高校と大学における確率・統計の教育

Probability and Statistics in High-School and

University Level Mathematics

数理科学研究センター　浅倉 史興

Abstract

"Probability" and "Event" are words of daily use. However these words in mathematical theory are different from those of daily use. Though the course of probability and statistics is well arranged in Japanese high-school mathematics, we notice that definition of "event"in the course is not proper. Standard university level mathematics are composed of linear algebra and (differential and integral) calculus, and probability and statistics are usually set up as an independent course. In this short note, we propose a way to treat events properly in high-school mathematics and set up, in university level mathematics, the course in good relation to other mathematical courses.

1　はじめに

確率と統計という言葉は日常的に使われている。

確率 (かくりつ，英: probability) とは，偶然性を持つある現象について，その現象が起こることが期待される度合い，あるいは現れることが期待される割合のことをいう。確率そのものは偶然性を含まないひとつに定まった数値であり，発生の度合いを示す指標として使われる。

確率論 (かくりつろん，英: probability theory, 仏: théorie des probabilités, 独: Wahrscheinlichkeitstheorie) とは，偶然現象に対して数学的な模型 (モデル) を与え，解析する数学の一分野である。

統計 (とうけい，statistic) は，現象を調査することによって数量で把握すること，または，調査によって得られた数量データ (統計量) のことである。

統計学 (とうけいがく，英: statistics，独: Statistik) とは，統計に関する研究を行う学問である。

以上 Wikipedia から引用したが，適切な説明であろう。とくに「確率論」の説明は秀逸である。「統計学」については，このあと，次のように補足されている。

> 統計学は，経験的に得られたバラツキのあるデータから，応用数学の手法を用いて数値上の性質や規則性あるいは不規則性を見いだす。統計的手法は，実験計画，データの要約や解釈を行う上での根拠を提供する学問であり，幅広い分野で応用されている。

2017 年 9 月 4 日受理

統計学は数学の 1 分野であるかどうかという議論は，あまり重要ではないと思われるが，工業統計学，医療統計学，経済統計学というような分野があるので，数学とは分けて考える方が良いだろう。ただし，上記説明のように，データを解析する手法は数学そのものであり,「数理統計学」は数学の 1 分野である。

統計には，記述統計と推測統計の 2 つ[1]がある。詳しく言えば

記述統計 全数調査 (国勢調査，全国模試の点数など) の分析に用いられ，収集したデータの平均や分散，標準偏差などを計算し，分布を明らかにすることで，データの傾向や性質を把握する。

推測統計 標本調査 (視聴率調査，選挙の出口調査を用いた速報など) で収集できた，全体（母集団）の一部分のデータ (標本データ) の分析により，元の母集団の性質や傾向を推測する。

近年の IT 技術により，従来は扱うことのできなかった大容量のデータを扱えるようになり，一人ひとりのデータが大量に蓄積されるようになった (ビッグデータ)。したがって，母集団全体に近い集団についての統計調査を行い，記述統計により母集団の特性や傾向を把握することが可能となった。ある意味では，偶然性を持つある現象そのものを分析することが可能になっている。しかし，一方では，医学・薬学・農学のように限られた数のデータから母集団の特性を推測する必要性は依然として存在する。また，膨大なデータからは，より単純な法則が導き出せるだろう。

現代を生きぬくために，問題発見能力，問題解決能力を身につけることが求められているが，それらの基本手段として，確率・統計の重要性は増している。とくに，大量のデータを処理し，それにより意思決定を行うことは広く行われようとしている。西内啓 [7] がビジネス書大賞 2014 で経済書部門での大賞を受賞するような時代である。いわば，確率・統計は現代人の基本素養といえよう。ヨーロッパの大学制度における「自由 7 学科 (リベラル・アーツ)」の 4 科は，算術，幾何学，天文学，音楽であったが，現代ならば数学と統計学は必ず含まれるであろう。また，文部科学省による直近の報告書「大学における工科系教育の在り方について（中間まとめ）」[13] においても，統計学は重要な位置にある。

