株価変動モデル

永　島　道　芳*

Stock price variation model

Michiyoshi NAGASHIMA*

【要旨】

初期の金融工学では、株式や債券の価格変動が正規分布に従うことを前提としてきた。それはリスクを過小評価することであった。そのリスクの過小評価が、結果としてＬＴＣＭ（ロングターム・キャピタル・マネジメント）の破綻やリーマンショックを起こしてきた。その反省により発展してきた経済物理学では、市場での価格変動は正規分布ではなく、ベキ分布に従うことを見いだした。すなわち、株価の暴落は正規分布が予想するよりも遥かに高い確率で起こる。株価変動の分布や標準偏差を求めることは市場リスクを把握するために重要であり、従来から分析されてきた。また、そのような分布がどのようにして生じるかを調べることも重要である。本稿では、株価収益率が株価の上昇時と下落時で異なる振る舞いをすることを示し、簡単なモデルが株価変動の分布を定性的に説明できることを示す。

１．はじめに

金融工学の２本柱は、ポートフォリオ理論と、ブラック・ショールズ・モデルに代表される金融派生商品の価格決定理論である。どちらも、株式や債券の価格変動の予測が必要になる。市場での価格変動は予測できないが、初期の理論ではこれらの変動が正規分布に従うことを前提としてきた。しかし、実際の市場では、ブラックマンデー、バブル崩壊、ＬＴＣＭ破綻、リーマンショックなどの株価暴落が起こってきた。正規分布では、何千年に１度、何万年に１度しか起こらないはずの現象が実際に起こってきたのである。

その反省から、経済物理学[1)]が発展してきた。経済物理学では、株価などの変動が正規分布に従うことを仮定せずに、過去のデータを素直に分析し、株価収益率の変化がベキ分布に従うことを見いだした。金融分野では、株式などの変動幅である標準偏差（ボラティリティ）が市場リ

＊　大阪電気通信大学　金融経済学部

スクを表わすと考えていて、株価変動の分布や標準偏差を求めることは重要である。また、そのような分布が投資家のどうような行動で生じるかを調べることも重要である。

次節で株価変動の歴史を振り返り、その変動に関する従来の分析を紹介する。その後、本稿では、株価変動を株価上昇局面と下落局面に分けて分析し、異なる分布に従うことを示す。更に、そのような株価変動を簡単なモデルで定性的に示せることを説明する。

2．株価変動の経過

図1は、1950年初めから2013年９月末までの、ＮＹダウと日経平均の株価推移を示している。金融派生商品の価格決定理論であるブラック・ショールズ・モデルが発表されたのは1973年である。それが金融に本格的な数学を取り入れた最初であり、その後、金融工学が発展してきた。

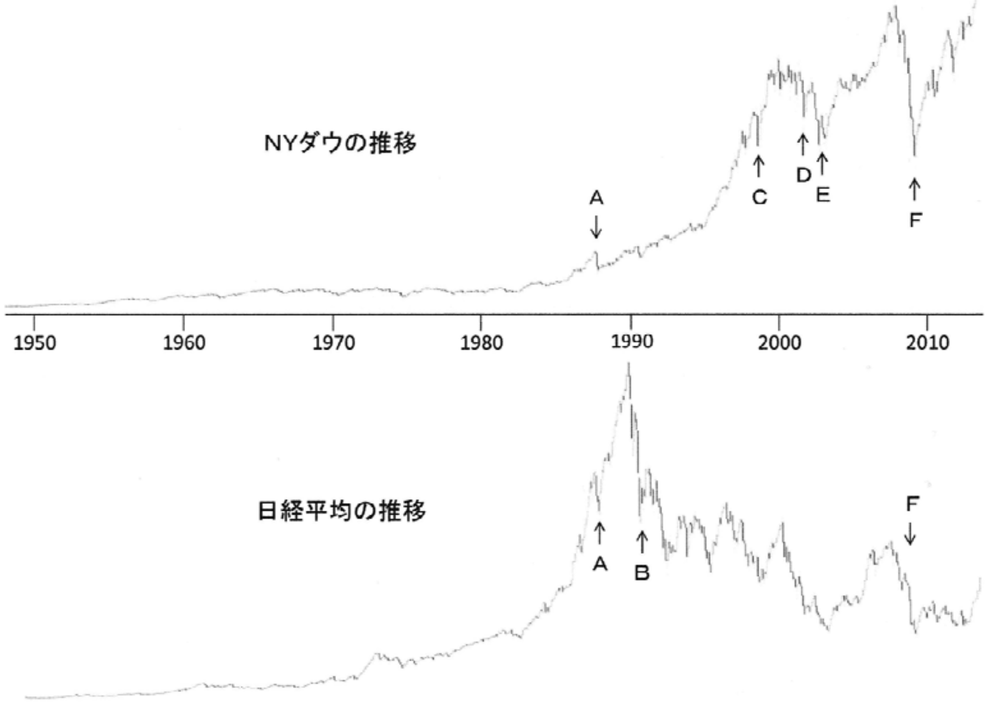


図1　株価変動の推移

A	ブラックマンデー	B	バブル崩壊	C	ＬＴＣＭ破綻
D	同時テロ	E	ＩＴバブル崩壊	F	リーマンショック

1970年代前半のニクソンショックから変動相場制に移る時期に、日経平均は階段状に上昇し、その後の高度経済成長に合わせて大きく上昇し、1980年代後半の異常な上昇（バブル）に続いている。ＮＹダウも、同じ時期に徐々に上昇しているが、1987年にはブラックマンデー（A）の暴落が起こった。日経平均もブラックマンデーの影響を受けているが、バブルの最中であったためか、直ぐに回復している。

