

博士学位論文

題 目

内部状態の少ないセルオートマトンに関する研究

担当指導教員名 梅尾 博司 印

申請年月日 2017年10月31日

申請者専攻名 情報工学 専攻

学 生 番 号 D06301

氏 名 上川 直紀 印

大阪電気通信大学大学院

目次

第 1 章	序論	1
第 2 章	セルオートマトン	5
2.1	緒言	5
2.2	セルオートマトン	5
2.3	1 ビット・セルオートマトン (CA _{1-bit})	7
2.4	マルチレイヤー・セルオートマトン (ML-CA)	8
2.5	新たに提案するマルチレイヤー・セルオートマトンのモデル	9
2.6	セルアルゴリズムの設計	12
2.6.1	CA の波の伝播	12
2.6.2	CA _{1-bit} の波の伝播	14
2.7	結言	15
第 3 章	実時間数列生成問題	17
3.1	緒言	17
3.2	CA 上の数列生成問題	17
3.2.1	数列生成能力	18
3.2.1.1	1 状態 CA で生成可能な数列	18
3.2.2	2 状態 CA で生成可能な数列	18
3.2.2.1	数列生成アルゴリズムの正当性について	25
3.2.3	数列生成アルゴリズム	29
3.2.3.1	数列 $\{2^n n = 1, 2, 3, \dots\}$ (4 状態アルゴリズム)	29
3.2.3.2	数列 $\{2^n n = 1, 2, 3, \dots\}$ (3 状態アルゴリズム)	34
3.2.3.3	数列 $\{n^2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	38
3.2.3.4	Fibonacci 数列	42
3.2.3.5	数列 $\{3^n n = 1, 2, 3, \dots\}$	50
3.2.3.6	数列 $\{n^3 n = 1, 2, 3, \dots\}$	55
3.3	CA _{1-bit} 上の数列生成問題	71
3.3.1	数列生成能力	71
3.3.1.1	1 状態 CA _{1-bit} で生成可能な数列	71
3.3.1.2	2 状態 CA _{1-bit} で生成可能な数列	71
3.3.1.3	CA と CA _{1-bit} の数列生成能力の比較	71
3.3.2	数列生成アルゴリズム	75
3.3.2.1	数列 $\{2^n n = 1, 2, 3, \dots\}$ (4 状態アルゴリズム)	75

3.3.2.2	数列 $\{2^n n = 1, 2, 3, \dots\}$	79
3.3.2.3	数列 $\{n^2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	82
3.3.2.4	Fibonacci 数列	83
3.3.2.5	数列 $\{3^n n = 1, 2, 3, \dots\}$	85
3.4	非対称 $CA_{1\text{-bit}}$ 上の数列生成問題	85
3.4.1	対称性 $CA_{1\text{-bit}}$	87
3.4.2	対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ の数列生成能力	87
3.4.3	対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ 上の数列生成アルゴリズム	87
3.5	結言	94
第 4 章	一斉射撃問題	97
4.1	緒言	97
4.2	4 状態リング接続セルオートマトン上で動作する一斉射撃アルゴリズムの探索	97
4.2.1	1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題	97
4.2.2	1 次元リング接続 CA を同期に導く完全解と部分解	98
4.2.3	部分解の探索	99
4.2.4	セル数 $n = 2^k (k \geq 1)$ の 1 次元リング接続 CA を射撃に導く一斉射撃解	99
4.2.4.1	検出した 4 状態対称性解	99
4.2.4.2	検出した 4 状態非対称性解	103
4.2.5	セル数 $n = 2^k - 1 (k \geq 2)$ の 1 次元リング接続 CA を射撃に導く一斉射撃解	110
4.2.5.1	検出した 4 状態対称性解	110
4.2.5.2	検出した 4 状態非対称性解	115
4.3	マルチレイヤーセルオートマトンを用いた耐故障性一斉射撃アルゴリズムの実装	126
4.3.1	耐故障性一斉射撃アルゴリズム	126
4.3.2	故障セルについて	126
4.3.3	耐故障性一斉射撃アルゴリズムについて	126
4.3.4	ML-CA 上での実装について	127
4.4	結言	129
第 5 章	結論	133
	参考文献	135
	謝辞	137
	研究業績目録	139
	付録	143
A	数列を生成する 2 状態 CA の 146 個の遷移規則集合のシミュレーション結果	143

第 1 章

序論

セルオートマトン (CA) は生物固有の能力である自己増殖, 自己複製機能を形式的に記述するモデルとして, Neumann [1] により考案された. CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され, セルは自らと, 隣接するセルの内部状態という局所的な情報を元に, 自らを遷移させる機能しか持たない. しかしながら, この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし, CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ. Neumann [1] は格子状に接続された CA 上で, 自己複製機械として動作するアルゴリズムを設計し, 無限に自己複製を繰り返すことを数学的に証明した. また, Wolfram [2] は 1 次元アレイ接続の CA に着目し, 内部状態数, 近傍数の変化による挙動を調査し, 1 次元 CA のパターンの変化を 4 つのクラス (クラス I, クラス II, クラス III, クラス IV) に分類した. クラス I ではセル空間がすべて同じ状態のセルに覆われてしまい, 変化しなくなる. クラス II ではセルの時間発展が局所化され, 周期的または定常的になる. クラス III ではセル全体がランダムに時間発展するカオス状態となる. クラス IV はクラス I ~ IV に分類できない不思議な特徴を持つ. さらに Langton [3] がクラス IV に関して研究を進め, 静的なクラスであるクラス I, クラス II と, 動的なクラスであるクラス III の間にクラス IV という複雑な領域が存在する事を導いた. この領域は「カオスの縁」と呼ばれている. Langton [3] はカオスの縁と他の現象とのアナロジーについて言及を行なった. カオスの縁は, 秩序とカオスの境界に位置し, 柔軟な組織を維持するために重要な領域であり, 生命などの複雑系を理解する為に重要であると考えられている. このように CA は生命現象の知られざる秘密の探りたいという目的で提案され, 発展し, 現在では, 複雑系などの多くの分野で研究がなされている. CA の応用例として流体シミュレーション, 交通流のシミュレーション, 社会経済現象の解析等が挙げられる.

CA は多くの領域で研究されており, 様々な CA のモデルが存在する. 本研究では, 標準的な CA に加え, セル間通信量を 1 単位時間につき 1 ビットに制限した CA のモデルである 1 ビットセルオートマトン (CA_{1-bit}), 階層構造を持つセルから構成されるマルチレイヤーセルオートマトン (ML-CA) についても考察を行なう. 本研究では CA の内部状態数に着目し, 内部状態の少ない CA 上で, CA で研究されている問題である実時間数列生成問題, 一斉射撃問題の考察を行なう. 実時間数列生成問題は有限状態の CA で数列を生成 (計算) するように遷移規則集合を求める問題であり, 本研究では 1 状態および 2 状態の CA で生成可能な数列を明らかにするとともに, 内部状態数の少ない CA で数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 等の非正則数列の実時間生成を実現する. 一斉射撃問題は CA の同期問題であり, CA を構成する全てのセルの内部状態を同時に同じ状態に遷移するように遷移規則集合を求める. 本研究では, 内部状態が少ない n 個のセルから構成される一次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題の考察を行ない, 4 状態のリング接続 CA を射撃に導く遷移規則集合を明らかにする. また, 故障セルが存在する一次元アレイ接続 CA 上の一斉射撃問題についても考察し, 故障セルが存在していた場合であっても射撃に導く遷移規則集合を明らかにする.