大阪電気通信大学では，線形代数と微分積分に接続する数学教育として，確率・統計を位置付けてきた。共通教育を担当する部署に 40 年近く専任が所属していたが，2012 年度で途切れてしまった。憂うべきことで残念である。

この小論では，数学教育としての確率・統計について議論する。次節と 3 節で，高校および大学教育における確率・統計科目を概観し，4 節で数学教育としての確率・統計について述べる。以上のことを 5 節でまとめる。

2　高校教育の現状

確率・統計の重要性は高校数学で十分に認識されていて，高校数学課程に上手に組み入れられている。記述統計に関しては，数学 I において「データの分析」という項目があり，推測統計については,「確率分布と統計的な推測」がある。高校数学において，確率・統計に関わるのは，以下の 3 つの項目である。

数学 I： データの分析

[1]他にベイズ統計があるが，ここでは議論をしない。

数学 A： 場合の数と確率

数学 B： 確率分布と統計的な推測

データの分析　平均値，中央値，最頻値，データの分布，ヒストグラムと箱ひげ図，分散，標準偏差，散布図，共分散，相関係数などが扱われている。また，表計算アプリケーションを用いた計算方法も教えられている。十分な内容で，大学 1，2 年次で付け加えるとすれば，最小 2 乗法と回帰分析であろう。

場合の数と確率　この項目の内容は：集合の要素の個数，場合の数，和法則・積法則，順列，組み合わせなどの後，確率として

> 事象，事象の確率，確率の基本性質，独立な試行，反復試行，条件付き確率

などがある。ここで，確率の基本性質としては，共通事象，和事象，余事象，排反が含まれ，反復試行には，実質的に 2 項分布が導入される。また，条件付き確率の例題には，ベイズの定理に関係するものも含まれている。

確率分布と統計的な推測　この項は，内容が豊富である。

> 確率変数と確率分布，確率変数の期待値・分散・標準偏差，確率変数の変換，確率変数の和と期待値，独立な確率変数と分散，2 項分布，正規分布，母集団と標本，標本平均とその分布，推定

おそらく，検定を加えれば，多くの大学の 1，2 年次で教えられている確率・統計に遜色ないといえるだろう。

大阪電通大学生の履修状況　2017 年度「確率・統計」の最初の授業において，上記 3 科目の履修状況についてアンケート調査を行い，上記 3 科目について選択肢：

A. 履修した　B. 履修していない (わからない，わすれた)

で回答してもらった。「履修した」と自信を持って言える学生が A を選択したことになる。

確率・統計科目の履修数 (履修率)

学科名	電気電子工学科	通信工学科	全体
回答数 (回答率)	75 (78.1%)	91 (91.0%)	166 (84.7%)
データの分析	37 (49.3%)	66 (72.5%)	103 (62.0%)
場合の数と確率	40 (53.3%)	70 (76.9%)	110 (66.3%)
確率分布と統計的な推測	16 (21.3%)	25 (27.3%)	41 (24.7%)

ここで，回答率は (回答数)/(受講登録者数) の意味である。数学 I は必修科目であるので，履修した学生が全体の 62%という結果は事実を表しているとは考えにくく，したがって他の数値も同様である。これらの結果は，アンケートの設問に対する反応と見るべきである。

数学 A と数学 B における選択の問題　数学 A については，他に「整数の性質」と「図形の性質」の項目がある。従来からの継続性と大学入試の出題範囲を考えると,「場合の数と確率」は必ず選択されると考えてよい。したがって，この項目は広く履修されていると考えて良いだろう。

数学 B の選択については，かなり状況が異なる。この科目は：

(1) 数列，(2) ベクトル，(3) 確率分布と統計的な推測

の 3 つから成る。(3) はセンター試験には出題されるが，ほとんどの大学の本入試には出題されない。筆者が調べた限りでは，2017 年度入試で出題された可能性があるのは (センター試験の数学 B 以外で) 慶応大学：総合政策学部，環境情報学部のみである。因みに，東京大学 2 次試験では出題されていない。数学 B はすべての項目を履修する必要が無いので，その中の 2 つを選択した場合　(1) と (2) が選択され，(3) は選択されない。

