

ラプラス作用素とルジャンドル陪関数

– 「数理物理学特論」における試み –

Laplace Operator and Associated Legendre Polynomials

– From a Short Course on Spherical Harmonics –

数理科学研究センター 浅倉 史興

Abstract

The associated Legendre polynomials $P_{n,h}(x)$ ($0 \leq h \leq n$) are defined in terms of derivatives of Legendre polynomial $P_n(x)$ and shown to satisfy the general Legendre equation which necessarily appears in constructing spherical harmonics by separation of variables. In this short note, we try to propose a way to define the associated Legendre polynomials via the Weyl basis of $\mathfrak{o}^{\mathbb{C}}(3)$ and angular momentum operator. By this way, showing $P_{n,h}(x)$ satisfies the general Legendre equation is straightforward and geometric.

1 はじめに

講義科目「数理物理学特論」は、本学大学院工学研究科先端理工学専攻に開講され、通常は物理学や工学に現れる偏微分方程式を解説する科目である。しかし、理論物理系の学生が進学した年度(2009、2013年度)については、その学生達のために、大学院での研究活動に必要な特殊関数：エルミート関数、ラプラスの球関数、ベッセル関数について解説してきた。

特殊関数の計算は、微積分の格好の練習問題であるが、単に計算手法として講述すると、退屈であるのに加えて、特殊関数の本質を見失ってしまう。たとえば、表題のルジャンドル陪関数 (h 位) は、通常の教科書では

$$P_{n,h}(x) = (1-x^2)^{\frac{h}{2}} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) \quad (0 \leq h \leq n) \quad (1)$$

で定義され、これが h 位のルジャンドル陪関数の微分方程式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' - \frac{h^2y}{1-x^2} + n(n+1)y = 0 \quad (0 \leq h \leq n) \quad (2)$$

をみtas。これを、強引に証明することは可能であるが、そもそも (1) の形をもつ関数はどのようにして得られるのか、全く見えてこない。

特殊関数は、物理学に現れる微分方程式と関連させて解説するのがよいと考える；それぞれ、エルミート関数は調和振動子、ラプラスの球関数はラプラス方程式、ベッセル関数はヘルムホルツ方程式であろう。2009年度の授業で一応の型はできたが、ラプラスの球関数については不満足であった。その不満足な部分は、ルジャンドルの多項式に関しては、山中貴詞の卒業研究

[8] でほぼ満足な型に整理にされた。また、ルジャンドル陪関数に関しては：微分方程式 (2) を自己共役形に直すことにより、強引さが幾分か減った形で論じられているが、まだ改良の余地が残されていた。

2013 年度の授業を準備するにあたり、ルジャンドル陪関数について再考した。最も本質をついていると思われる方法は回転群 $SO(3)$ の表現を用いることであることは分っていたが、山内-杉浦 [7] を参照した結果：ラプラスの球関数を構成するだけならば、リー環 $\mathfrak{o}(3)$ の基底の交換関係を用いれば十分であることに気づいた。これはまた、朝永 [3] §80 で示唆されている方法でもある。

本稿の主定理 8 の内容は、山内 [6] 第 3 章 §17 で解説されていたが、回転群の表現論 (たとえば同書第 3 章 §9-16) を講述すれば、それだけで大部分の授業が終わってしまい、「数理物理学特論」で扱うことは不可能であろう。

回転群のリー環 $\mathfrak{o}(3)$ は 3 次の反対称行列全体で、その基底

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して $\lambda_1 = i\omega_1, \lambda_2 = i\omega_2, \lambda_3 = i\omega_3$ と定義すれば

$$[\lambda_1, \lambda_2] = i\lambda_3, \quad [\lambda_3, \lambda_1] = i\lambda_2, \quad [\lambda_2, \lambda_3] = i\lambda_1$$

が成立する。ここで、 $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ と定義した。さらに

$$\epsilon_+ = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad \epsilon_- = \lambda_1 - i\lambda_2, \quad \eta = \lambda_3 \tag{3}$$