1990年になり、日本のバブル崩壊（B）により日経平均は大暴落を起こし、失われた20年が始まった。しかし、米国経済は順調に拡大し、ＮＹダウは大きく上昇している。この上昇に貢献したのが金融工学であり、ブラック・ショールズ・モデルの考案者であるマイロン・ショールズと、

そのモデルの数学的正当性を唱えたロバート・マートンは、1997年にノーベル経済学賞を受賞した。しかし、その２人が役員を務め、株価上昇に寄与してきたＬＴＣＭ（ロングターム・キャピタル・マネジメント）が破綻（Ｃ）したのが、その受賞の翌年の1998年であったのは歴史上の皮肉である。

この時点で、株式や債券の市場での価格変動が正規分布するという、金融工学の前提が誤りであったことは明白であった。すなわち、正規分布では数千年や数万年に１度しか起こらないはずのブラックマンデー（Ａ）やＬＴＣＭ破綻（Ｃ）が10年間隔で起こった。金融工学では市場リスクを標準偏差（ボラティリティ）で表わすが、リスクを過小評価してきたことになる。心ある経済学者はこの反省に基づいて、正規分布を仮定しない経済物理学の研究を始めたが、何故か、ＮＹダウは直ぐに回復している。これは、市場や金融業界は、正規分布の反省を無視してきたのではないかと疑わざるを得ない。

2000年以降には、ＮＹダウは2001年９月11日の同時テロ（Ｄ）やＩＴバブル崩壊（Ｅ）の落ち込みが目立つが、その後は再び上昇している。しかし、リスクを無視した融資（サブプライムローン）で膨らんだ住宅バブルが崩壊し、リーマンショック（Ｆ）を引き起こした。このリーマンショックは、日本の金融業界自体への影響は限定的であったと言われるが、日本経済には大打撃を与え、日経平均にも長期間の低迷をもたらし、2013年のアベノミクスでようやく回復してきたところである。

３．株価変動の従来分析

市場での株価変動は正規分布ではないことを紹介する。1970年１月から2013年９月までの日経平均の月次終値を用い、対数収益率の変化を分析する。次式の ｌｎ は自然対数を表わす。

$$対数収益率 = \ln \frac{当月終値}{前月終値}$$

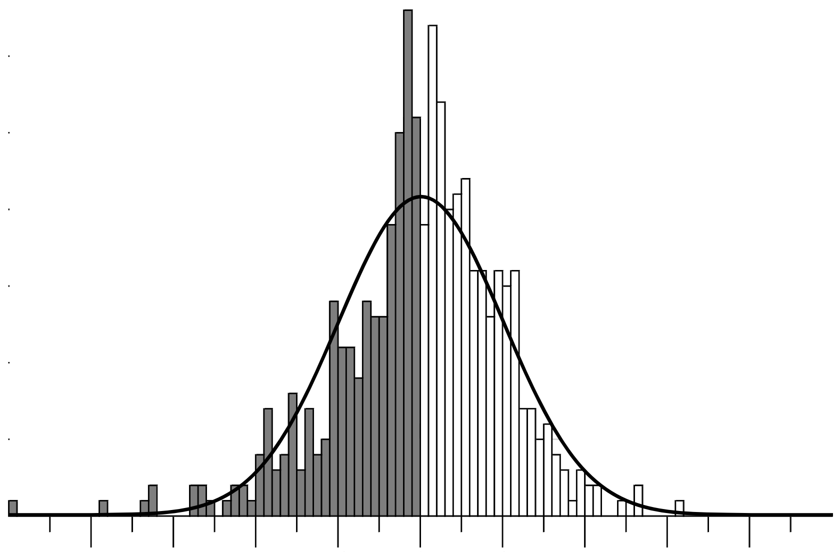


図２　月次株価の対数収益率の度数分布図（1970年１月～2013年９月）

データのサンプル数は526、平均値は＋0.0034、標準偏差は0.056である。これを平均値が０、標準偏差を１とする標準化を施した度数分布図を**図２**に示す。この**図２**の横軸は対数収益率を表わし、単位は標準偏差である。**図２**の正方向（右側）の数字が大きいほど株価の上昇率が高く、負方向（左側）の数字が大きいほど株価下落率が大きい。また、棒グラフの高さは標準化後の各々の対数収益率に対する頻度（確率）を表わしている。実線は、同じく平均値が０、標準偏差が１の標準正規分布を示し、全域の積分値が等しくなるように規格化している。株価下落が大きい領域では正規分布より高い棒グラフの頻度の大きく、正規分布が予測するよりは株価変動の確率が高いように思える。しかし、対数収益率の実際の変化と正規分布との類似性あるいは相違性を判断することは、**図２**の度数分布表では困難である。

