x) \quad (3)$$

とおく。

観測時間 $[0, T]$ において、標本軌跡が垂直に上昇してレベル x を交差する点の数を $N_{up}(T)$ 、下降して交差する点の数を $N_{down}(T)$ とおく。上昇レベル交差点と下降レベル交

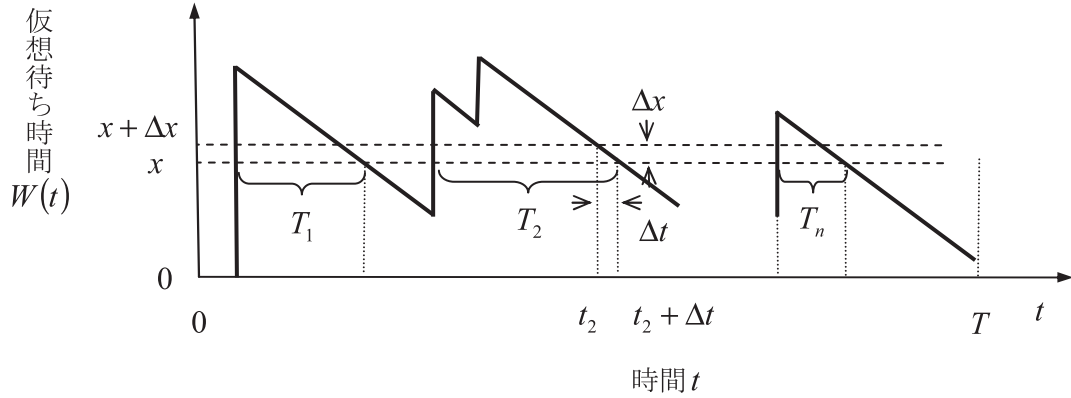


図 2. 仮想待ち時間分布の変化

差点是对を形成していることは先に述べたとおりであるので、 $N_{up}(T)$ は $N_{down}(T)$ と同じか高々1大きい程度である。したがって、 $T \rightarrow \infty$ では $N_{up}(T) \approx N_{down}(T)$ となる。

さて、待ち時間が x 以上となる時間割合は2つの交差点間の時間割合であるので、観測時間 $[0, T]$ において次式を得る。

$$P(w > x) \equiv V^c(x) = \frac{\sum_{k=1}^n T_k}{T} \quad (4)$$

ここで、図 2 に示すように、 T_k は $t = 0$ から k 番目の交差点对間の時間間隔である。さらに図 2 に示すように、補完分布関数を $x + \Delta x$ から x に微小変化させた場合、次式を得る。

$$V^c(x + \Delta x) - V^c(x) = \frac{1}{T} \left\{ \sum_{k=1}^n (T_k + \Delta t) - \sum_{k=1}^n T_k \right\} = \frac{n}{T} \Delta t \quad (5)$$

下降交差点に着目すると、標本軌跡は傾き 1 で減少する直線であることから

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = -1 \quad (6)$$

である。(3) ~ (6) を用いると、結局

$$v(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = \frac{n}{T} = \frac{N_{up}(T)}{T} = \frac{N_{down}(T)}{T} \quad (7)$$

を得る。式 (7) は

- 1) 時間当たりの上昇レベル交差点数と下降レベル交差点数は等しい、
- 2) この時間当たりの交差点数は、仮想待ち時間 x における確率密度関数 $v(x)$ に等しい、