すると、以下の関係式が成立する。

$$[\eta, \epsilon_+] = \epsilon_+, \quad [\eta, \epsilon_-] = -\epsilon_-, \quad [\epsilon_+, \epsilon_-] = 2\eta \tag{4}$$

これらの $\epsilon_+, \epsilon_-, \eta$ はワイルの標準基底¹と言われる。ラプラスの球関数を導くには、これらの関係式を念頭に置けば良く、実際に球関数が得られる仕組みは次の定理より理解できる。

定理 1. 複素ベクトル x が η の固有値 h の固有ベクトルとすると、 ϵ_+x は 0 でなければ固有値 $h+1$ の固有ベクトルである。同様に、 ϵ_-x は 0 でなければ固有値 $h-1$ の固有ベクトルである。

この定理は山内-杉浦 [7, III 章 §4] で解説されていて、証明は

$$\eta\epsilon_{\pm}x = \epsilon_{\pm}\eta x + [\eta, \epsilon_{\pm}]x = h\epsilon_{\pm}x \pm \epsilon_{\pm}x = (h \pm 1)\epsilon_{\pm}x$$

より明らかである。このように、 η の固有ベクトル x に対して、 $\epsilon_{\pm}^m x$ ($m \in \mathbb{N}$) は、それらが 0 でなければ、固有値 $h \pm m$ の固有ベクトルとなる。

本稿では、以上のアイディアに基づいたラプラスの球関数の扱いを解説する。次節以降では上記の定理は必要としない。ここでは、証明のアイディアとして紹介した。

¹これらは、 $SO(3)$ のリー環 $\mathfrak{o}(3)$ の基底ではなく、その複素化 $\mathfrak{o}^{\mathbb{C}}(3)$ の基底である。

2 ラプラス作用素の極座標表示

これ以後の節では種々の微分計算が出てくるので、便宜上そこに現れるすべての関数は、議論に必要なだけ微分可能であると仮定して話を進める。関数 u に対して ラプラス作用素 Δu は次のように定義される。

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5)$$

また、座標空間上の点を $P(x, y, z)$ のように表し、体積積分を記号 $\int_{\mathbb{R}^3}$ と $dV = dV_P = dx dy dz$ を用いて

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}^3} f(P) dV$$

のように簡単に表すことにする。

また、ベクトル場 \mathbf{A} の発散 $h = \nabla \cdot \mathbf{A}$ は、有界集合の外で 0 となるすべての関数 g について

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \nabla g dV = \int_{\mathbb{R}^3} hg dV$$

をみたす関数 h として定義される (これが「定義」となることの説明は省略する)。

発散とラプラス作用素の極座標表示 空間極座標は $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ をみたす三つ組 (r, θ, ϕ) で表され、空間座標との関係は次のように表される。

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (6)$$

鎖法則により以下の関係式が得られるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= r \cos \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \phi} &= -r \sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial x} + r \sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

行列 $\Omega(\theta, \phi)$ と極座標の勾配 ∇_{Ω} を

$$\Omega(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla_{\Omega} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

と定義すると、 $\Omega(\theta, \phi)$ は直交行列で ${}^t\Omega(\theta, \phi)\Omega(\theta, \phi) = I$ (単位行列) をみたし

$$\nabla_{\Omega} f = \Omega(\theta, \phi) \nabla f \quad (7)$$

が成立する。また、以下の等式も成り立つ。

$$\nabla_{\Omega} f \cdot \nabla_{\Omega} g = (\Omega(\theta, \phi) \nabla f) \cdot (\Omega(\theta, \phi) \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g$$

極座標空間におけるベクトル場 $\mathbf{A}_\Omega = \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$ に対して、極座標の発散 $\nabla_\Omega \cdot \mathbf{A}_\Omega$ は、有界集合の外で 0 となる関数 g について

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}_\Omega \cdot (\nabla_\Omega g) dV = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla_\Omega \cdot \mathbf{A}_\Omega) g dV$$

という関係式で定義される。ここで、 $dV = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ である。

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}_\Omega \cdot (\nabla_\Omega g) dV \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \left[A_r \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{A_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \phi} \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right] g dV. \end{aligned}$$