そこで、累積分布を考える。**図３**は、横軸が対数収益率を表わし、標準偏差を１とする標準化した値である。また、縦軸は、すべての事象が起こる確率を１として、対応する対数収益率以上の変化が生じる確率を表わしている。横軸も縦軸も対数表示し、標準化する前の対数収益率の標準偏差は0.056であるから、横軸の１は5.6％の株価変化を表している。**図３**より、対数収益率が約11％以上（標準化した単位で２以上）の変動は、正規分布が予測するより頻繁になることが分かる。

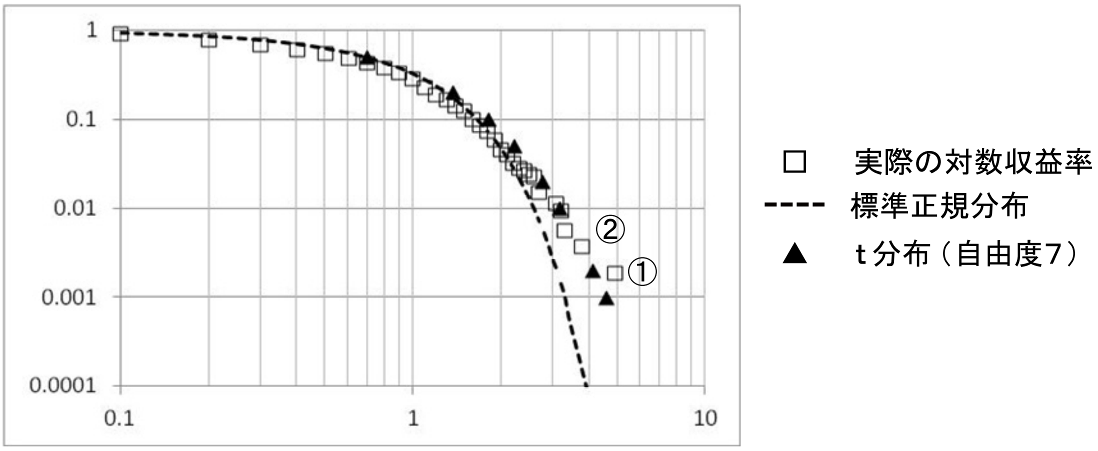


図３　月次株価の対数収益率の累積分布図（1970年１月～2013年９月）

図３において、①を付したデータはリーマンショックを示し、対数収益率が標準偏差の4.9倍（27.4％）下落、累積確率は0.002である。すなわち、正規分布を仮定すれば20万カ月に１度の現象が、実際には500カ月に１度の確率で起こる。また、データ②は1990年のバブル崩壊を示し、対数収益率が標準偏差の3.9倍（21.8％）下落、累積確率は0.004であり、250カ月に１度の確率（正規分布では２万カ月に１度の確率）で起こる。**標準偏差の３倍（16.8％）の下落は８年に１度の確率で起こる**。前回のリーマンショックから数えれば、確率的には２～３年後には大きな株価下落が起こり得る。

このような分析は従来も行われ、実際の変動が、自由度を最適に選べばｔ分布で近似されるという報告もある[2)]。**図３**では自由度７のｔ分布と比較し、正規分布よりは良く近似できることを確認できる。また、経済物理学の研究では、実際の対数収益率がベキ分布（対数表示で直線）に

従うという報告もある[3)]。

実際の株価変動がどの分布で近似できるかは、実際の市場リスク（標準偏差＝ボラティリティ）を予測する上では重要である。また、このような変動がどのような投資家の行動により生じるかを調べることも必要である。

４．株価変動の解析

図２より、対数収益率が正の場合より負の場合の方が、正規分布から外れる変動が多いことが分かる。そこで、株価が上昇する場合と下落する場合とに分けて、変動の振る舞いを分析する。**図４**は、**図３**と同様に日経平均の1970年１月から2013年９月までの月次対数収益率の累積分布を示すが、株価が上昇する場合と下落する場合を分けて示している。株価が上昇する場合は正規分布で良く近似できるが、株価下落時は正規分布が予測するより大きく下落する頻度が高いことを明確に表わしている。