寺尾仁志 [9] によると，大学センター試験 (2015 年度) の数学 B の選択において，94.9%が「数列」＋「ベクトル」であったと報告されている。また，インターネット上では，受験対策として：「確率分布と統計的な推測」は点が取りやすい科目なので，ここで点を確保して，あと「数列」または「ベクトル」の得意な方を選択すればよいというの情報が流れているので，高校で「確率分布と統計的な推測」履修してなくても，センター試験で選択する可能性もあると考えられる。

したがって，上記アンケートの結果で，24.7%が「確率分布と統計的な推測」履修しているという結果は予想外であった。これが，事実を表しているとしたら，高等学校の先生方が確率・統計の重要性をしっかりと理解し，熱心な指導を行っているということである。

高校数学における科目間接続　「データの分析」において表計算アプリケーションを用いた計算方法が教えらているように，実際問題として，コンピュータを用いずに記述統計を行うことは考えにい。しかし，コンピュータを用いれば，統計量は自動的に計算されてしまうので，コンピュータの活用は「数学 I」のような科目よりも,「数学活用」の良い題材と考える。とくに，実際のデータを自分自身で集め，その集めたデータを表計算アプリケーションを用いて分析する学習は非常に有意義である。また，近年導入が進められている「アクティヴ・ラーニング」の良い題材と考えれられる。

「確率分布と統計的な推測」において正規分布が扱われるが，密度関数 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ の扱いは数学 III の範囲である。とくに，オイラーの e は数学 III で初めて現れる。実際の教科書 高橋陽一郎 [8] では,「ここで，e は無理数で $e = 2.71828\cdots$ である。」とあるが苦しいところである。やはり，正規分布は数学 III の事項である (その代わり，昔のように複素数平面を数学 B に持ってくるのは方法であろう)。大学においても，経済・経営系の学生が正規分布関数を理解するのは苦しい部分があるが，経済・経営系の学生にとって，オイラーの e は連続複利計算において本質的なので，確率・統計のなかで (または履修する前に) e について時間をかけることが必要である。

3　大学教育の現状

現状では，文系の学部でも理系の学部でも，1，2 年次に確率・統計または統計学の科目が開設され，3 年次以上に，その学部により数理統計，経済統計，医療統計のような科目が開設されるのが普通である。ここでは，1，2 年次の科目について考察したい。

線形代数・微分積分に比べて，確率・統計の内容は担当者ごとで違っている場合が多いと思われる。大阪電通大では，以下の内容でシラバスが作成されている。

記述統計 データの整理，平均，分散，共分散，回帰直線

確率 標本空間と事象，確率モデル，和事象，排反事象，積事象，独立な事象，ベイズの定理，独立な試行，条件付き確率，確率変数と確率分布，期待値と分散，独立な確率変数，組み合わせと 2 項分布，連続な確率分布，正規分布，正規分布に関する計算，2 項分布の正規近似

推測統計 母集団と標本，標本平均，標本分散，母比率と母平均の区間推定，母比率と母平均の検定

時間の関係で,「検定」は推定の別解釈のように扱うことが多い。一見で，高校数学の「データの分析」,「場合の数と確率」,「確率分布と統計的な推測」の内容と大差がないことが分かる。前節で述べたように，高校数学 B で「確率分布と統計的な推測」の項は十分に履修されておらず，大学 1，2 年次において同様な内容を学ぶことは有意義と考えたからである。高校数学と大学数学の接続と大学数学の他科目との接続については，次節で考察する。