よって、極座標の発散は次のように表される。

$$\nabla_\Omega \cdot \mathbf{A}_\Omega = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (8)$$

幾何学的には以下のように表す方が良い。

$$\begin{aligned} & \nabla_\Omega \cdot \mathbf{A}_\Omega \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r^2 \sin \theta A_\phi) \right] \end{aligned}$$

したがって、ラプラス作用素 $\Delta_\Omega = \nabla_\Omega \cdot \nabla_\Omega$ を極座標で表すと

$$\Delta_\Omega u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (9)$$

となる。また、球面ラプラス作用素 Λ_Ω を

$$\Lambda_\Omega u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \quad (10)$$

と定義すると、ラプラス作用素は

$$\Delta_\Omega f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Lambda_\Omega f \quad (11)$$

と表される。偏微分方程式 $\Delta u = \Delta_\Omega u = 0$ をラプラス方程式という。

3 ニュートン ポテンシャルの展開式

座標空間上の点 $P(x, y, z)$, $Q(\xi, \eta, \zeta)$ について、それぞれの位置ベクトル p, q を $p = {}^t(x, y, z)$, $q = {}^t(\xi, \eta, \zeta)$ と表す。また、 p の大きさを、 $|p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と定義する。

ニュートンポテンシャル 点 Q を中心とするニュートン ポテンシャルを

$$\frac{1}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

と定義すると次の定理が成り立つ。

定理 2. ニュートン ポテンシャルは $P \neq Q$ において次の方程式をみたす。

$$\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} = 0$$

ポテンシャルの展開式とルジャンドル多項式 ニュートン ポテンシャルについて、 $|\mathbf{p}| = r$, $|\mathbf{q}| = 1$, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = r \cos \theta$ とおくと

$$\frac{1}{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|} = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 - 2|\mathbf{p}||\mathbf{q}|\cos\theta + |\mathbf{q}|^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\cos\theta + 1}}$$

となり、 r が十分に小さければ次のような展開式を持つ。

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)r^n \quad (12)$$

ここで、左辺に $r \cos \theta$ の項があることより、 $P_n(\cos \theta)$ は $\cos \theta$ の n 次式であることが分かる。多項式 $P_n(x)$ を n 次のルジャンドル多項式という。 $n = 0, 1, 2$ のときは

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

である。また、 $\theta = 0$, $0 < r < 1$ とすると $\frac{1}{\sqrt{1-2r+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ となるので、すべての n について $P_n(1) = 1$ が成立する。

ここで (12) の両辺にラプラス作用素を (11) の形で作用させると、定理 2 より

$$\begin{aligned} \Delta_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{\Omega} [P_n(\cos\theta)r^n] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\Delta_{\Omega} P_n(\cos\theta) + n(n+1)P_n(\cos\theta)] r^{n-2} = 0. \end{aligned}$$

よって、すべての $n \geq 1$ について

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) P_n(\cos\theta) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0$$

が成立する。ここで、 $x = \cos \theta$ とおくと、 $\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ より、次のルジャンドルの微分方程式が導かれる。

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (13)$$

定理 3. n 次ルジャンドル多項式 $P_n(x)$ は次の微分方程式と端点条件をみたす。

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y(1) = 1 \quad (14)$$

この定理より、ルジャンドル多項式の直交性がわかる。

定理 4. n 次ルジャンドル多項式系 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は区間 $[-1, 1]$ の直交関数系である。すなわち、次の式が成立する。

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n) \quad (15)$$

証明 $P_n(x)$ がみたす方程式 (13) に左から $P_m(x)$ をかけて積分すると

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 P_m(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx \\ &= \left[(1-x^2)P_m(x) \frac{dP_n(x)}{dx} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \frac{dP_n(x)}{dx} \right] dx \\ &\quad + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \frac{dP_n(x)}{dx} \right] dx + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx \\ &= - \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} P_n(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} P_n(x) \right] dx \\ &\quad + n(n+1) \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx \\ &= [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x) dx. \end{aligned}$$