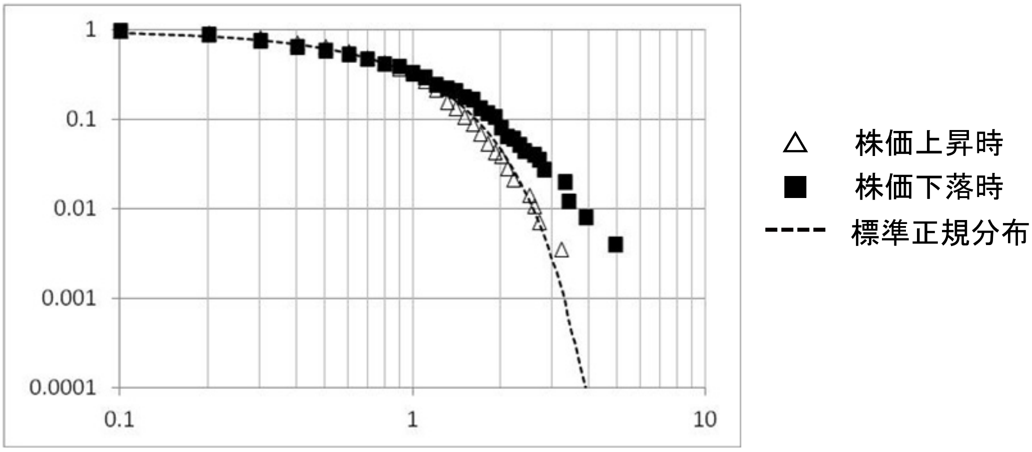


図４　日経平均（月次株価）の対数収益率の累積分布図
（1970年１月～2013年９月）

酔っ払いの歩行のようなランダムウォークや、コイン投げで表が出る回数のような二項分布において、酔っ払いが右に踏み出すか左に踏み出すかの確率が同じであり、また、コインの表が出る確率と裏が出る確率が同じならば、試行回数が非常に多くなったときに正規分布に従うようになる。すなわち、株価が正規分布で良く近似されることは、対数収益率が増加する確率と下落する確率が同じであることを示している。株式の売買は、投資家のさまざまな思惑により行われていると思われるが、株価が上昇する局面では、誰かが買えば誰かが売り、結局は買いと売りが同じ確率になっている。しかし、株価が下落する局面では、対数収益率が増加する確率と下落する確率が異なることを示唆している。

図５は、ＮＹダウの1992年１月から2013年９月までの月次対数収益率の累積分布を示すが、**図４**と同様に株価が上昇する場合と下落する場合を分けて示している。日経平均と同じく、ＮＹダウも株価が上昇する場合は正規分布で良く近似できるが、株価下落時は正規分布が予測するより

大きく下落する頻度が高いことを表わしている。この**図５**のＮＹダウは、サンプル数は262、平均値は＋0.0069、標準偏差は0.042であり、**図２**～**図４**と同様に、平均値が０、標準偏差を１となるように標準化している。

図４と**図５**に示すように、月次株価は上昇時は正規分布に従うが、日次株価も同様であろうか。毎日の変化と、その積み重ねの月次株価は同じ振る舞いをするのであろうか。それを調べるために、次に日経平均の日次株価を分析する。

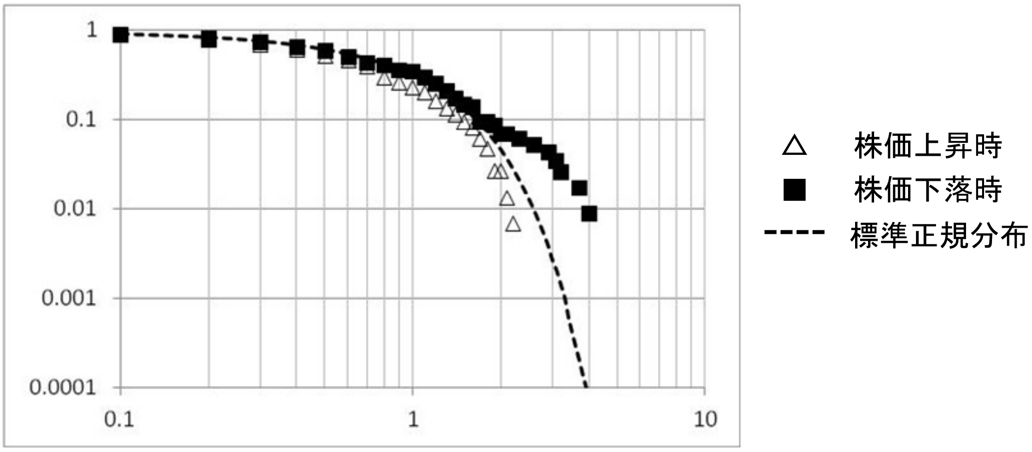


図５　ＮＹダウ（月次株価）の対数収益率の累積分布図
（1992年１月～2013年９月）

図６は、日経平均の2000年１月４日から2013年９月30日までの日次株価変動について、その対数収益率の累積分布を示したものである。このデータのサンプル数は3378、平均値は－0.000074、標準偏差は0.0158であり、今までと同様に平均値が０、標準偏差を１となるように標準化している。