以下に各章の概要を示す.

第 2 章では本研究で扱うモデル, CA, CA_{1-bit}, ML-CA について述べる. それぞれのモデルの定義について概説し, 本研究で導入したモデルの記法について説明を行なう. また, CA 上のアルゴリズムを設計する上で重

要となる'波'について概説し, 波を用いたセルアルゴリズムの設計について述べる.

第 3 章では CA 上で考察されている問題の 1 つである実時間数列生成問題について述べる. Fischer [4] は 1 次元アレイ接続 CA 上で動作する素数列の生成アルゴリズムを明らかにした. しかしながら, Fischer [4] の素数列生成アルゴリズムは生成時間について最適ではなく, 最適となる生成時間に対して 3 倍の生成時間が必要である. 有沢 [5] も同様に 1 次元アレイ接続 CA 上で動作する数列生成アルゴリズムを考察し, 素数列, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムを明らかにしたが, これらのアルゴリズムも生成時間について最適ではなく, 最適となる生成時間に対して 2 倍の生成時間が必要となる. Fischer [4], 有沢 [5] が明らかにしたアルゴリズムは**線形時間数列生成アルゴリズム**と呼ばれる. 生成時間について最適となる**実時間数列生成アルゴリズム**は梅尾 [6], Korec [7, 8], Umeo, Miyamoto and Abe [9] が明らかにしている. 梅尾 [6] は 7 状態の CA で数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成するアルゴリズムを, Korec [7, 8] は 11 状態および 9 状態の CA で素数列を生成するアルゴリズムを, Umeo, Miyamoto and Abe [9] は 8 状態の CA で素数列を生成するアルゴリズムを明らかにした. 本研究では, CA の内部状態数, および生成時間に着目して実時間数列生成問題について考察し, 1 状態および 2 状態の CA で実時間で生成可能となる数列全てを明らかにする. 加えて, 実時間生成が実現されていない Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, これまで研究がなされていない数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間数列生成アルゴリズムを明らかにし, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムについては, 内部状態数の削減を行なう. また, 明らかにした実時間数列生成アルゴリズムを実現する遷移規則集合の正当性について形式的に証明をおこなう. Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムは内部状態数がそれぞれ 5, 3, 3, 3, 8 の CA で実現しており, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムについては, 内部状態数についても最適となる. また, $CA_{1\text{-bit}}$ 上の実時間数列生成問題についても考察を行ない, 内部状態数の少ない $CA_{1\text{-bit}}$ で生成できる数列のクラスを明らかにし, CA と $CA_{1\text{-bit}}$ の数列生成能力の比較を行なう. また, $CA_{1\text{-bit}}$ 上でも数列生成アルゴリズムについて考察し, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成について, 同一時間で解決する $CA_{1\text{-bit}}$ 上のアルゴリズムを明らかにする. Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムは内部状態数がそれぞれ 9, 2, 3, 3 の $CA_{1\text{-bit}}$ で実現しており, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムについては, 内部状態数についても最適となる.

第 4 章では CA の同期問題である一斉射撃問題について考察を行なう. 一斉射撃問題は 1957 年に J. Myhill により提案され, Moore [10] によって明らかにされた 1 次元アレイ接続 CA の同期に関する問題である. Moore [10] によると J. McCarthy と M. Minsky が一斉射撃問題の最初の解 (アルゴリズム) を与えたが, これらのアルゴリズムは射撃 (計算) 時間が最少であるかは明らかではなかった. 最少となる射撃時間を明らかにしたのは Goto [11] であるが, Goto [11] のアルゴリズムを実現する内部状態数および遷移規則集合は明らかにされなかった. 射撃時間が最少となる一斉射撃アルゴリズムの遷移規則集合を最初に与えたのは Waksman [12] であり, Waksman [12] の一斉射撃アルゴリズムは 16 状態の CA で実現している. その後も 1 次元アレイ接続 CA 上の一斉射撃問題の研究は続けられ, Balzer [13], Szwerinski [14], Gerken [15], Mazoyer [16] らが一斉射撃アルゴリズムを明らかにしている. これらの一斉射撃アルゴリズムで, 最も少ない内部状態数で一斉射撃を実現するのは Mazoyer [16] のアルゴリズムであり, 内部状態数 6 の CA で一斉射撃を実現している. 一方, Berthiaume et al. [17] は 1 次元リング接続 CA 上で一斉射撃問題について考察を行ない, 8 状態の 1 次元リング接続 CA を同期させる一斉射撃解を明らかにし, 3 状態の 1 次元リング接続 CA で同期を実現する完全解, 4 状態の対称性を持つ 1 次元リング接続 CA で同期を実現する完全解が存在しない事を明らかにした. 完全解とは, n を 2 以上の自然数としたとき, 全ての n について, n 個のセルから構成される 1 次元リング接続

CA を一斉射撃に導く遷移規則集合を示す。本研究では、4 状態の 1 次元リング接続 CA 上で CA を同期させる部分解が多数存在することを明らかにする。部分解とは、たとえば、 k を 1 以上の自然数とした場合、セル数が $n = 2^k$ の場合に一斉射撃が可能となる遷移規則集合を示す。また、故障セルが存在するセル空間を同期させる耐故障性一斉射撃問題についても考察を行なう。故障セルが存在する CA 上での一斉射撃問題は Umeo [18] によって提案され、Umeo [18] は故障セルを含む 1 次元 CA であっても一斉射撃に導く耐故障性一斉射撃アルゴリズムを明らかにした。Yunès [19] は Umeo [18] とは異なる方式の耐故障性一斉射撃アルゴリズムを明らかにした。これらの耐故障性一斉射撃アルゴリズムについての研究では、アルゴリズムが複雑であることが一因となり、アルゴリズムを実現する内部状態数、遷移規則集合については言及されていない。本研究では、ML-CA シミュレータの特徴である遷移規則変換機能を用い、Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムを実現する CA の遷移規則集合を明らかにする。ML-CA シミュレータの特徴である遷移規則変換機能とは、ML-CA で動作するアルゴリズムの遷移規則集合を CA で動作する遷移規則集合に変換する機能である。階層構造をもつセルから構成される ML-CA であれば、複雑なアルゴリズムも容易に実装可能であり、通常の CA では実装が困難なアルゴリズムであっても、ML-CA シミュレータを使用する事で、CA 上で動作するアルゴリズムの遷移規則数、遷移規則集合を明らかにすることが可能である。ML-CA シミュレータは一斉射撃問題だけでなく、実時間数列生成問題等の他の CA 上の問題にも応用可能である。

最後に、第 5 章で本研究の成果をまとめる。

第 2 章

セルオートマトン

2.1 緒言

本章では, Neumann [1] により考案された並列計算モデルであるセルオートマトン (CA) について述べる. まず, 2.2 節では CA の定義について述べる. 2.3 節ではセル間の通信量を 1 ビットに制限したセルオートマトンのモデルである 1 ビット・セルオートマトン (CA_{1-bit}) について, 2.4 節, 2.5 節では複数の内部状態を保持可能なセルで構成されるセルオートマトンのモデルであるマルチレイヤー・セルオートマトン (ML-CA) について述べる. 2.6 節では, CA 上で動作するセルアルゴリズムの設計について概説する.

2.2 セルオートマトン

CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される. 図 2.1 参照.