ゆえに (15) が成り立つ。

注意 1. ルジャンドルの微分方程式について、(13) の形を自己共役形という。定理 4 の直交性の証明には、微分方程式が自己共役形で表せることを用いている。線形代数では、自己共役な微分作用素は対称行列に相当し、対称行列の異なる固有値の固有ベクトルは直交するという証明に対応する。球面ラプラス作用素も自己共役形であり、異なる固有値の固有関数は直交するという性質を持つ。上記の定理は、その一面を示している。

4 ルジャンドル多項式

ルジャンドル多項式の定義の仕方は 1 つではない。著者は、前節のようにポテンシャルの展開式から定義するのが良いと考えている。

母関数による定義 直接的には、ポテンシャルの展開式より母関数による。

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (16)$$

山中 [8] もこれより出発している。この方法の利点は、母関数の積は

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} P_m(x)P_n(x)s^m t^n$$

と表されるので、左辺を積分することにより以下の式が得られる。

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2sx+s^2}\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{st}} \log \frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} s^n t^n$$

これより、直交性 (15) および正規化のための定数

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (17)$$

がただちに得られることである。また、種々の漸化式 (本稿では省略する) が容易に得られる利点も大きい。ただし、不定積分は

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{1+s^2+2sx}\sqrt{1+t^2-2tx}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{st}} \log \left| \sqrt{\left(\frac{1+s^2}{2s} - x\right)\left(\frac{1+t^2}{2t} - x\right)} + x - \frac{1}{2} \left(\frac{1+s^2}{2s} + \frac{1+t^2}{2t}\right) \right| \end{aligned}$$

のように普通に計算すればよいが、定積分の計算を上手にする必要がある。なにか簡明な計算がありそうだが、著者は気づいていない。

微分方程式による定義 微分方程式と端点条件

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 1$$

をみたま多項式解と定義する。2階微分方程式の1次独立解は2つ存在するが、多項式と制限することにより $\lambda = n(n+1)$ となり、解は定数倍を除いて一意に定まる。定数は条件 $y(1) = 1$ により決定される。係数が漸化式で定まるので、計算が容易である。また、定理4の証明で見たように、多項式系の直交性は微分方程式をみたまことより示される。ただし、微分方程式はポテンシャルの展開式から導くのが自然であろう。

ロドリゲの公式による定義 ルジャンドル多項式を

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (n \geq 1), \quad P_0(x) = 1 \quad (18)$$

ように直接定義する。単純ではあるが、微分方程式 (14) をみたまこと、種々の漸化式をみたまことなどを1つひとつ確認する必要がある (たとえば、クーラント-ヒルベルト [1] 第1巻、高木 [2] §36 を参照)

山中 [8] や本稿のように母関数から出発した場合、通常コースでは微分方程式と端点条件をみたまことを示すが、ここでは、ロドリゲ公式の意味を考えてみたい。ポイントになるのは定理4の直交性である。

ルジャンドル多項式系は区間 $[-1, 1]$ の直交関数系で、 $P_n(x)$ は $1, x, x^2, \dots, x^n$ の1次結合で表される。すなわち、関数系 $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ を直交化したものと本質的に等しい。線形代数に出てくるシュミットの直交化定理によれば、 $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ と順に直交基底を構成していくと、基底は定数倍を除いて一意的に定まることが知られている。

一方、高木 [2] §36 のように、区間 $[a, b]$ において n 次多項式 $Q_n(x)$ を

$$Q_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n] \quad (n \geq 1), \quad Q_0(x) = 1$$

と定めると、 $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は区間 $[a, b]$ の直交多項式系となる。よって、シュミットの定理より

$$P_n(x) = c_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

成立しているはずである。ここで、ライプニッツの公式より

$$c_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = c_n n! (x+1)^n + (x-1) F_n(x)$$

が成立するので ($F_n(x)$ は適当な多項式)、 $P_n(1) = c_n 2^n n!$ よりロドリゲの公式が導かれる。因みに、このコースをとると、正規化のための定数 (17) の証明は、 $P_n(x)^2$ の表示式の積分を部分積分を用いて計算することになる。