$$\text{対数収益率} = \ln \frac{\text{当日終値}}{\text{前日終値}}$$

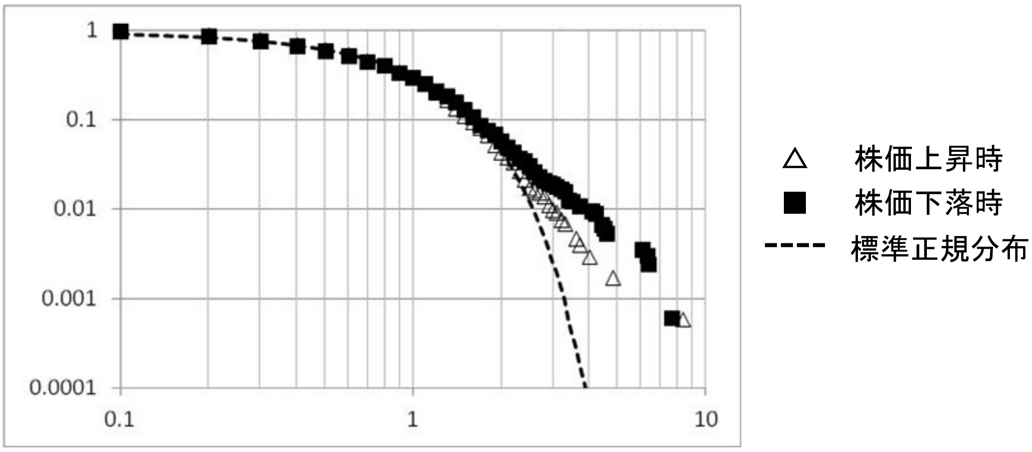


図６　日経平均（日次株価）の対数収益率の累積分布図
（2000年１月４日～2013年９月30日）

図６は、多様な投資家の思惑や偶然の積み重ねの結果であり、常にこのような振る舞いになるとは限らない。その多様な結果を調べるため、2000年から2013年の14年間を２年毎に分けた７通りの株価変動の分布を、**図７－１～図７－７**に示して比較する。これら分割期間の各々も標本数が約500であり統計的に十分なデータである。