教科書については：経済・経営系であれば，宮川公男 [6] が標準的な良書である。理系の場合は，標準的な教科書を挙げるのは難しいが，吉田伸生 [10]，E. クライツィグ [4] は良書であろう。筆者は丸山儀四郎 [5] が好みだが，古い本で今では入手不可能である。 [10] は良書であるが内容のレベルが高く，教科書として採用できる大学は限られるので，各大学の担当者が，それぞれの大学に適した教科書を探すか，自身で書いてしまう。筆者も，浅倉史興-竹居正登 [1] を書いてしまった。

序において，確率・統計は現代人の基本素養としたが，一方では統計を疑ってみることも重要である。D. ハフ [2] は確率・統計の教科書と同時に広く読まれるべき書である。

4　数学教育の中の確率・統計

最初に述べたように，ある現象が起こることが期待される度合い，あるいは現れることが期待される割合を確率という。したがって，数式，図形，関数といった数学の題材とは異なり，数学として「確率」自身を直接に扱うことはできない。「確率」を数学としてどのように扱うかという問題は，1933 年にコルモゴロフ [3] によって初めて解決された。このように，数学として扱えるのは「確率論」の方である。高校数学では，確率の計算は場合の数の計算となることが多いので，高校生にとっては，確率は場合の数の計算の一部であるような印象ができる。どうして確率の計算が場合の数の計算になるのかという部分は，おさえておく必要があろう。

確率の定義　高等学校学習指導要領解説 [11] の第 2 章 各科目 第 4 節 数学 A の 3 内容と内容の取扱い **イ** 確率 (ア) 確率とそのの基本的な法則 においては

> 「試行や事象の考えを明確にして，確率の基本的な法則をまとめ，余事象などについて理解させる」

とある。ここで，数学的対象でない「試行」と数学的対象になり得る「事象」を同列に扱うことは無理がある。おそらく,「試行」を数学として明確にするのは，かなり困難であろう ([3] に

その試みがある)。このように，最初から数学として扱える「確率論」から離脱してしまっている。教科書 [8] では[2]

> 「さいころを投げる場合のように，同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を**試行**といい，試行の結果起こる事柄を**事象**という」

と述べられている。再論になるが：

1. この「試行」は数学的に定義されたものではない
2. 数学的に定義されていない「試行」をもとに定義された「事象」は数学的対象ではない

以下 [8] では

根元事象 それ以上分けることができない事象

試行の全事象 1 つの試行において，根元事象全体からなる事象

と続き,「事象の確率」に関しては

> 「1 つの試行において，全事象の含まれる根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は，**同様に確からしい**という」

ことで「同様に確からしい」を定義し (事象と同じく，定義になっていない)，確率を

> 「これらの根元事象はすべて同様に確からしい試行において，全事象 U に含まれる根元事象の個数を $n(U)$, 事象 A に含まれる根元事象の個数を $n(A)$ とするとき，$\frac{n(A)}{n(U)}$ を事象 A の**確率**といい，$P(A)$ で表す」

としている，すなわち

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ が起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

事象 A の確率である。ここまで来れば確率は場合の数の比ということで，確率の計算は場合の数の計算に帰着され，計算することが可能となる。

大学 1，2 年次用のテキスト [1] においては確率を「確率論」して捉え，数式，図形，関数といった他の題材と同等に捉えられるようにすることを試みた[3]。また，数学として定義できない「試行」という語を，なるべく排除することにしたが，これは実験・観察という語と同様に積極的に用いた方が良かったかもしれない。[1] では，偶然に左右されて起こる事柄を記述するには，いくつかの基本的な事柄：**基本事象** (根元事象) を指定することが最初であることを述べている。さらに，それらは起こる事柄のすべてを表し，また 1 つひとつを区別できる必要があるとしている。すなわち，根元事象と全事象を最初に定めるのである。事象は根元事象の集まり，すなわち全事象 (標本空間) の部分集合と定義する。各根元事象 ω_j には，正数 p_j が与えられ，根元事象の総数を n とすると $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ が成立していると考える。事象 A の確率は，次のように定義する。