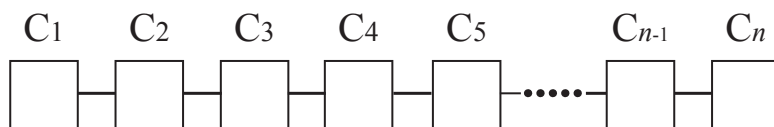


図 2.1 1次元接続セルオートマトン

$n \geq 1$ とした場合, 左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ. 有限状態オートマトン A を定式化すると, $A = (Q, \delta)$ となる. それぞれ, 以下の意味を持つ.

1. Q は内部状態の有限集合である.
2. δ は状態遷移関数であり, 次のように定義される.

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

この場合の状態遷移関数 $\delta(p, q, r) = s$ ($p, q, r, s \in Q$) は次の意味を持つ.

ある時刻 t_0 時に, セル C_i の内部状態が q であり, 左側のセルの内部状態が p , 右側のセルの内部状態が r であると, 1 単位時間後の時刻 $t_0 + 1$ 時にセル C_i の内部状態が s に遷移する. また, 単位時間をステップと呼ぶ事とする. 図 2.2 参照.

図 2.3 に示す様に, 左端のセル C_1 は左側からの入力として, 右端のセル C_n は右側からの入力として常に外界を表す特殊な状態 $\$$ が入力される. また静止状態 $q (\in Q)$ は隣接する左右のセルの状態が q の場合, q を維持し続けるという特徴を持つ. すなわち, あらかじめ, 遷移規則 $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$, $\delta(q, q, \$) = q$ が定義される.

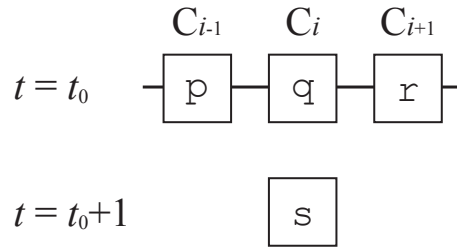


図 2.2 CA のセルの遷移

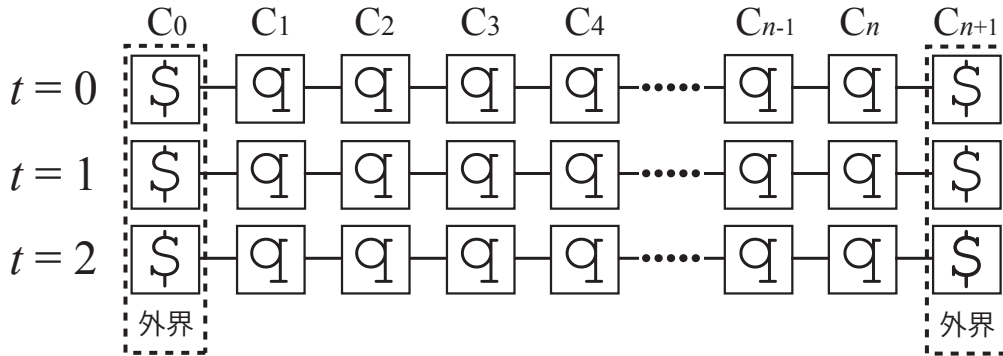


図 2.3 外界との接続

次に、セル空間を記述する記法を導入する。 i, j, n を自然数、 t を正の整数とし、 $1 \leq n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j, t \geq 0$ とする。時刻 t 時のセル C_i を S_i^t と表し、時刻 t 時の n 個のセルからなるセル空間を以下の様に表す。

$$t : S_1^t \dots S_n^t$$

また、時刻 t 時にセル C_1 からセル C_{i-1} の $i-1$ 個のセル全ての内部状態が 0 、セル C_i からセル C_j の $j-i+1$ 個のセル全ての内部状態が S 、セル C_{j+1} 以降のセル全ての内部状態が U の場合、以下の様にまとめて記述する。

$$t : \overbrace{0 \dots 0}^{[1, i-1]} \overbrace{S \dots S}^{[i, j]} \overbrace{U \dots U}^{[j+1, \dots]}$$

次にセル空間の1ステップの変化を表す演算記号 " \Rightarrow " を導入する。以下の様に、 \Rightarrow の左右にセル空間の状態を記述した場合、 \Rightarrow の左側のセル空間の状態が変化前の状態で、右側が1ステップ後のセル空間の状態となる。

$$t : \overbrace{0}^{[1]} \overbrace{SS \dots}^{[2, \dots]} \Rightarrow t+1 : \overbrace{00}^{[1, 2]} \overbrace{SS \dots}^{[3, \dots]}$$

また、遷移規則の簡略記法も導入する。遷移規則 $\delta(w, x, y) = z$ の場合、省略して $w \ x \ y \rightarrow z$ と記述する。

2.3 1ビット・セルオートマトン (CA_{1-bit})

CAのセル間通信量は $O(1)$ ビットであるが、ここではセル間通信量を1ビットに制限したCAのモデルCA_{1-bit}を考える。CA_{1-bit}はセルと呼ばれる有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される。図2.4のように、各セルは隣接セルへの1ビット信号の出力ラインと、隣接セルから1ビット信号の入力ラインで接続される。セルは左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ。

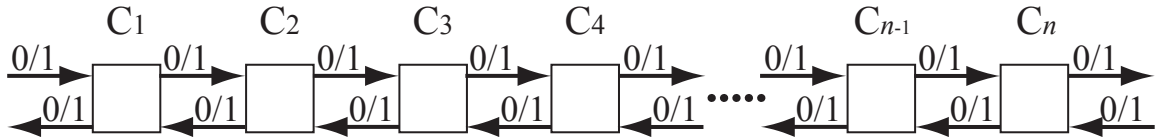


図2.4 1次元接続1ビット・セルオートマトン

有限状態オートマトン A を定式化すると、 $A = (Q, \delta)$ となる。 Q は内部状態の有限集合である。 δ は状態遷移関数であり、次のように定義される。

$$\delta : Q \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$

この場合の状態遷移関数 δ は次の意味を持つ。

$$\begin{aligned} \delta(p, x, y) &= (q, x', y') \\ p, q &\in Q, x, y, x', y' \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

ある時刻 t_0 時に、セル C_i の内部状態が p であり、左側のセル C_{i-1} から1ビットの信号 x 、右側のセル C_{i+1} から1ビットの信号 y が入力されると、次の時刻 $t_0 + 1$ 時にセル C_i の内部状態が q に遷移し、左側のセル C_{i-1} に1ビットの信号 x' 、右側のセル C_{i+1} に1ビットの信号 y' を出力する。

CA_{1-bit}の場合、左端のセル C_1 は左側から、右端のセル C_n は右側から常に、1ビット信号'0'が入力される。また、静止状態 $q(\in Q)$ については、左右共に1ビット信号'0'が入力されている場合、 q を維持し、左右のセルに1ビット信号'0'を出力する。すなわち、あらかじめ、遷移規則 $\delta(q, 0, 0) = (q, 0, 0)$ が定義される。