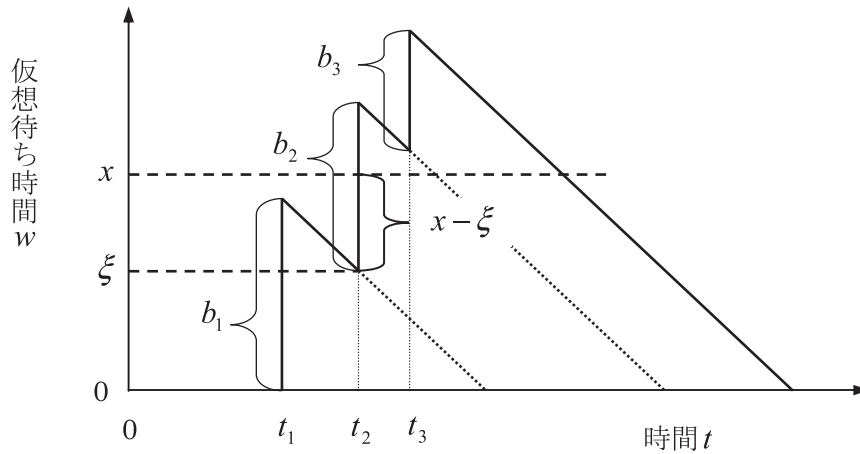


図3 無限長待ち時間モデルでの仮想待ち時間推移

ことを意味する.

3. 仮想待ち時間分布関数の導出

式(7)を用いて仮想待ち時間分布に関する方程式を求める. 客の到着過程を到着率 λ のマルコフ過程とし, 客のサービス時間 x に対する累積分布関数を $B(x)$, その補完関数を $B^c(x) = 1 - B(x)$, および確率密度関数 (pdf: probability density function) を $b(x)$ とおく. さらに, サービス時間の平均を $1/\mu$, すなわち

$$\frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} x b(x) dx \quad (8)$$

とおく. この M/G/1 システムは, 定常状態にて安定しているとし, その負荷

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (9)$$

は $\rho < 1$ の範囲にある.

今, 図3に示すような標本軌跡を考え, 上昇レベル交差点のみで数えることとする. ここで, 時刻 t_i に到着する客のサービス時間を b_i とおく. システムが空である t_1 に到着した客のため, 軌跡はレベル0から垂直に立ち上がる. この上昇がレベル x を交差するためには $b_1 > x$ である必要がある. したがって, 単位時間に λ 人到着する客のうち, 交差する客

数は $\lambda B^c(x)$ である.

一方, t_2 に到着する客のように, レベル x 以下にある ξ の待ち時間に到着する客が軌跡を垂直に立ち上げてレベル x を超えるためには, $b_2 > x - \xi$ である必要がある. したがって, 交差する客数は $\lambda B^c(x - \xi)$ となる. t_3 に到着する客のように, レベル x 以上の待ち時間があるときに到着する客は交差に寄与しない.

レベル 0 となる確率は $1 - \rho$ であり, レベル ξ となる確率密度は $v(\xi)\Delta\xi$ であるので, 加重平均をとることにより, 式 (7) から

$$\begin{aligned} v(x) &= \lambda B^c(x)(1 - \rho) + \lambda \int_{+0}^x B^c(x - \xi)v(\xi)d\xi \\ &= \lambda[1 - B(x)](1 - \rho) + \lambda \int_{+0}^x [1 - B(x - \xi)]v(\xi)d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

を得る. ここで, 右辺第 2 項では, $+0 < \xi \leq x$ の範囲で加重平均した.

仮想待ち時間に関する確率密度関数 $v(x)$ のラプラス-スチエルチェス変換 (Laplace-Stieltjes transform) $v^{*S}(\theta)$ とラプラス変換 (Laplace transform) $v^{*L}(\theta)$ とを区別して

$$v^{*S}(\theta) \equiv \int_{-0}^{\infty} e^{-\theta x} dV(x) = \int_{-0}^{\infty} e^{-\theta x} v(x) dx = V(0) + \int_{+0}^{\infty} e^{-\theta x} v(x) dx \quad (11)$$

$$v^{*L}(\theta) \equiv \int_{+0}^{\infty} e^{-\theta x} v(x) dx \quad (12)$$

とおくと,

$$v^{*S}(\theta) = V(0) + v^{*L}(\theta) \quad (13)$$

を得る. ここで, $V(0)$ はシステムが空であるときの確率であるので, 次式である.

$$V(0) = 1 - \rho \quad (14)$$

式 (10) を微分して定数項を除去すると

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\lambda(1 - \rho)b(x) + \lambda v(x) - \lambda \int_{+0}^{\infty} b(x - \xi)v(\xi)d\xi$$