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} p_j : \quad A \text{ に含まれる根元事象についての和}$$

[2] 他の教科書でも同様である。

[3] [10] でも同様な扱いである。[5] では，歴史的は記述においては，偶然性のもとに生まれる個々の結果を事象としているが，本論では事象は命題であるとしている。

高校教科書に出てくる「同様に確からしい」ということは，$p_j = \frac{1}{n}$ と定めることとする。要は，「さいころを投げて 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$」ということを最初に約束して出発するということである。

このように，最初に 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ と定めると，さいころ投げの試行を同じ条件の下で何回も続けたとき，1 が出た回数 r を投げた回数 n で割った値 $\frac{r}{n}$ が，回数 n を大きくすると 1/6 に近づく」ことが，数学の「定理」として証明されるのは注目すべきである。また，さいころ投げの試行について i の目が出る確率を p_i とするとき

$$p_1 = 0.3, \quad p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.15, \quad p_6 = 0.1$$

と定義すると，歪んださいころを投げる試行を議論することがでる。このとき，[1] 問 3.6 のように，正しいサイコロと歪んだサイコロの 2 つを投げるとき，丁半の確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ となるというような面白い結果も導びかれる。

因みに，日本工業規格では確率（かくりつ:probability）は,「ある試行を同じ条件の下で長く続けたとき，一定の結果が生起する相対頻度の極限値。より一般的にはランダムな事象に割り当てられている [0, 1] の範囲の実数値と定義される。一般に事象 A の確率を Pr (A) で表す。」と定義している。いままでの議論のとおり，最初の部分は定義ではなく，結果としての定理と見るべきであり[4]，次の部分は「ランダム」という語が数学的に定義されない限り同義語反復である。よって，確率の説明ではあるが定義ではない。

指導要領 [11] では

> 「指導に当たっては，確率の知識を既成概念として与えるのではなく，具体例を通して，集合の考えを適切に活用し，ある事象が起こる蓋然性・確からしさを数量的にとらえるにはどのように考察し処理したらよいかを考えることに重点を置く。例えば, ある事象の観察や実験の回数を増やすことによってその事象の起こる確率を調べたり，同様に確からしい事象の起こり得る場合の数の割合から事象の起こる確率を調べたりする」

この場合「確率の知識を既成概念として与えるのではなく」という部分はいろいろな理解の仕方がありうるが，筆者は「さいころを投げて 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ と考えましょう」として議論を始めることが，数学としての理解を早める結果となると考える。

確率変数の和　指導要領 [11] には，高校数学 B 確率分布と統計的な推測の項目において，確率変数の和を扱うことは言及されていない。高等学校指導要領解説 理数編 [12] の科目「理数数学特論」において

> 数学 B の「確率分布と統計的な推測」を参照して扱う。確率分布について発展，拡充させる内容としては，二つの確率変数の独立，確率変数の和，確率変数の和の期待値，互いに独立であるときの分散の性質，チェビシェフの不等式及び大数の法則等を扱うことが考えられる

とある。これが念頭にあるのか，高校数学 B の教科書では，確率変数の和の期待値と (独立な場合は) 分散について説明されている。

確率変数の和を考えるときは，和が考えられる大きな標本空間を先にとっておくか，同時分布を考えるかが必要となり，私見では高校数学のレベルを越えている感がある。教科書 [8] で

[4] これを定義とする流儀もあるが（フォン・ミーゼズの公理系)，複雑なことになるようである。

は，根元事象が 2 つの場合について，期待値に関しては例示，分散については証明を行い，一般的に

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y],$$

X と Y が独立ならば

$$V[X+Y]=V[X]+V[Y]$$

が成立することを述べている。これはこれで良いのであるが，筆者は，生徒が $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$, $V[X+Y]=V[X]+V[Y]$ を当たりまえのこととして鵜呑みにすることを恐れる。とくに，後者は三平方の定理のような特別の場合であることを生徒に伝える必要がある。昨今の大学生を見ていると，$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$ や $\log(x+y)=\log x+\log y$ という計算を無意識にしてしまう傾向がある。これらが成立しないことは，少し注意すれば分かるのだが，一般的に $f(x+y)$ と与えられると，$f(x)+f(y)$ として修正が効かないことが多い。このような誤解を防ぐためにも，和の公式を安易に教えるべきではないと思う。