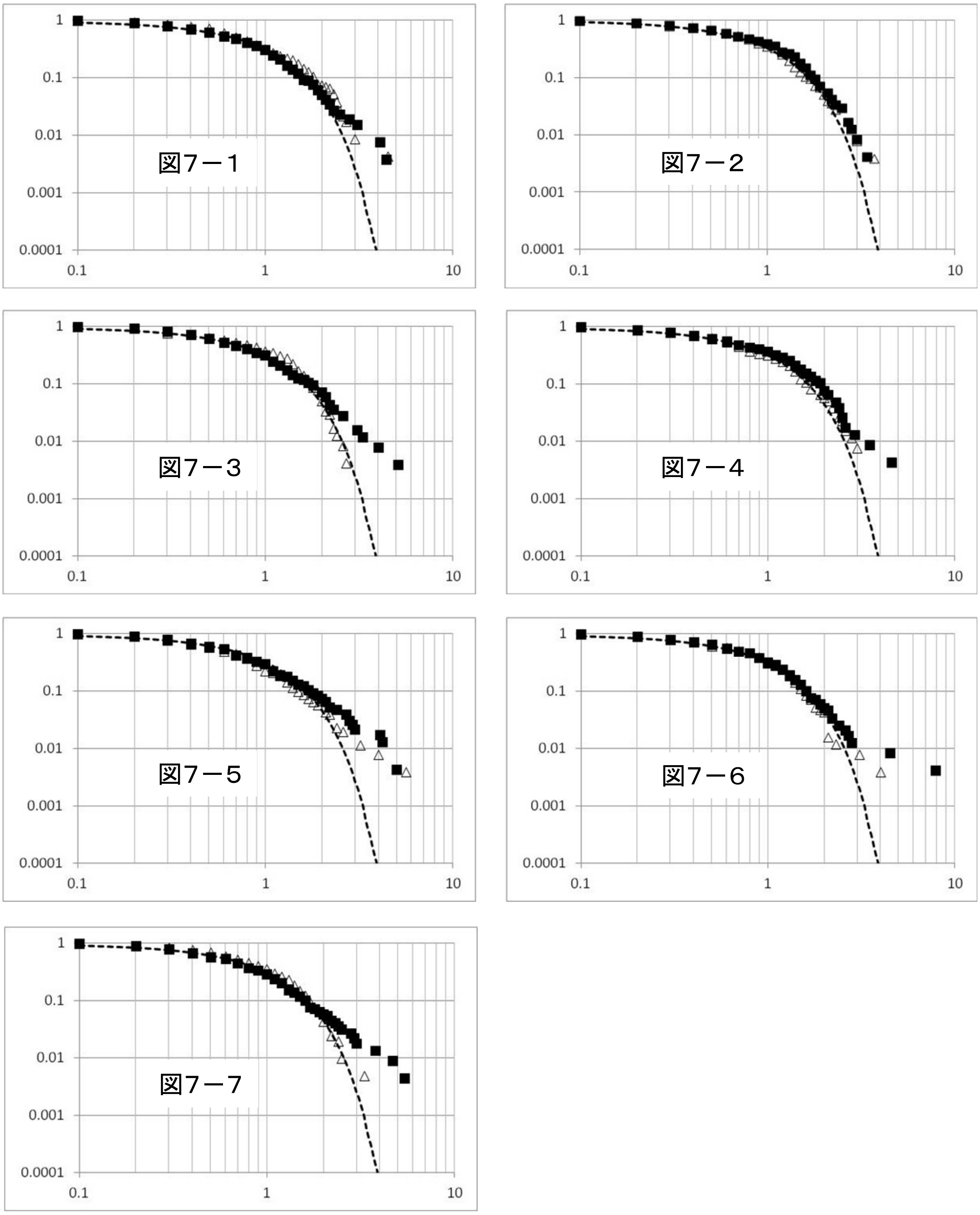


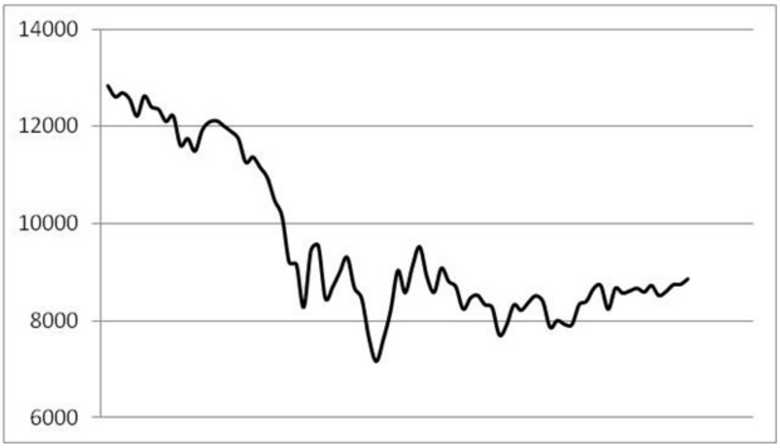
図７　日経平均（日次株価）の対数収益率の累積分布図

図７の各々の期間の平均値と標準偏差を表１に列挙する。

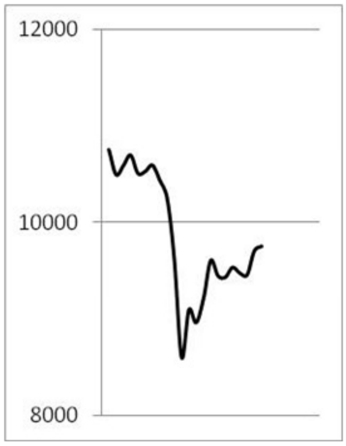
表１　日経平均（日次株価）の平均値と標準偏差

	期間	平均値	標準偏差
図7－1	2001年1月4日　～　2001年12月28日	−0.0011	0.0165
図7－2	2002年1月4日　～　2003年12月28日	0.00	0.0156
図7－3	2004年1月5日　～　2005年12月30日	0.00084	0.0101
図7－4	2006年1月4日　～　2007年12月28日	−0.0001	0.0121
図7－5	2008年1月4日　～　2009年12月30日	−0.00078	0.0242
図7－6	2010年1月4日　～　2011年12月30日	−0.00045	0.0141
図7－7	2012年1月4日　～　2013年9月30日	0.0012	0.0143

図６や図７の日次変動をみても、傾向としては、株価が下落する局面では株価が上昇する局面よりも、正規分布より大きな変動の確率が大きいことが分かる。しかし、図７－５と図７－６のように、月次変動とは異なり、株価が上昇する局面でも正規分布より遙かに大きな変動が起こる場合がある。これらの２つの期間には、リーマンショックと東日本大震災が起こり、株価が暴落し新しい株価に収束する過程で、暴落から反転して暴騰した日が含まれている。図８に、リーマンショック前後（2008年９月１日から12月30日まで）および東日本大震災（2011年３月１日～31日）における日経平均の日次株価変化を示している。１日に1000円程度の株価下落が目立つが、急激な上昇日もある。例えば、2008年10月10日（金）には約900円下落しているが（対数収益率は－0.101)、翌週の14日（火）には約1200円も戻している（対数収益率は＋0.132)。



（2008年９月１日～12月30日）



（2011年３月１日～31日）

図８　日経平均　日次株価変化

図４～図７より分かることを以下の⑴～⑶に要約する。

⑴　小さい株価変化の領域では正規分布に従っている。例えば、標準偏差を１とする標準化した変数における２以内の領域である。株式の売買は投資家の思惑により行われるが、結果として正規分布に従うということは、それらの思惑に関わらず、小さい上昇確率も小さい下落確率も

同じになっている。

(2) 標準偏差を1とする標準化した変数における2以上では、徐々に正規分布より外れる。しかし、株価が下落する局面の方が、株価が上昇する局面よりも、正規分布から大きく外れる傾向にある。

(3) 株価が暴落する際には、大きく暴騰する日も共存している。これは、日次変化の特徴で、月次変化にはこのような傾向は見られない。暴落の反動としての暴騰は、新しい株価への収束過程の緩和振動のように生じる。