5 ラプラスの球関数

第3節において、ルジャンドル関数 $P_n(\cos \theta)$ は

$$\Lambda_{\Omega} P_n(\cos \theta) + n(n+1) P_n(\cos \theta) = 0$$

をみたくを確認した。関数 $P_n(\cos \theta)$ は球面において定義された関数で、球面ラプラス作用素 Λ_{Ω} の固有値 $n(n+1)$ の固有関数である²。後に示すように、 Λ_{Ω} の固有値は $n(n+1)$ で尽きる。この球面ラプラス作用素の固有値 $n(n+1)$ の固有関数を、 n 次のラプラスの球関数 (または球関数) という。この節では、変数分離法を用いて球関数を求める。

ルジャンドル関数 $P_n(\cos \theta)$ について、 $u_n(r, \theta) = P_n(\cos \theta) r^n$ とおくと、第3節の計算により、 u_n は次の方程式をみたす。

$$\Delta_{\Omega} u_n = [\Lambda_{\Omega} P_n + n(n+1) P_n] r^{n-2} = 0$$

一般の球関数 $Y_n(\theta, \phi)$ も $y_n = Y_n(\theta, \phi) r^n$ が $\Delta_{\Omega} u_n = 0$ をみたすとして良い³。したがって、上記と同様に

$$\Delta_{\Omega} y_n = [\Lambda_{\Omega} Y_n + n(n+1) Y_n] r^{n-2} = 0$$

となり、これより、 Λ_{Ω} の固有値は $n(n+1)$ となることが分かる。

変数分離法による構成 球面ラプラス作用素の固有値は $n(n+1)$ であるが、 n 次球関数は $P_n(\cos \theta)$ だけではない。いま、 n を固定し ($n(n+1)$ の固有空間を考えている)、 $Y(\theta, \phi) = Y_n(\theta, \phi)$ と表す。さらに、 $Y(\theta, \phi) = Z(\theta)W(\phi)$ と表されるとしよう。

$$\Lambda_{\Omega} Y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) W + \frac{Z}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 W}{d\phi^2} = -n(n+1) ZW$$

より

$$\frac{\sin \theta}{Z} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) + \frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\phi^2} + n(n+1) \sin^2 \theta = 0.$$

²一般的な用語法では作用素 $-\Lambda_{\Omega}$ の固有値と固有関数であるが、本稿では古典的な慣例 ([1]) に従った。

³この事実の証明は溝畑茂 (本学名誉教授)[4] に載っているが、このようにして構成した関数系が完全であることを後に示すので、今は議論しないでおく。

よって、ある定数 ρ により、以下のように表されるはずである。

$$-\frac{1}{W} \frac{d^2 W}{d\phi^2} = \frac{\sin \theta}{Z} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta = \rho$$

以上より、次の2つの微分方程式が得られた。

$$\frac{d^2 W}{d\phi^2} + \rho W = 0, \quad \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dZ}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) \sin \theta - \frac{\rho}{\sin \theta} \right] Z = 0$$

最初の方程式の解は $\rho = h^2$ ($h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) として、 $W(\phi) = e^{ih\phi}$ とすれば、区間 $[0, 2\pi]$ の完全系が得られる。

2番目の方は $z = \cos \theta$ とおくと、 $\frac{d}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$ より

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dZ}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{h^2}{1-x^2} \right] Z = 0. \quad (19)$$

すなわち、(2) のルジャンドル陪関数の微分方程式が得られた。なお、境界条件は、 $x = \pm 1$ で有界とする。便宜上、(19) の解を $Z_{n,h}$ と表すとすれば、 n 次の球関数は

$$Y_n = c_{n,0} P_n(\cos \theta) + \sum_{h=1}^{\infty} \left(c_{n,h}^+ e^{ih\phi} + c_{n,h}^- e^{-ih\phi} \right) Z_{n,h}(\cos \theta)$$