統計的な推測において

定理 同じ確率分布をもつ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の期待値を m, 分散を σ^2 とすると，標本平均 $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$ の期待値は m, 分散は $\frac{\sigma^2}{n}$ である。

が必要となるので，上記の和の公式も必要となる。統計的な推測では，この後，大数の法則と中心極限定理が順を追って必要となるので，高校生には荷が重い。ただし，母集団，標本，標本平均の話題は，統計に確率が有用な好例であるので，確率変数の和，和の期待値と分散の話は一挙に飛ばして，標本が確率変数であることを示した後

定理 母平均が m, 母分散が σ^2 の母集団から抽出された大きさ n の標本平均 $\overline{X}$ について，n が大きいならば $U=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ の確率分布は，ほぼ標準確率分布とみなすことができる。

が成り立つことを認めて，母平均の推定を行えば良いのではないか。

高校数学と大学数学の接続　数学 I「データの分析」は必修科目であると同時に記述統計の基本なので，しっかりと履修できるようにすべきであるが，2 節のアンケートでは，習熟度が足りないという結果である。実際のデータを自分自身で集めたり，表計算アプリケーションを用いて解析をおこなうことにより，習熟度を高めることができると考えられる。ここで，表計算アプリケーションを用いて「数学 I」の授業をおこなうことは避けるべきであるが，科目「数学活用」においては，コンピュータを用いたデータ分析と統計を批判的に見ること ([2] のような内容）は絶好な教材と思われる。

数学 A「場合の数と確率」は確率の基本事項なので，理系・文系の生徒両方がしっかりと履修できる体制を組むべきである。現在の指導要領に条件つき確率が入ったことは，たいへん好ましいことであるが，事象の独立性が研究・発展に回っているのはなぜだろうか。数学 B「確率分布と統計的な推測」では，確率変数の独立は出てくるので，高校生は事象の独立性を知らずに，確率変数の独立性を習うことになる。

数学 B「確率分布と統計的な推測」は重要な内容を含み大変に意欲的な項目であるが，現実がアンケートのとおりならば，25%程度という現状をどう考えるかが問題である。また，2 次関数と 3 次関数の微分積分までの高校生が，正規分布とそれを用いる統計的推定を学習するのは無理があるだろう。この小稿では問題を指摘するにとどめる。

以上を受けて，大学教育としてどのように接続すれば良いかを述べる。文系・理系両方とも，大学 2 年次に確率・統計の科目を設置すべきである。数学 I「データの分析」と数学 A「場合の数と確率」を予備知識として仮定しても良いのだが，両方とも高校 1 年次の科目なので，復習は必須であろう。また，確率の定義，条件つき確率および事象の独立性はしっかりと扱うべきである。数学 B「確率分布と統計的な推測」の履修者が最大限 5%前後という現状からすると，この科目で扱う内容としては,「確率分布と統計的な推測」の内容を基本とするのがよい。大学の科目であるので，確率変数の和，同時分布をしっかりと扱い，確率変数の和の期待値と分散についてきちんと説明することは可能であろう。また，検定は扱いたい。可能ならば，確率・統計 I，II というように 2 コマ開講し，II ではポアッソン分布，t-分布を解説し，t-分布の推定・検定ができれば良い。あるいは，II で最小 2 乗法，多重回帰分析，主成分分析のような多変量解析を解説するのも有意義であろう。

大学数学科目間の接続　大阪電気通信大学では,「線形代数 1，2」,「基礎微積分演習 1，2」に続く科目として位置づけてきた。筆者は 4 年間担当してきたが，例年 3 つの学科で受講登録者が合計で 250 名程度となっている。一応，こちらの科目設置の意図は伝わっていると思われる。