CA_{1-bit}のセル空間を記述する為に、右方向への1ビット信号'1'を表す \blacktriangleright 、左方向への1ビット信号'1'を表す \blacktriangleleft を導入する。各セルが1ビット信号'1'を出力する場合、該当する状態の左右に \blacktriangleright もしくは \blacktriangleleft を記述する。また、1ビット信号'0'を出力する場合は記述を省略する。時刻 t 時に外界からセル C_1 に1ビット信号'1'が入力され、セル C_1 の内部状態が a であり左右に1ビット信号'1'を出力し、セル C_2 以降の全てのセルの内部状態が q の場合は以下の通り記述する。

$$t : \blacktriangleright \overbrace{\blacktriangleleft a \blacktriangleright}^{[1]} \overbrace{qq\dots}^{[2,\dots]}$$

2.4 マルチレイヤー・セルオートマトン (ML-CA)

1次元アレイ接続 ML-CA はセルと呼ばれる複数の内部状態を同時に保持可能である有限オートマトンにより構成される。セルの内部は複数の層に分かれており、各層ごとに1つの内部状態を保持する事が可能である。この層をレイヤーと呼ぶ。レイヤーにはそれぞれ番号が与えられており、その番号でレイヤーを識別する。 k を任意の自然数とする。 k 個のレイヤーを持つセルの場合、それぞれのレイヤーを L_1, L_2, \dots, L_k と呼ぶ。図 2.5 に k レイヤーを持つセルにより構成される ML-CA を示す。

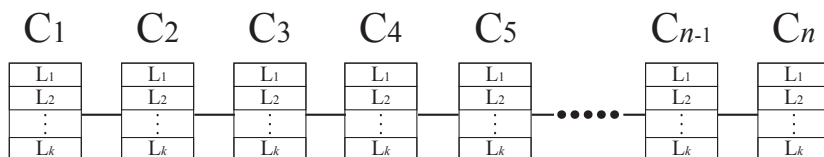


図 2.5 1次元アレイ接続マルチレイヤー・セルオートマトン (k レイヤーの場合)

A を ML-CA とする。 A を定式化すると以下の通りとなる。

$$A = (Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \delta)$$

Q_1 は L_1 で使用される内部状態の有限集合、 Q_2 は L_2 で使用される内部状態の有限集合、 \dots 、 Q_k は L_k で使用される内部状態の有限集合である。 δ は状態遷移関数である。 k 個のレイヤーを持つ A の状態遷移関数 δ は以下の様に定義される。

$$\delta: \overbrace{Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_k}^k \times \overbrace{Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_k}^k \times \overbrace{Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_k}^k \rightarrow \overbrace{Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_k}^k$$

この場合、状態遷移関数 $\delta(p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_k, r_1, r_2, \dots, r_k) = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ 、 $p_1, q_1, r_1, s_1 \in Q_1$ 、 $p_2, q_2, r_2, s_2 \in Q_2$ 、 \dots 、 $p_k, q_k, r_k, s_k \in Q_k$ は次の意味を持つ。

あるステップ t_0 時にセル C_i の L_1 の内部状態が q_1 、 L_2 の内部状態が q_2 、 \dots 、 L_k の内部状態 q_k であり、左側のセル C_{i-1} の L_1 の内部状態が p_1 、 L_2 の内部状態が p_2 、 \dots 、 L_k の内部状態 p_k であり、右側のセル C_{i+1} の L_1 の内部状態が r_1 、 L_2 の内部状態が r_2 、 \dots 、 L_k の内部状態 r_k の場合、次のステップ $t_0 + 1$ 時にセル C_i の L_1 の内部状態が s_1 、 L_2 の内部状態が s_2 、 \dots 、 L_k の内部状態が s_k に遷移する。図 2.6 参照。

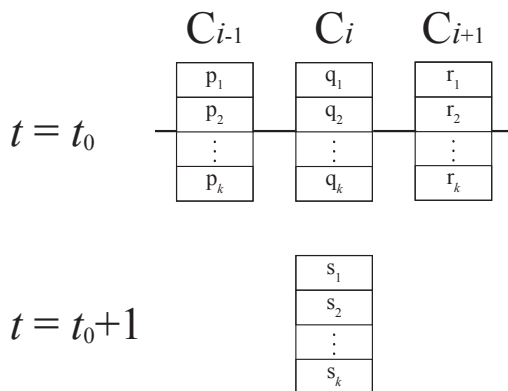


図 2.6 ML-CA のセルの遷移

また, ML-CA 上で設計したアルゴリズムは, CA 上のアルゴリズムへの変換が可能である. M を CA とし, $M = (Q, \delta)$, $Q = \phi$, $\delta = \phi$ とする. 図 2.7 に ML-CA 上のアルゴリズムから CA 上のアルゴリズムへの変換を示す.

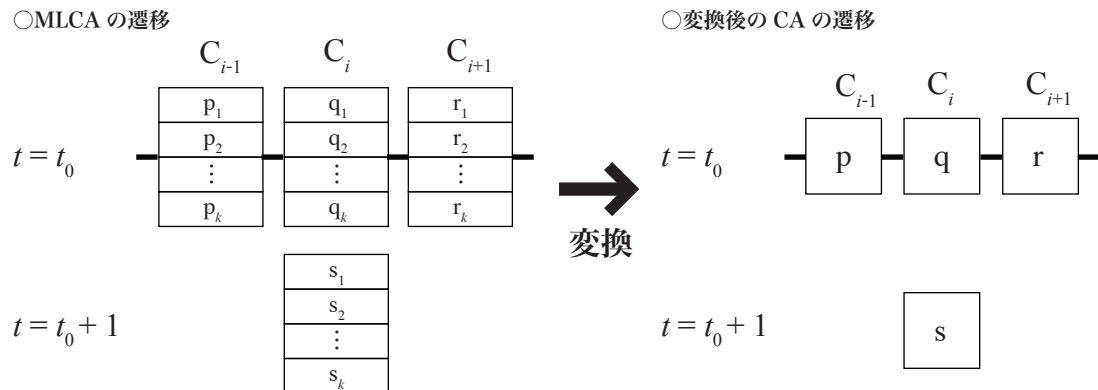


図 2.7 ML-CA \rightarrow CA 変換

ML-CA のセル C_i が図 2.7 に示す様に遷移を行なう場合, 時刻 $t = t_0$ 時のセル C_{i-1} の各レイヤーの状態の組み合わせを状態 p に, セル C_i の各レイヤーの状態の組み合わせを状態 q に, セル C_{i+1} の各レイヤーの状態の組み合わせを状態 r に, 時刻 $t = t_0 + 1$ 時のセル C_i の各レイヤーの状態の組み合わせを状態 s に割り当て, 状態 p, q, r, s を Q の要素とする. また, 遷移規則 $p q r \rightarrow s$ を定義し, δ の要素とする. この手順をシミュレーションを行なう全てのステップ, 全てのセルで行なうことで, ML-CA 上のアルゴリズムは, CA 上のアルゴリズムへ変換が行われる. 変換の手順を **Algorithm 1** に示す.

ML-CA でアルゴリズムを設計した後に, CA のアルゴリズムに変換することで, アルゴリズム設計を容易にし, 内部状態数, および入力する遷移規則数の削減が期待できる.

2.5 新たに提案するマルチレイヤー・セルオートマトンのモデル

本研究では, ML-CA のアルゴリズムの設計を容易にするため, 新しい ML-CA のモデルを提案する. 提案する ML-CA のモデルは次の様に定義される.