5．株価変動モデル

図4～図7のような株価変動分布が、どのようにして起こるかを考えなければならない。本稿では、日次対数収益率が以下のような数式のモデルに従うと考える。このモデルの詳細を前述の要約(1)～(3)に対応して説明する。

$$\text{当日対数収益率} = (-1)^{N\beta} \left\{ \frac{\alpha}{2} (\text{前日対数収益率} + \text{前々日対数収益率}) + \varepsilon \right\}$$

ε　　正規分布の乱数

$$\alpha \begin{cases} = 0 & -\sigma 1 \leqq \text{前日対数収益率} \leqq \sigma 2 \\ = 1 & \text{前日対数収益率} < -\sigma 1 \quad \text{または} \quad \text{前日対数収益率} > \sigma 2 \end{cases}$$

N　　整数Aと整数Bの間の整数乱数

$$\beta \begin{cases} = 0 & |\text{前日対数収益率}| \leqq \Pi \\ = 1 & |\text{前日対数収益率}| > \Pi \end{cases}$$

(1) 小さい株価変化の領域では正規分布に従っている。前日の対数収益率が、標準偏差を1とする標準化した変数において第1下落パラメータ；$-\sigma 1$以上　かつ第1上昇パラメータ；$+\sigma 2$以下では、当日の株価対数収益率は正規分布する乱数；εで表わされる。

(2) 前日の対数収益率が、第1下落パラメータ；$-\sigma 1$以下あるいは第1上昇パラメータ；$+\sigma 2$以上では、当日の対数収益率は比較的大きな変化が持続すると予測し、前日の対数収益率と前々日の対数収益率の平均に正規分布する乱数；εが加わったものとする。

(3) 株価が暴落する際には、新しい対数収益率に収束するまでの間に、大きく暴騰する日も共存している。正規分布では起こるはずのない大きな第2パラメータ以上の対数収益率の上昇あるいは下落の際は、市場の過剰な変化と解釈して適切な確率で上昇と下落が反転する。具体的には、整数Aから整数Bの間の整数乱数をNとして$(-1)^{N\beta}$を乗じたものとし、対数収益率の絶対値が第2パラメータ；Π　以上では　$\beta = 1$、以下では$\beta = 0$とする。

日次対数収益率のシミュレーションでは、標準正規分布に従う乱数；ε、および整数Aと整数Bの間の整数乱数；Nを発生させ、確定した対数収益率の大きさを、第1下落パラメータ；$-\sigma 1$、第1上昇パラメータ；$+\sigma 2$、および　第2パラメータ；Πと比較し、前掲の数式に従って新たな対数収益率を確定していく。例えば、整数Aを2、整数Bを4とすれば、Π以上の大きな対数

収益率の上昇と下落が反転する確率は３分の１である。そのようにして求められた対数収益率の確定値に対して、平均値と標準偏差を計算し、以下の式で表わされる、平均値が０、標準偏差が１となる標準化を施す。

$$\text{標準化した対数収益率} = \frac{\text{確定後の対数収益率} - \text{平均値}}{\text{標準偏差}}$$

以上のようなシミュレーションで得られた対数収益率の分布が、実測の対数収益率の分布と比較される。**図９**は、対数収益率の日次変化のシミュレーション結果である。**図９**のシミュレーションに用いたパラメータは　σ１＝２、　σ２＝３、　Π＝５　A＝２、　B＝４　である。 乱数の発生は、シミュレーション毎に変わり、従ってシミュレーション結果も変化し、**図９**はその結果の２つの例である。

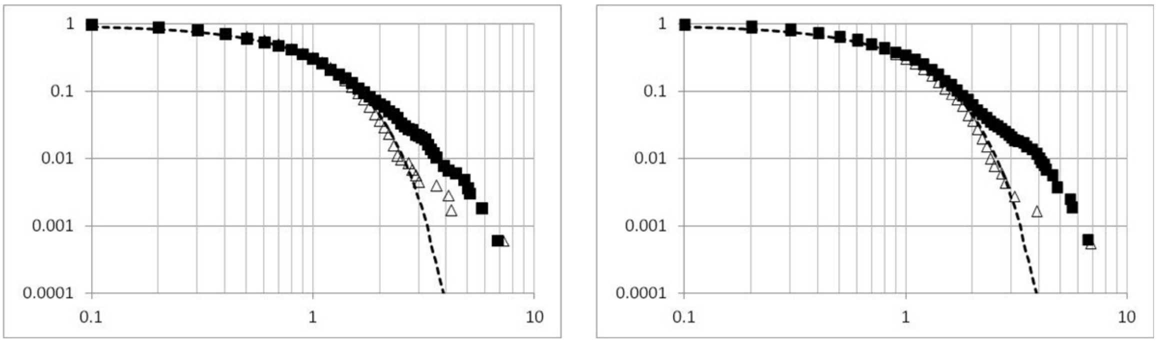
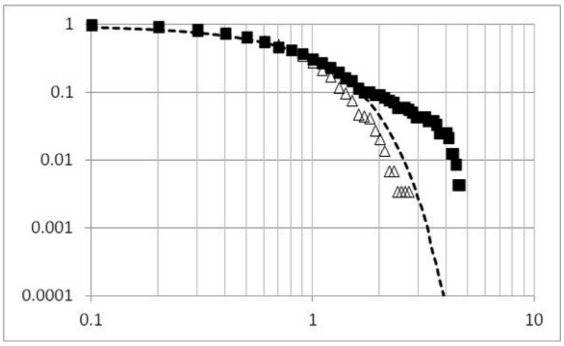