理系大学においては，とくに微積分科目との接続に注目したい。近年のパーソナル・コンピュータとそのアプリケーションの進歩により，統計解析はすべてコンピュータ・アプリケーションに任せれば良いような風潮があるが，そもそもコンピュータはなにを計算しているのか理解する必要があろう。また，データが多くなればなるほど分布が良く見えてくるはずで，なにがしかの連続分布で近似できる場合があるだろう。そのときは，微分積分は強力な道具となる。昨今，工学系で微積分不用論を聞くが，性急な意見と考える。

理系・文系を問わずに，正規分布はたいへん重要である。正規分布をきちんと理解しただけでも，確率・統計の理解度が進んだと考えてよい。正規分布には，オイラーの $e = 2.718\,281\,828\cdots$ と，それを用いた関数 $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ が現れる。この関数を扱えるようになることが，大学初年次の微積分の 1 つの目標となり得る。例えば，標準正規分布関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の極大点・変曲点，$x \to \pm\infty$ での挙動を調べてグラフの概形を描くことは，1 変数微分の手頃な問題である。また，ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$$

の計算には，重積分の極座標変換を使うのが簡単であるので，重積分の総仕上げの例題として適切である。さらに，正規分布の平均と分散を計算するには，置換積分・部分積分が必要となる。一般の正規分布関数

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

の理解には，変数変換 $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ についての微積分の計算が必要となる。例えば，なぜ y の分母に σ が現れるのかを理解するには，置換積分を使うのが良い。より進んだレベルになり，2 項分布の正規分布近似を理解しようとすると，スターリングの公式が必要となり，中心極限定理をきちんと理解しようとすれば，分布の弱収束とかフーリエ変換の上級 (?) 数学解析が必要となってくる。現在では古書でしか入手できないが，[5] では微積分との接続が丁寧に記述されている；筆者もたいへんお世話になった。以上のとおり，大学初年次の微分積分と確率・統計は，関係が深い。

また，多変量解析の統計科目を配置できる場合は，線形代数科目との接続が考えられる。とくに，一般 n 次元 (とくに $n \geq 4$ の場合) のベクトルと行列を学ぶ必要性が明確となる。また，

大学 1，2 年次の線形代数の目標は，対称行列の直交行列による対角化であると言ってよい。これは，2 次曲線の主軸を求めるという重要な問題と同値であるが，現状では：高校数学 III で 2 次曲線は学ぶものの，主軸を求めることまでは扱われていない。一方，大学の線形代数の授業では，2 次曲線を扱う時間がないということで，対称行列の対角化の動機付けが困難となっている。よって，主成分分析はよい動機付けになるであろう。

5　結論

確率・統計は現代人の基本素養の 1 つといえる，これまでの議論をまとめると，以下のとおりである。

1. 数学 I「データの分析」は，記述統計の基本として重要な項目である。ただし，コンピュータのアプリケーションを使用するのは,「数学 I」の授業よりも,「数学活用」のような授業のほうが適切である。それと同時に，統計を疑う教育も必要である。

2. 数学 A「場合の数と確率」は，確率と推測統計の基礎となるので，重要な科目である。そこでは,「確率」や「事象」ということばは日常語であるともに，きちんとした数学の用語であることを伝えることが重要である。また，条件付き確率を扱うのは良いことで，できれば事象の独立性を扱ってほしい。

3. 数学 B「確率分布と統計的な推測」はよく工夫された内容であるが，この項目を必修に近いものとするのは，先生と生徒ともに苦しい。数学 B における確率・統計のカリキュラムを，今後どのようにするかは，真剣に考えるべき問題である。

4. 大学においては，高等学校の「データの分析」,「場合の数と確率」(の確率の部分),「確率分布と統計的な推測」をカバーする確率・統計の科目は，大学 1，2 年次の数学科目として必置である。また，それとは別に，コンピュータのアプリケーションを利用した統計関係の科目も必要である。