M を ML-CA とする. M を定式化すると以下の通りとなる.

$$M = (Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \\ P_{(1,2)}, P_{(1,3)}, \dots, P_{(1,k)}, P_{(2,1)}, P_{(2,3)}, \dots, P_{(2,k)}, \dots, \\ P_{(k,1)}, P_{(k,2)}, \dots, P_{(k,k-1)}, \\ -, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$$

Q_1 は L_1 で使用される内部状態の有限集合, Q_2 は L_2 で使用される内部状態の有限集合, \dots , Q_k は L_k で使用される内部状態の有限集合である. $P_{(1,2)}, P_{(1,3)}, \dots, P_{(1,k)}, P_{(2,1)}, P_{(2,3)}, \dots, P_{(2,k)}, \dots, P_{(k,1)}, P_{(k,2)}, \dots, P_{(k,k-1)}$ はアフェクト状態集合と呼ぶ内部状態の有限集合である. アフェクト状態集合は, あるレイヤーから別のレイヤーに影響を及ぼす事が可能な状態の集合であり, アフェクト状態集合によりレイヤー間の相互作用を記述する. i, j を任意の自然数とし, $i \leq k, j \leq k, i \neq j$ とする. アフェクト状態集合 $P_{(i,j)}$

Algorithm 1: ML-CA \Rightarrow CA 遷移規則変換**Input:** シミュレートする最大セル数 $maxcellnum$, ML-CA の内部状態集合, ML-CA の遷移規則集合**Output:** 変換後の CA の内部状態集合, 遷移規則集合

```

1  $i \leftarrow 2$ ;
2 CA の空の内部状態集合  $Q_s$  を作成;
3 CA の空の遷移規則集合  $\delta_s$  を作成;
4 while  $i \leq maxcellnum$  do
5    $maxstep \leftarrow$  シミュレーション最大ステップ;
6    $t \leftarrow 0$ ;
7   要素数  $i + 2$  の配列  $ms[]$  を作成し ML-CA の初期状態をセット;
   //  $ms[x]$  にはセル  $C_x$  の状態が格納される
   //  $ms[0]$ ,  $ms[i + 1]$  には壁状態がセットされる
8   while  $t \leq maxstep$  do
9     要素数  $i + 2$  の配列  $next[]$  を作成;
10     $next[0] \leftarrow \$$ ;
11     $next[i + 1] \leftarrow \$$ ;
12     $p \leftarrow 0$ ;
13    while  $p \leq i$  do
14      レイヤーごとに遷移規則を適用し, 次の時刻のセルの状態を  $next[p]$  にセット;
      // MLState2SLState : ML-CA のセルの状態の組み合わせを CA の状態に変換する関数
15       $sl \leftarrow MLState2SLState(ms[p - 1])$ ;
16       $sc \leftarrow MLState2SLState(ms[p])$ ;
17       $sr \leftarrow MLState2SLState(ms[p + 1])$ ;
18       $sn \leftarrow MLState2SLState(next[p])$ ;
19       $sl, sc, sr, sn$  を  $Q_s$  の要素とする (ただし既に存在した場合は何もしない);
20      CA の遷移規則  $\delta(sl, sc, sr) = sn$  を  $\delta_s$  の要素とする (ただし既に存在した場合は何もしない);
21       $p \leftarrow p + 1$ ;
22    end
23     $t \leftarrow t + 1$ ;
24  end
25   $i \leftarrow i + 1$ ;
26 end
27  $Q_s, \delta_s$  を出力;

```

は L_i から L_j に影響を及ぼすことが可能な内部状態の有限集合である。 $-$ は”入力なし”を表す特殊な状態であり、 $- \in P_{(1,2)}$, $- \in P_{(1,3)}$, \dots , $- \in P_{(1,k)}$, $- \in P_{(2,1)}$, $- \in P_{(2,3)}$, \dots , $- \in P_{(2,k)}$, \dots , $- \in P_{(k,1)}$, $- \in P_{(k,2)}$, \dots , $- \in P_{(k,k-1)}$ である。 δ_1 は L_1 で使用される状態遷移関数, δ_2 は L_1 で使用される状態遷移関数, \dots , δ_k は L_k で使用される状態遷移関数である。 k 個のレイヤーを持つ M の状態遷移関数 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ はそれぞれ以下の様に定義される。

$$\begin{aligned} \delta_1 : & \overbrace{Q_1 \times P_{(2,1)} \times P_{(3,1)} \times \dots \times P_{(k-1,1)} \times P_{(k,1)}}^k \times \overbrace{Q_1 \times P_{(2,1)} \times P_{(3,1)} \times \dots \times P_{(k-1,1)} \times P_{(k,1)}}^k \times \\ & \overbrace{Q_1 \times P_{(2,1)} \times P_{(3,1)} \times \dots \times P_{(k-1,1)} \times P_{(k,1)}}^k \rightarrow Q_1 \\ \delta_2 : & \overbrace{P_{(1,2)} \times Q_2 \times P_{(3,2)} \times \dots \times P_{(k-1,2)} \times P_{(k,2)}}^k \times \overbrace{P_{(1,2)} \times Q_2 \times P_{(3,2)} \times \dots \times P_{(k-1,2)} \times P_{(k,2)}}^k \times \\ & \overbrace{P_{(1,2)} \times Q_2 \times P_{(3,2)} \times \dots \times P_{(k-1,2)} \times P_{(k,2)}}^k \rightarrow Q_2 \\ & \vdots \\ \delta_k : & \overbrace{P_{(1,k)} \times P_{(2,k)} \times P_{(3,k)} \times \dots \times P_{(k-1,k)} \times Q_k}_k \times \overbrace{P_{(1,k)} \times P_{(2,k)} \times P_{(3,k)} \times \dots \times P_{(k-1,k)} \times Q_k}_k \times \\ & \overbrace{P_{(1,k)} \times P_{(2,k)} \times P_{(3,k)} \times \dots \times P_{(k-1,k)} \times Q_k}_k \rightarrow Q_k \end{aligned}$$

ある時刻 t_0 時にセル C_{i-1} , C_i , C_{i+1} が図 2.8 の状態を取り, $P_{(1,2)} = \{-\}$, $P_{(1,3)} = \{-\}$, \dots , $P_{(1,k)} = \{-\}$, $P_{(2,1)} = \{-\}$, $P_{(2,3)} = \{-\}$, \dots , $P_{(2,k)} = \{-\}$, \dots , $P_{(k,1)} = \{-\}$, $P_{(k,2)} = \{-\}$, \dots , $P_{(k,k-1)} = \{-\}$, すなわち, 全てのアフェクト状態集合の要素が $-$ のみの場合, L_1 では状態遷移関数 $\delta_1(p_1, -, \dots, -, q_1, -, \dots, -, r_1, -, \dots, -) = s_1$, L_2 では $\delta_2(-, p_2, \dots, -, -, q_2, \dots, -, -, r_2, \dots, -) = s_2$, \dots , L_k では $\delta_k(-, -, \dots, p_k, -, -, \dots, q_k, -, -, \dots, r_k) = s_k$ が適用され, 次の時刻 $t_0 + 1$ 時にセル C_i の L_1 の内部状態が s_1 , L_2 の内部状態が s_2 , \dots , L_k の内部状態が s_k に遷移する。このように, アフェクト状態集合の要素が $-$ のみの場合は, レイヤーは他のレイヤーの影響を受けず, 独立して遷移を行う。