となり，これをラプラス変換すると

$$\theta v^{*L}(\theta) - v(0) = -\lambda(1-\rho)b^{*L}(\theta) + \lambda v^{*L}(\theta) - \lambda b^{*L}(\theta)v^{*L}(\theta) \quad (15)$$

を得る． $v(0) = \lambda(1-\rho)$ として，式(15)をまとめると

$$v^{*L}(\theta) = \frac{\lambda(1-\rho)[1-b^{*L}(\theta)]}{\theta - \lambda[1-b^{*L}(\theta)]} \quad (16)$$

となる．式(16)はラプラス変換公式であるが，式(13)と(14)を用いてラプラス-スチエルチェス変換 $v^{*S}(\theta)$ で書き直すと，

$$v^{*S}(\theta) = \frac{\lambda(1-\rho)[1-b^{*L}(\theta)]}{\theta - \lambda[1-b^{*L}(\theta)]} + 1 - \rho = \frac{\theta(1-\rho)}{\theta - \lambda[1-b^{*L}(\theta)]} \quad (17)$$

となる．待ち時間分布に関するラプラス変換公式としては，式(17)がポラツェック・ヒンキン変換方程式(the Pollaczek-Khinchin transform equation)として知られているが，一般には隠れマルコフ連鎖法によりラプラス-スチエルチェス変換で求めている[2]．すなわち，M/G/1システムにおいて，仮想待ち行列分布は実待ち行列分布に等しいことを証明したこととなる．

4. 有限長待ち時間モデルにおける廃棄率評価式の導出

レベル交差法の応用に，有限長待ち時間モデルにおける廃棄率評価式の導出がある[5-7]．

今，待ち時間が T 以上となる客は廃棄される，または待ち時間が T 以上となると予想される客は辞退するとする．図4に，この場合の標本軌跡を示す．このモデルでの仮想待ち時間を w_T とする． $w_T < T$ であると，客を受け入れて，仮想待ち時間は垂直に立ち上がるが， $T \leq w_T$ の場合には客は辞退するのでその状態での垂直立ち上がりは生じない．図4では， t_2 から t_3 までの時間が辞退する時間帯の例である．このため，システム内の客数は無限長待ち時間モデルより少ないし，その分仮想待ち時間は小さな値となる．

w_T に関する累積分布関数を $V_T(x)$ ，確率密度関数を $v_T(x)$ と，下付添え字 T をつけてあらわす．すなわち，

$$P(w_T \leq x) = V_T(x), \quad v_T(x) = \frac{dV_T(x)}{dx} \quad (18)$$

とおく．また，廃棄率 P_B を到着する客に対して廃棄される(辞退する)客の割合とする．

このとき，システムを通過する負荷 ρ_T は廃棄率分小さくなるので，

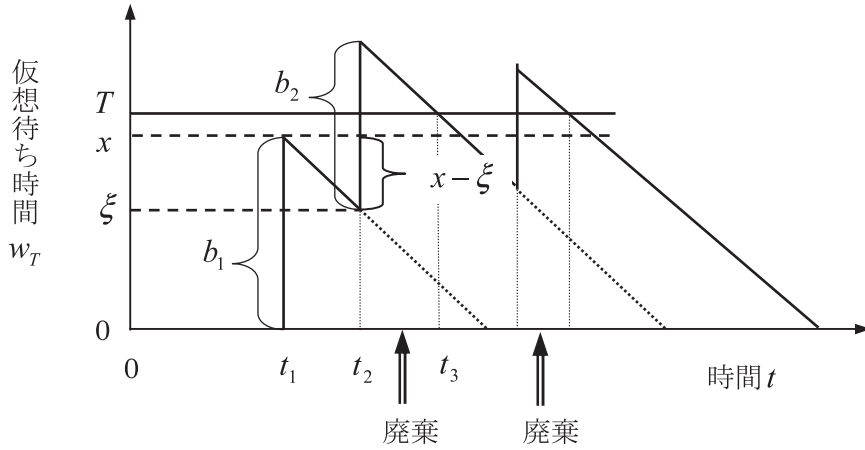


図4 有限長待ち時間モデルでの仮想待ち時間の推移

$$\rho_T = \rho(1 - P_B) \quad (19)$$

である.