ということになる⁴。

6 ルジャンドル陪関数

ルジャンドル陪関数 (h 位) は (1) で定義される関数である。それが、ルジャンドル陪関数の方程式 (2) をみたくすることについては：まず、ルジャンドルの微分方程式 (14) を h 回微分して、 $Q_{n,h}(x) = P_n^{(h)}(x)$ とすると、 $Q_{n,h}$ は次の方程式をみたく。

$$(1-x^2)Q_{n,h}'' - 2(h+1)xQ_{n,h}' + [n(n+1) - h(h+1)]Q_{n,h} = 0 \quad (20)$$

これを用いて、 $P_{n,h} = (1-x^2)^{\frac{h}{2}} Q_{n,h}$ が微分方程式 (14) をみたくことを示すのである。以上は演習問題としては可能であっても、なぜルジャンドル関数の h 階導関数を考えれば良いのか説明がつかない(昔の人はそれなりの感覚があったのかもかもしれない)。

重み $(1-x^2)^{\frac{h}{2}}$ については：2009年度の講義では、上記の微分方程式 (20) を

$$[(1-x^2)(\rho y)']' + q(x)\rho y = 0$$

のような自己共役形にする ρ として、重み $\rho = (1-x^2)^{\frac{h}{2}}$ を導いた(山中 [8] 参照)。このとき

$$q(x) = n(n+1) - \frac{h^2}{1-x^2}$$

となって証明が終わる。この節の残りで、角運動量の交換関係を用いてルジャンドル陪関数 (1) を導く方法を解説する。

⁴次節で示すが、 h についての和は $1 \leq h \leq n$ でよい。

角運動量作用素の交換関係 角運動量作用素を

$$L_1 = \frac{1}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad L_2 = \frac{1}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad L_3 = \frac{1}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

と定義し、例えば $[L_1, L_2]f = L_1(L_2f) - L_2(L_1f)$ のように表すと、交換関係

$$[L_1, L_2] = iL_3, \quad [L_3, L_1] = iL_2, \quad [L_2, L_3] = iL_1$$

が成立する。また、 $E_+ = L_1 + iL_2$, $E_- = L_1 - iL_2$, $H = L_3$ と定義すると

$$[H, E_+] = E_+, \quad [H, E_-] = -E_-, \quad [E_+, E_-] = 2H$$

となる。これらの関係式は、微分作用素と行列の対応を、次のように考えると

$$L_j \leftrightarrow \lambda_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad E_{\pm} \leftrightarrow \epsilon_{\pm}, \quad H \leftrightarrow \eta$$

定理 1 の交換関係式である。次の定理はこれからの議論で基本となる。

定理 5. 角運動量作用素はラプラス作用素と交換可能である。

$$[\Delta, L_j] = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \tag{21}$$

証明 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_1 f = L_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ が成立することは明らか。また

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_1 f &= \frac{1}{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z} - z \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{i} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + L_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} L_1 f &= \frac{1}{i} \left(y \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - z \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2} \right) = -\frac{1}{i} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + L_1 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

のように計算し加え合わせると、 $\Delta(L_1 f) = L_1(\Delta f)$ を得る。 L_2, L_3 についても同様である。

角運動量作用素の極座標表示 空間極座標

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

について (7) より次の関係式が得られる。

$$\nabla f = {}^t \Omega(\theta, \phi) \nabla_{\Omega} f$$

すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin \theta \cos \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \theta \sin \phi \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

と表される。これらを用いると

定理 6. 角運動量作用素は θ と ϕ のみに依存し、次のように表される。

$$\begin{aligned} L_1 &= i \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ L_2 &= i \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad L_3 = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \\ E_+ &= e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad E_- = e^{-i\phi} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \quad H = -i \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

次の定理は、ルジャンドル陪関数を構成するときの基本である。

定理 7. 角運動量作用素は球面ラプラス作用素 Λ_Ω と交換可能である。すなわち

$$[\Lambda_\Omega, L_j] = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (22)$$