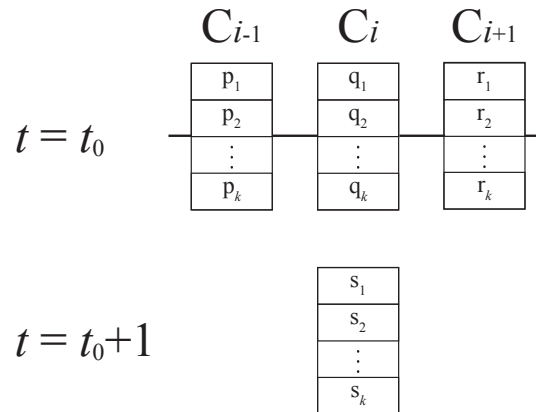


図 2.8 ML-CA のセルの遷移 (1)

次に $P_{(1,2)} = \{-, r_1\}$ であった場合は, L_1 から L_2 に影響を及ぼす状態として, r_1 が含まれるので, L_2 では $P_{(1,2)} = \{-\}$ の場合とは異なる遷移規則 $\delta_2(-, p_2, \dots, -, -, q_2, \dots, -, r_1, r_2, \dots, -) = u_2$ が実行され, L_2 の内部状態が u_2 に遷移する。図 2.9 参照。

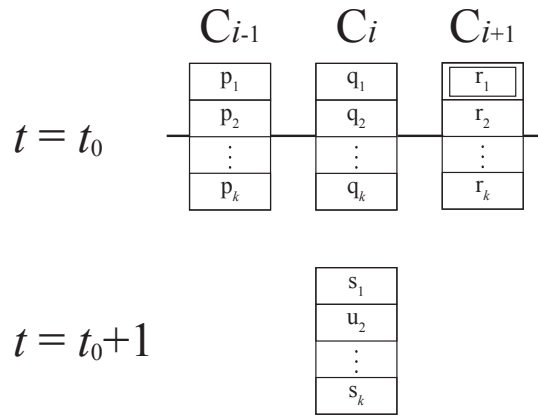


図 2.9 ML-CA のセルの遷移 (2)

新しい ML-CA のモデルでは、レイヤー毎に独立して遷移規則を適用させる事でレイヤーを独立に動作させ、アフェクト状態集合によってレイヤー間の相互作用を明示的に記述出来るという特徴を持つ。

2.6 セルアルゴリズムの設計

本節では、CA 上のアルゴリズムを設計する上で重要となる‘波’について説明し、波を用いたセルアルゴリズムの設計について述べる。

2.6.1 CA の波の伝播

M を 7 状態 CA とし、 $M = (Q, \delta)$ 、 $Q = \{q, a, b, c, d, e, r\}$ とし、表 2.1 に示す遷移規則集合を持つとする。

表 2.1 CA 上の波の生成のための状態遷移規則集合

q		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q	q			e	q	e	q	
	a	q							
	b	q							
	c								
	d								
	e								
	r								
⊘	q	a		a	q	a			

a		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q	b							
	a								
	b								
	c								
	d								
	e								
	r	b							
⊘			q				q		

b		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q								
	a	c							
	b								
	c								
	d	c							
	e								
	r	c							
⊘									

c		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q	r							
	a								
	b								
	c								
	d								
	e								
	r	r							
⊘	q								

d		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q		q					q	
	a								
	b								
	c								
	d								
	e								
	r								
⊘									

e		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q							r	
	a								
	b								
	c								
	d								
	e								
	r								
⊘									

r		Right State							
		q	a	b	c	d	e	r	⊘
Left State	q								
	a		d					d	
	b								
	c								
	d	d		d				d	
	e	r						r	
	r	r	r	r				r	
⊘									

表の最初の行(列)はそれぞれ、右(左)側に隣接するセルの状態を示す。表内のそれぞれのエントリーは 1 ステップ後のセルの内部状態を示す。 M は図 2.10 に示す初期計算状況をとると、図 2.11 に示す様に遷移を行なう。

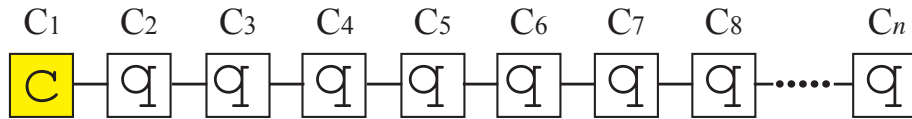


図 2.10 CA 上の波の生成のための初期計算状況

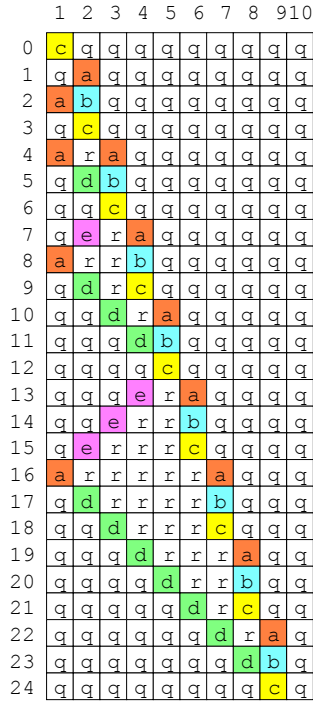


図 2.11 CA 上の波の伝播

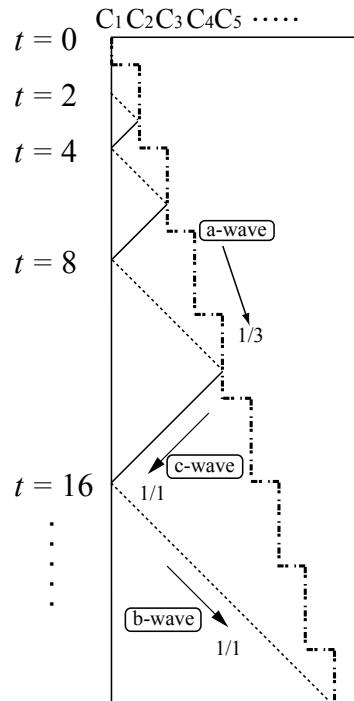


図 2.12 波の伝播を表す時間-空間図

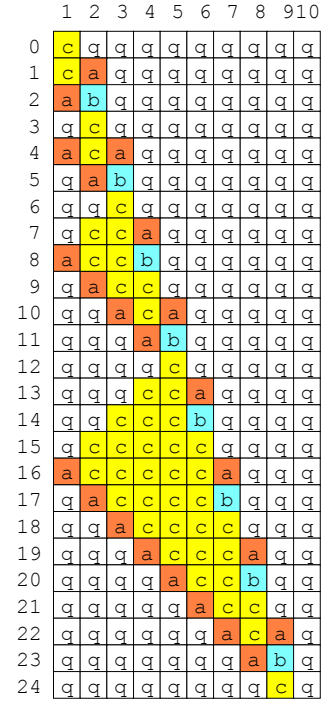


図 2.13 CA 上の波の伝播 (2)

図 2.11 の横軸はセル空間であり、左端から C_1, C_2, C_4, \dots , それぞれの内部状態を表す。縦軸は時間軸で、上端を時刻 $t = 0$ として、下方向に向かって時間の経過を表す。また、縦方向の数字は時刻を表す。

図 2.12 に、図 2.11 に対応する時間-空間図を示す。

時間-空間図とは横軸をセル空間、縦軸を時刻とし、時間の経過におけるセル空間の変化を表す図である。時間-空間図に示す線はセル空間上の状態の伝播であり、波と呼ぶ。図 2.12 の場合、a 波、b 波、c 波という 3 種類の波がセル空間状を伝播している。