5. 大学の確率・統計は，線形代数と微分積分に続く数学教育として位置づける。とくに，正規分布を扱えるようにすることは，微分積分の目標の 1 つとして適切であろう。また，線形代数は，多変量解析に接続する科目として位置づけることが可能である。

6　あとがき

今回，確率・統計の高等学校と大学との接続について述べることになったが，改めて筆者が高校生のときの指導要領を振り返ってみると：当時は，確率は数学 III で初めて現れて，現代とは隔世の感がある。数学 III の内容は：

(1) 微分法とその応用：内容は省略

(2) 積分法とその応用：内容は省略。微分方程式を含む

(3) 確率と統計　確率の概念を明らかにするとともに，確率の考えを用いて，統計に対する見方や考え方を深める

ア 確率の意味

イ 確率の計算：加法定理，乗法定理

ウ 分　布

(ア) 平均とちらばり：ちらばりについては，主として標準偏差を扱う

(イ) 二項分布，正規分布

エ 標本調査：乱数表にふれる

用語と記号： 確率，余事象，独立事象，従属事象，排反事象，加法定理（確率に関するもの），乗法定理，変量，標準偏差，期待値，二項分布，正規分布，標本，母集団，標本調査，抜取り検査，品質管理

私の学年では，授業は分布までで，北村辰雄先生[5]が最後に出された宿題は「2 項分布 $B(n,p)$ の平均は np, 分散は $np(1-p)$ であることを示せ」であった。翌日の授業は：2 項分布は $n \to \infty$ のとき，正規分布に近づくという定理で (ラプラス-ド・モアブルの定理), 2 項分布の差分を考えて，極限操作により微分方程式 $y' = -xy$ を導き出すという巧妙な方法で説明された。当時は数学 III で微分方程式を習っていたので，この微分方程式を解き一般解 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ を得ることは易しかったが，定数 C を定めるには上記のガウス積分が必要となる。当然，高校生には計算できないので，北村先生は「この積分が $\sqrt{2\pi}$ になることは大学で習ってください」と言われ，この言葉で高校最後の数学授業は終了した。高校数学と大学数学の接続の良い例である。

7　謝辞

査読者には，拙稿をたいへん丁寧に読んでいただいた上に，数々の不備な点をご指摘いただき，心から感謝いたします。

参考文献

[1] 浅倉史興-竹居正登,「新基礎コース 確率・統計」，学術図書出版，2014

[2] D. ハフ,「統計でウソをつく法–数式を使わない統計学入門」，高木秀玄 (訳)， 講談社 ブルーバックス ，1968

[3] A. コルモゴロフ,「確率論の基礎概念」，根本伸司 (訳) ， 東京図書 ，1975

[4] E. クライツィグ,「確率と統計 (第 8 版)」，田栗正章 (訳) ，培風館 ，2004

[5] 丸山儀四郎,「確率および統計」，共立出版，1958

[6] 宮川公男,「基本統計学 (第 3 版)」，有斐閣，1999

[7] 西内 啓,「統計学が最強の学問である」，ダイヤモンド社，2013

[8] 高橋陽一郎編「詳説 数学 I，数学 A，数学 B」，啓林館，2011

[5]当時，長野県上田高等学校教諭として数学を教えるとともに，シーロフ-グーレヴィチ,「積分 測度 導関数」(東京図書)， 1971 のような数学書を翻訳しておられた。

[9] 寺尾仁志「大学入試 分析と対策 数学 2016」，啓林館，2016

[10] 吉田伸生「確率の基礎から統計へ」，遊星社，2012

[11] 「高等学校学習指導要領解説 数学編」，文部科学省，2009

[12] 「高等学校学習指導要領解説 理数編」，文部科学省，2009

[13] 「大学における工科系教育の在り方について（中間まとめ）」，文部科学省，2017