が成立する。また、関数 Y が Λ_Ω の固有関数ならば、 $E_\pm Y$ も同じ固有値の固有関数である。

証明 角運動量作用素は θ と ϕ のみに依存しているのので、定理 5 と表示式 (9)、(10) より交換可能であることが分かる。関数 Y が $\Lambda_\Omega Y + n(n+1)Y = 0$ をみたすならば、 $E_\pm = L_1 \pm iL_2$ であることに注意すると

$$\Lambda_\Omega(E_\pm Y) = E_\pm(\Lambda_\Omega Y) = -n(n+1)E_\pm Y$$

が成立するので、 $Y = Y(\theta, \phi)$ が Λ_Ω の固有値 $n(n+1)$ の固有関数ならば、 $E_\pm Y$ もまた固有値 $n(n+1)$ の固有関数である。

注意 2. 作用素 H の固有関数を $Y(\theta, \phi)$ とおくと

$$HY = -i \frac{\partial Y}{\partial \phi} = cY$$

をみたす。よって、 $Y = Ze^{ic\phi}$ となる。周期 2π の周期関数であることより

$$Y = Z(\theta)e^{\pm ih\phi} \quad (h = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。以上より、固有関数の構成に定理 1 の手法を用いることができる。

ルジャンドル陪関数の構成 球面ラプラス作用素 Λ_Ω の固有値 $n(n+1)$ の固有関数を $Y_{n,h}(\theta, \phi) = Z_{n,h}(\cos \theta)e^{ih\phi}$ と表し、 E_+ を作用させると

$$E_+ Y_{n,h} = \left[\frac{dZ_{n,h}}{d\theta} - h \cot \theta Z_{n,h} \right] e^{i(h+1)\phi} = -\sin \theta \left[Z'_{n,h} + \frac{h \cos \theta}{\sin^2 \theta} Z_{n,h} \right] e^{i(h+1)\phi}.$$

ここで、 $x = \cos \theta$ とおくと、上式の右辺は $e^{i(h+1)\phi}$ の因子を除き

$$-\sqrt{1-x^2} \left(Z'_{n,h} + \frac{hx}{1-x^2} Z_{n,h} \right) = -(1-x^2)^{\frac{h+1}{2}} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-\frac{h}{2}} Z_{n,h} \right]$$

のように変形される。したがって、関数 $Z_{n,h+1}$ を

$$Z_{n,h+1}(x) = -(1-x^2)^{\frac{h+1}{2}} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{-\frac{h}{2}} Z_{n,h} \right]$$

と定義すると、次の補題が得られた。

補題 1.

$$E_+[Z_{n,h}(\cos \theta)e^{ih\phi}] = Z_{n,h+1}(\cos \theta)e^{i(h+1)\phi}$$

以上の結果を、 $Z_{n,0}(x) = P_n(x)$ から順次計算していくと

$$Z_{n,1} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_n(x)$$

$$Z_{n,2} = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x)$$

⋮

$$Z_{n,h} = (-1)^h (1-x^2)^{\frac{h}{2}} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x)$$

のように、ルジャンドル陪関数 (1) の列が得られる。ここで、 $P_n(x)$ は x の n 次式なので、 $0 \leq h \leq n$ として良いことに注意する。改めて $P_{n,h}(x)$ を次のように定義する。

$$P_{n,h}(x) = (1-x^2)^{\frac{h}{2}} \frac{d^h}{dx^h} P_n(x) \quad (0 \leq h \leq n)$$

定理 8. ルジャンドルの陪関数 $P_{n,h}(x)$ を上のように定義すると

$$E_+[P_n(\cos \theta)] = (-1)^h P_{n,h}(\cos \theta)e^{ih\phi}$$

が成立し、 $Y_{n,h}(\theta, \phi) = P_{n,h}(\cos \theta)e^{ih\phi}$ は固有値 $n(n+1)$ の球関数である。

球関数の直交性と完全性 直交性は関数の具体形を用いて示す (証明は省略)。

定理 9. $m \neq n$ ならば、任意の $h = 0, 1, 2, \dots$ について

$$\int_{-1}^1 P_{m,h}(x)P_{n,h}(x) dx = 0$$

が成り立つ。また、正規化のための定数は以下のとおりである。

$$\int_{-1}^1 P_{n,h}(x)^2 dx = \frac{2(n+h)!}{(2n+1)(n-h)!}$$

完全性については、関数系 $\{\cos^m x\}_{m=0}^{\infty}$ が区間 $[0, \pi]$ 上の関数空間において稠密であることに注意して、以下の表を考える。