時刻 $t = 0$ 時に、セル C_2 で $c q q \rightarrow a$ が適用され、次の時刻に内部状態が a に遷移する。時刻 $t = 1$ 時に C_2 で $q a q \rightarrow b$ が適用され、次の時刻に内部状態が b に遷移する。時刻 $t = 2$ 時に C_2 で $a b q \rightarrow c$ が適用され、次の時刻に内部状態が c に遷移する。時刻 $t = 3$ 時にセル C_3 で $c q q \rightarrow a$ が適用され、次の時刻に内部状態が a に遷移する。これらの遷移規則を連続して適用する事で、あるセルの内部状態が $a \rightarrow b \rightarrow c$ と遷移し、次の時刻に右隣のセルの内部状態が a となり、同様の遷移を繰り返す。これは、3 ステップにつき 1 セルだけ状態 a, b, c が伝播していると考えられる。この状態の a, b, c の伝播を a 波と呼ぶ。状態 a 波は、3 ステップにつき 1 セルだけ右方向に伝播しているため、速さ $1/3$ で右方向に進む。同様に、時刻 $t = 5$ にセル C_5 の内部状態が c をとると、遷移規則 $q q c \rightarrow e, q q e \rightarrow e$ により、状態 e が 1 ステップにつき 1 セルだけ左方向に伝播する。この状態 e の伝播を c 波と呼ぶ。c 波は左方向に進む速さ $1/1$ の波である。また、時刻 $t = 16$ にセル C_1 の内部状態が a をとり、遷移規則 $a r r \rightarrow d, d r r \rightarrow d$ により、右方向に 1 ステップにつき 1 セルだけ伝播している状態 d を b 波と呼ぶ。b 波は右方向に進む速さ $1/1$ の波である。

時刻 $t = 0$ 時にセル C_1 で生成された a 波は右方向に速さ $1/3$ で進む. 時刻 $t = 2$ 時にセル C_1 の内部状態が a をとり, 右方向に進む速さ $1/1$ の b 波が生成される. b 波は速さ $1/1$ でセル空間を右方向に進み, a 波に追いつき衝突する. 衝突後, a 波は右方向に進み続け, b 波は消滅し, 左方向に速さ $1/1$ で進む c 波が生成される. c 波はセル空間を左方向に進み, セル C_1 に到達する. c 波がセル C_1 に到達すると, c 波が消滅し, セル C_1 の内部状態が a に遷移し, 右方向に速さ $1/1$ で進む b 波が生成される. この様に, セル空間上を右方向に速さ $1/3$ で a 波を伝播させ, セル C_1 - a 波間を b 波, c 波を往復運動させることで, 時刻 $t = 2, 4, 8, 16, \dots, = 2^n$ 時にセル C_1 の内部状態が a をとる. この波の伝播は数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成するアルゴリズムを示す. 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムについては, 第3章で詳細を述べる.

この様に, CA 上で動作するアルゴリズムであるセルアルゴリズムは, 状態の伝播を波として表現し, 時間-空間図を用いて幾何学的に設計を行なう. 設計した時間-空間図を実現する CA の遷移規則集合を求めることで, セルアルゴリズムは完成する. また, 同じ時間-空間図を基にしたとしても, 遷移規則集合の実装の違いにより, 内部状態数, 遷移規則数などが異なるアルゴリズムが複数存在する場合がある. 図 2.11 に示す波の伝播は表 2.1 に示す遷移規則集合を持つ 7 状態 CA で図 2.12 に示す波の伝播を実現している. しかしながら, 7 状態より少ない状態数の CA であっても図 2.12 に示す波の伝播は可能である. A を 4 状態 CA とし, $A = (Q, \delta)$, $Q = \{q, a, b, c\}$ とし, 表 3.10 に示す遷移規則集合を持つとする. A は図 2.10 に示す初期計算状況をとると, 図 2.13 に示す様に遷移を行なう. この様に, 4 状態 CA であっても, 図 2.12 に示す波の伝播が可能である事がわかる.

表 2.2 4 状態 CA 上の状態遷移規則集合

q	Right State				
	q	a	b	c	⊘
q	q	q		c	q
a	q				
b	q				
c	a				
⊘	q	q	a		

a	Right State				
	q	a	b	c	⊘
q			q	q	
a					
b					
c	b				
⊘			b	q	

b	Right State				
	q	a	b	c	⊘
q					
a	c				
b					
c	c				
⊘					

c	Right State				
	q	a	b	c	⊘
q	c			c	
a		a		a	
b					
c	c	c	c	c	
⊘	c	a			

セルアルゴリズムは**計算時間**, **内部状態数**, **遷移規則数**, セルの内部状態が変化した回数である**状態変化回数**等を指標として評価される. 本研究では, **計算時間**, **内部状態数**をセルアルゴリズムの評価の指標として採用する. 下限となる**計算時間**を最適時間とし, **計算時間**が最適時間かつ, **内部状態数**が少ないセルアルゴリズムについて考察を行なう.

2.6.2 CA_{1-bit} の波の伝播

CA_{1-bit} 上のアルゴリズムの設計についても同様に, 波と時間-空間図を用いて幾何学的に行なう. しかしながら, CA_{1-bit} の場合, 状態の伝播ではなく, 1 ビット信号 '1' の伝播が波となる. M を 7 状態 CA_{1-bit} とし, $M = (Q, \delta)$, $Q = \{q, a, b, c, d, e, r\}$ とし, 表 2.3 に示す遷移規則集合を持つとする.

表の最初の行(列)はそれぞれ, 右(左)側に隣接するセルからの入力を示す. 表内のそれぞれのエントリーは 1 ステップ後のセルの内部状態および, 左右のセルに出力する 1 ビット信号を示す. M は図 2.14 に示す初期計算状況をとると, 図 2.12 に示す時間-空間図の通りに波の伝播が行われる. 図 2.15 参照.