図4に示すように, $w_T < T$ であれば客は受け入れられるので, この範囲であれば式(10)と同様

$$v_T(x) = \lambda[1 - B(x)](1 - \rho_T) + \lambda \int_{+0}^x [1 - B(x - \xi)] v_T(\xi) d\xi \quad (20)$$

が成り立つ. 式(10)と式(20)は同じ形の方程式であるため, $v(x)$ と $v_T(x)$ は比例定数のみが異なる同じ解となるはずである. そこで,

$$v_T(x) = \alpha v(x), \quad \alpha > 0 \text{ および } 0 \leq x < T \quad (21)$$

とおく. 式(21)を式(10)に代入すると,

$$\alpha = \frac{1 - \rho_T}{1 - \rho} \quad (22)$$

を得る. 式(21), (22)により仮想待ち時間に関する pdf の関係式を得ることができたが, CDFは

$$V(x) = \int_0^x v(\xi) d\xi = V(0) + \int_{+0}^x v(\xi) d\xi = 1 - \rho + \int_{+0}^x v(\xi) d\xi \quad (23)$$

$$V_T(x) = \int_0^x v_T(\xi) d\xi = V_T(0) + \int_{+0}^x v_T(\xi) d\xi = 1 - \rho_T + \alpha \int_{+0}^x v(\xi) d\xi \quad (24)$$

$$= 1 - \rho_T + \frac{1 - \rho_T}{1 - \rho} [V(x) - (1 - \rho)]$$

より, 式(21)と同じ

$$V_T(x) = \frac{1 - \rho_T}{1 - \rho} V(x) \quad (25)$$

の関係をj得る.

客の到着はマルコフ過程であるので, PASTA の関係により, 客の廃棄率 P_B は客が到着したときの閉塞確率に等しい. 閉塞は $T \leq x$ のとき起きるので

$$P_B = 1 - V_T(T) \quad (26)$$

である. 式 (19), (25), および (26) を用いると,

$$P_B = \frac{(1 - \rho)[1 - V(T)]}{1 - \rho[1 - V(T)]} \quad (27)$$

を得る. 式 (27) は, 無限長待ち時間モデルでの末端分布 (tail distribution) $1 - V(T)$ を用いて求めた, 有限長待ち時間モデルにおける廃棄率 (呼損率) 評価式である.

式(27)は, 任意時間に到着する仮想の客がサービスを受けるまで待つ時間の分布より廃棄率を求めている. これに対して, 隠れマルコフ連鎖法により求めた廃棄率評価式は, システム内客数に対する状態確率から求めている (付録参照). 式(27)は, システム内遅延時間を評価基準にしている IP ネットワークの特性評価やパケット交換機的设计には, 使いやすい公式であると考えられる.

5. おわりに

本論文では, 仮想待ち時間分布の解法, 利用法について考察を与えた. 得られた結果は以下のとおりである.

- 1) レベル交差法で用いる定理式(7)を証明した.
- 2) 仮想待ち時間分布に関するラプラス変換式(16)とラプラス・スチュエルチェス変換式(17)を得た. 後者は, ポラツェック・ヒンキン変換方程式である.
- 3) 無限待ち行列システムにおける仮想待ち時間より, 有限待ち行列システムにおける廃棄率 (呼損率) 評価式(27)を得た.

これら本論文にて得られた関係式は, IP ネットワーク特性の解析や光パケット交換機設計に有効であり, この利用が望まれる.

付録 M/G/1/K、M/M/s/K システムにおける廃棄率評価式

無限待ち行列 M/G/1 システムあるいは M/M/s システムにおける確率変数が得られると、有限待ち行列 M/G/1/K システム、M/M/s/K システムでの廃棄率（呼損率）を得ることができる[8].