	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	\dots	$l = m$	\dots
$k = 0$	P_0	P_1	P_2	\dots	P_m	\dots
$k = \pm 1$	$P_{1,1}$	$P_{2,1}$	$P_{3,1}$	\dots	$P_{m+1,1}$	\dots
$k = \pm 2$	$P_{2,2}$	$P_{3,2}$	$P_{4,2}$	\dots	$P_{m+2,2}$	\dots
\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots
$k = \pm h$	$P_{h,h}$	$P_{h+1,h}$	$P_{h+2,h}$	\dots	$P_{m+h,h}$	\dots
\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	\vdots

ここで、 k は $[0, 2\pi]$ の基底 $\{e^{ik\phi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ 、 l は多項式 $P_{n,h}(x)$ の次数とする。この表より、 $e^{\pm ihx} \cos^m \theta$ は球関数

$$P_{l+h,h}(\cos \theta)e^{\pm ih\phi} \quad (0 \leq l \leq m)$$

の和で表されることが分かる。関数系 $\{e^{\pm ihx} \cos^m \theta\}_{m,h=0}^{\infty}$ は $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ 上の関数空間において稠密な関数系をつくるので

定理 10. ラプラスの球関数は球面極座標空間上で定義された関数空間の完全直交系である。

7 まとめ

本稿の方法により、ルジャンドル陪関数をラプラス作用素と角運動量作用素の交換関係を用いて導き出すことが可能となる。とくに、物理系の学生・大学院生にとっては、ラプラス作用素と角運動量作用素の性質は基本知識の範囲と考えられるので、微分方程式の技術的な計算が避けられるのは、この方法の利点と言って良いだろう。

ここで、導き出す過程を振り返ってみたい：ルジャンドルの多項式はニュートンポテンシャルの展開式より導き出した。ルジャンドル多項式の直交性は母関数によって示されるので、ルジャンドルの微分方程式は必要ない⁵。また、ルジャンドル陪関数を導くのに必要なのは、ラプラス作用素と角運動量作用素の交換関係なので、ルジャンドル陪関数の方程式は必要ない。結局、ラプラスの球関数を導くに必要なものは、ニュートンポテンシャル、ラプラス作用素、角運動量作用素ということになる。ほとんど、幾何学的な議論のみということである。

最後に、ラプラスの球関数を導くのに、ニュートンポテンシャルの方向微分を考える方法がある (Maxwell[5] Part I、クーラント-ヒルベルト [1])。この方法により、どのようにルジャンドル陪関数を導いたらよいかについて、著者は知らない。

8 謝辞

本稿をまとめるにあたり、東北大学名誉教授 島倉紀夫 先生には、数々の貴重なご教示と激励のお言葉をいただきました。また、査読者には拙稿をたいへん丁寧に読んでいただいた上に、数々の不備な点をご指摘いただきました。お二人には心から感謝いたします。

参考文献

- [1] R. クーラント-D. ヒルベルト、「数理物理学の方法 1, 2」, 斎藤利弥 (監訳)、丸山滋弥、銀林浩 (訳)、東京図書、1959
- [2] 高木貞治、「解析概論 (改訂第 3 版)」, 岩波書店、1961
- [3] 朝永振一郎、「角運動量とスピン」, みすず書房、1989
- [4] 溝畑 茂、「積分方程式論」, 朝倉書店、1968 (増補版、1979)
- [5] J. C. Maxwell, "A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. 1", Oxford Clarendon Press, 1881
- [6] 山内恭彦、「回転群とその表現」, 岩波書店、1957
- [7] 山内恭彦-杉浦光夫、「連続群論入門」, 培風館、1960
- [8] 山中貴詞、ラプラシアンとルジャンドルの多項式、電気電子工学科 2012 年度卒業論文、2013

⁵本稿では、ルジャンドルの微分方程式を用いて直交性を示したが、注意 1 で述べたように、球面ラプラス作用素の異なる固有値の固有関数は直交するという性質に他ならない