図９　対数収益率（日次変化）のシミュレーション結果
（ σ１＝２、　σ２＝３、　Π＝５　A＝２、B＝４ ）

月次対数収益率は、前掲の数式において「日」を「月」に変更するが、常に β＝０としたモデルとする。すなわち、株価暴落する際に反動する暴騰を含まない。**図10**は対数収益率の月次変化シミュレーション結果の２つの例である。このシミュレーションのパラメータは　σ１＝２、　σ２＝３　β＝０　である。

図９、**図10**示されるように、前掲の数式で表わされる簡単なモデルが、実際の株価の対数収益率分布を定性的に説明できる。株価の対数収益率の変化が小さい領域では、投資家の思惑に関わらず、上昇確率と下落確率が等しい正規分布に従う。しかし、標準偏差の －σ１ 倍 あるいは ＋σ２ 倍の変化が生じた際は、過去の結果に影響されて変化する。本稿では過去の２日（あるいは２カ月）の平均値に影響されるとした。この傾向は株価の下落時の方が上昇時より顕著に表れ、σ２ を σ１ よりも大きくすることにより実現される。



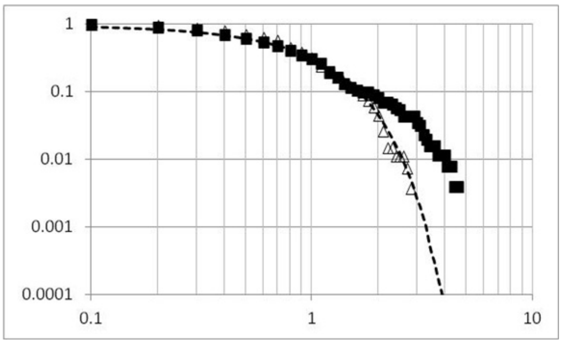


図10　対数収益率（月次変化）のシミュレーション結果
（ $\sigma 1=2$、　$\sigma 2=3$、　$\beta=0$ ）

正規分布に従うだけなら、標準偏差の２倍の変化は4.6%の確率で起こり、標準偏差の３倍の変化は0.26%の確率で起こるが、標準偏差の４倍の変化は0.006%の確率でしか生じない。これは、17000日に１度の確率に相当する。しかし、標準偏差の２倍や３倍の変化は正規分布でも十分に起こり、その変化が起こった際には過去の変化に影響されて変化の度合いが増幅し、正規分布からのズレを引き起こす。これは、投資家が、通常よりも比較的大きな変動に対し極端に反応することを表わし、下落時の方が上昇時よりも顕著である。

また、日次変化では、標準偏差のⅡ倍以上の変化が生じた際は、ある程度の確率で上昇と下落が反転する。これは、大きな株価の変化が新しい値に収束していく段階で起こり得る現象である。

６．考察

株価の大きな下落が正規分布から予測するよりは高い確率で起こることは、実際の株価変動から明確であり、簡単なシミュレーションでも定性的に説明できる。金融工学が始まった頃のように株価の変動が正規分布に従うと信じていた時期は、リスクの過小評価も許容できるかも知れない。しかし、ＬＴＣＭが破綻した1998年以降は、リスクへの考え方を根本から変えたはずであるが、金融業界の対応は今でも十分とは言えないように思える。

投資信託などの金融商品は、株式以外にも分散投資しているが、リーマンショックなどの暴落が起これば殆どの金融商品に影響が波及して顧客の元本は減少する。確かに、元本を保証しないと唄っているが、正規分布を信じていた初期には許容できても、高い確率で暴落が起こると予測できる現在でも、そのようなビジネスが成立している。更に投資時期が長ければ長いほど暴落に遭遇する可能性は高くなる。

自動車業界が「５年程度では火を噴くかも知れないが、それまでは十分利用できる乗用車」を売ることが出来るであろうか？　欠陥が分かればリコールすることは、他の業界では常識である。「投資信託」のような商品は、金融業界にのみ許された「不誠実な商品」であると言わざるを得ない。

投資信託などの金融商品も、大きな株価暴落が生じても顧客の元本を保証する手段を工夫するか、あるいは　タバコの健康障害記載のように、株価暴落が高い確率で起こることを顧客に十分知らせることを義務化すべきである。

参考文献

1　高安　秀樹；「経済物理学の発見」　光文社新書　2004年発行

2　高岡和佳子；「リスク評価における収益率分布の再現はどれほど重要か」
ニッセイ基礎研レポート　2013年３月28日

3　真壁　昭夫；「はじめての金融工学」　講談社現代新書　2005年発行