今、無限待ち行列システムにおいて、システム内容数が r となる状態確率を P_r^∞ とおく。ここで、上付きの ∞ はシステム内容数が ∞ であることを示す。このとき M/G/1/K システム、M/M/s/K システムの廃棄率 B_K は、次式で求められる。

$$B_K = \frac{(1-\rho) \sum_{j=K}^{\infty} P_j^\infty}{1-\rho \sum_{j=K}^{\infty} P_j^\infty} \quad (\text{付 1})$$

ここで、 ρ は、全負荷 a より次式で定義される 1 サービス機構あたりの負荷である。

$$\rho = \frac{a}{s} \quad (\text{付 2})$$

【証明】 式 (付 1) の証明を、M/M/s/K システムにて以下に示す。
文献[9]の式(5.23)–(5.27)より

$$P_r^K = \left(\frac{a}{s}\right)^{r-s} \frac{a^s}{s!} P_0^K = \rho^r \frac{s^s}{s!} P_0^K \quad (\text{付 3})$$

$$\frac{1}{P_0^K} = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{a^r}{r!} + \frac{1-(a/s)^{K-s+1}}{1-a/s} \frac{a^s}{s!} = \frac{1}{P_0^\infty} - \frac{\rho^{K+1}}{1-\rho} \frac{s^s}{s!} \quad (\text{付 4})$$

$$\frac{1}{P_0^\infty} = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{a^r}{r!} + \frac{1}{1-a/s} \frac{a^s}{s!} \quad (\text{付 5})$$

であるので、

$$\sum_{j=K}^{\infty} P_j^\infty = \frac{s^s}{s!} P_0^\infty \sum_{j=K}^{\infty} \rho^j = \frac{\rho^K}{1-\rho} \frac{s^s}{s!} P_0^\infty \quad (\text{付 6})$$

となる。状態確率 P_r^K の上付きの K はシステム内容数が K であることを示すので有限待ち行列システムでの状態確率であり、 P_r^∞ の無限待ち行列システムとはシステムが異なることに注意する必要がある。

廃棄率は

$$B_K = \frac{\alpha^s}{s!} \rho^{K-s} P_0^K = \rho^K \frac{s^s}{s!} P_0^K \quad (\text{付 7})$$

であるので、式(付 4)(付 6)より、式(付 7)は

$$B_K = \frac{(1-\rho) \sum_{j=K}^{\infty} P_j^{\infty} / P_0^{\infty}}{1/P_0^{\infty} - \rho \sum_{j=K}^{\infty} P_j^{\infty} / P_0^{\infty}} = \frac{(1-\rho) \sum_{j=K}^{\infty} P_j^{\infty}}{1 - \rho \sum_{j=K}^{\infty} P_j^{\infty}}$$

となり、式(付 1)を得る。式(付 1)は、G/G/s/K システムに対しても近似的成立することが明らかにされているきわめて有用な公式である。

参考文献

- [1] たとえば、L. Kleinrock, “Queueing Systems, Vol. 1: Theory”, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [2] L. Taka’cs, “Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes,” Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, Vol. 6, No. 1-2, pp.101-129, 1955.
- [3] P. H. Brill and M. J. M. Posner, “Level Crossings in Point Processes Applied to Queues: Single-Server Case,” Operations Research, Vol. 25, No. 4, pp.662-675, 1977.
- [4] Percy H. Brill, “A Brief Outline of the Level Crossing Method in Stochastic Models,” CORS Bulletin Vol. 34, No. 4, pp. 1-8, 2000.
- [5] Jianming Liu et al., “Blocking and Delay Analysis of Single Wavelength Optical Buffer with General Packet Size Distribution,” IEEE J. Lightwave Technol., Vol. 27, No. 8, pp. 955-966, 2009.
- [6] 村上泰司, “パケット交換機のトラヒック理論 (その 1) — 指数関数分布パケット長に対する近似解法 —”, 大阪電気通信大学研究論集 (自然科学編), 第 46 号, p.9-30 (2011).
- [7] 村上泰司, “パケット交換機のトラヒック理論 (その 2) — 一般分布パケット長に対する近似解法 —”, 大阪電気通信大学研究論集 (自然科学編), 第 47 号, p.11-31 (2012).
- [8] たとえば、H. C. Tijms, “A First Course in Stochastic Models,” John Wiley & Sons Ltd., England, 2003.
- [9] 村上泰司 「わかりやすい情報交換工学」 5.4 節 pp.107-114、森北出版、2009 年