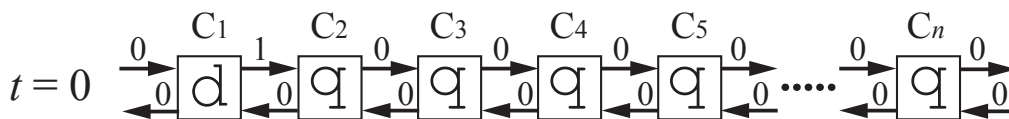


図 2.14 CA 上の波の生成のための初期計算状況

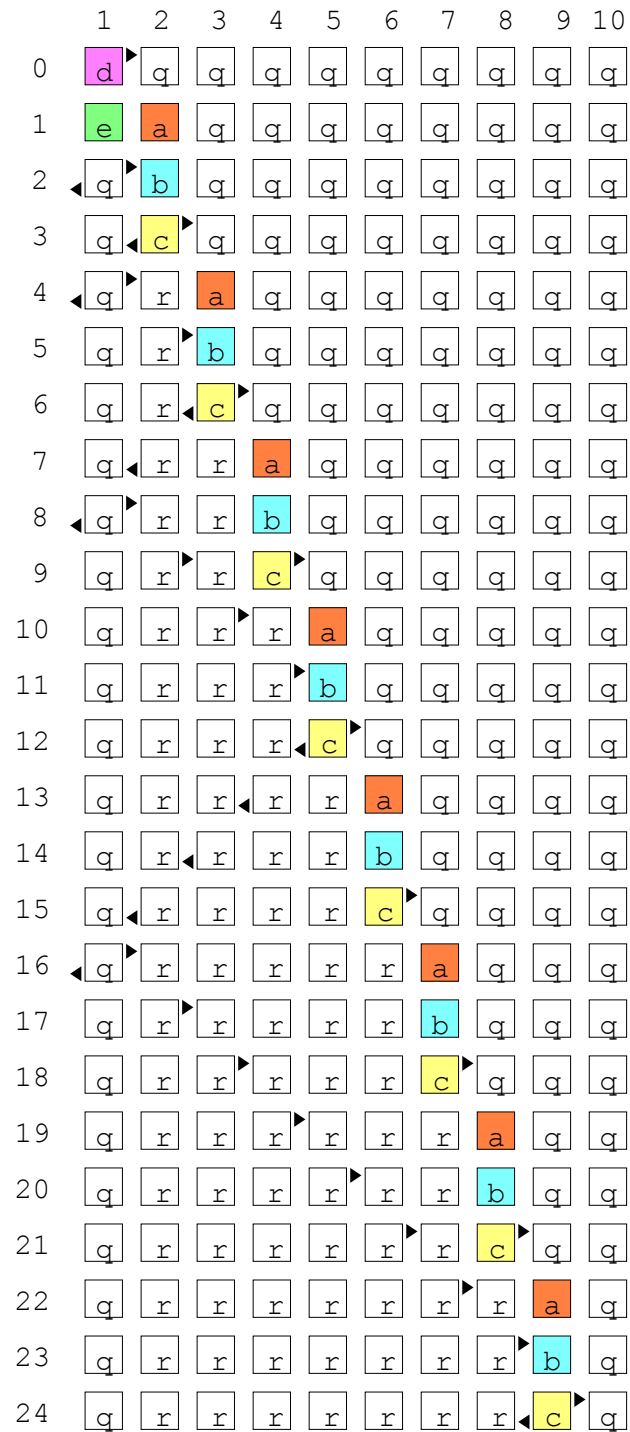
表 2.3 CA_{1-bit} 上の波の生成のための状態遷移規則集合

1	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(q, 0, 0)</td> <td>(q, 1, 1)</td> </tr> <tr> <th>1</th> <td>(a, 0, 0)</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(q, 0, 0)	(q, 1, 1)	1	(a, 0, 0)		2	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(b, 0, 0)</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1</th> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(b, 0, 0)		1			3	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(c, 0, 1)</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1</th> <td>(c, 1, 1)</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(c, 0, 1)		1	(c, 1, 1)	
				Right Input																																								
		0	1																																									
Left Input	0	(q, 0, 0)	(q, 1, 1)																																									
	1	(a, 0, 0)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Left Input	0	(b, 0, 0)																																										
	1																																											
		Right Input																																										
		0	1																																									
Left Input	0	(c, 0, 1)																																										
	1	(c, 1, 1)																																										
4	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(r, 0, 0)</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1</th> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(r, 0, 0)		1			5	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(e, 0, 0)</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1</th> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(e, 0, 0)		1			6	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(q, 1, 1)</td> <td></td> </tr> <tr> <th>1</th> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(q, 1, 1)		1		
				Right Input																																								
		0	1																																									
Left Input	0	(r, 0, 0)																																										
	1																																											
		Right Input																																										
		0	1																																									
Left Input	0	(e, 0, 0)																																										
	1																																											
		Right Input																																										
		0	1																																									
Left Input	0	(q, 1, 1)																																										
	1																																											
7	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2" rowspan="2"></th> <th colspan="2">Right Input</th> </tr> <tr> <th>0</th> <th>1</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th rowspan="2">Left Input</th> <th>0</th> <td>(r, 0, 0)</td> <td>(r, 1, 0)</td> </tr> <tr> <th>1</th> <td>(r, 0, 1)</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			Right Input		0	1	Left Input	0	(r, 0, 0)	(r, 1, 0)	1	(r, 0, 1)																															
				Right Input																																								
		0	1																																									
Left Input	0	(r, 0, 0)	(r, 1, 0)																																									
	1	(r, 0, 1)																																										

横軸、縦軸のとり方は図 2.11 に示す CA の遷移と同じであるが、CA と異なるのは図 2.15 内の '►', '◄' となる。► はセルが右方向への出力する 1 ビット信号 '1' であり、◄ はセルが左方向への出力する 1 ビット信号 '1' である。また、1 ビット信号 '0' については、省略して表示しない。図 2.15 を参照すると、セル空間上を 1 ビット信号 '1' が伝播している事が確認できる。時刻 $t = 0$ 時にセル C_1 が右方向に出力する 1 ビット信号 '1' を出力すると、遷移規則 $\delta(q, 1, 0) \rightarrow (a, 0, 0)$, $\delta(a, 0, 0) \rightarrow (b, 0, 0)$, $\delta(b, 0, 0) \rightarrow (c, 0, 1)$, $\delta(b, 1, 0) \rightarrow (c, 0, 1)$, $\delta(c, c, 0) \rightarrow (r, 0, 0)$ により、3 ステップにつき 1 セルだけ右方向に 1 ビット信号 '1' が伝播する。この 1 ビット信号 '1' が速さ 1/3 の a 波となる。同様に遷移規則 $\delta(r, 1, 0) \rightarrow (r, 0, 1)$ により、内部状態 r となるセル上を 1 ステップにつき 1 セルだけ右方向に 1 ビット信号 '1' が伝播する。この 1 ビット信号 '1' が速さ 1/1 の b 波となる。また、遷移規則 $\delta(r, 0, 1) \rightarrow (r, 1, 0)$ により、速さ 1/1 で左方向に伝播する 1 ビット信号 '1' を c 波と呼ぶ。

2.7 結言

本章では、並列計算モデルセルオートマトン (CA) について述べた。2.2 節では CA の定義について概説し、2.3 節ではセル間の通信量を 1 ビットに制限したセルオートマトンのモデルである 1 ビット・セルオートマトン (CA_{1-bit}) について、2.4 節、2.5 節では複数の内部状態を保持可能なセルで構成されるセルオートマトンのモデルであるマルチレイヤー・セルオートマトン (ML-CA) について述べた。また、セルオートマトン上のアルゴリズムであるセルアルゴリズムを設計する上で重要となる '波' と、波を用いたセルアルゴリズムの設計について概説した。

図 2.15 CA_{1-bit} 上の波の伝播

第 3 章

実時間数列生成問題

3.1 緒言

本章では, CA の研究課題の 1 つである, 実時間数列生成問題について考察を行なう. 3.2 節では, CA 上の数列生成問題について述べる. Wolfram [20], Shackleford et al. [21], Pazo-Roblesa and Fuster-Sabaterb [22] らは 2 状態の CA による乱数生成器について考察を行なった. これらの研究では, 1 次元の 2 状態 CA のパターンにより 2 進数を表現し, 時間経過により生成される乱数列について言及した. 一方, Fischer [4], 有沢 [5], 梅尾 [6], Korec [7, 8], Umeo, Miyamoto and Abe [9], Umeo and Kamikawa [23, 24] らは, 1 次元 CA の左端のセルの内部状態で数列を表現する形式で, CA 上の数列生成について考察を行った. Fischer [4] は CA 上の素数列の線形時間生成アルゴリズムを, 有沢 [5] は CA 上の素数列, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の線形時間生成アルゴリズムを, Korec [8] は素数列の実時間生成アルゴリズムを, 梅尾 [6] は数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを, Umeo, Miyamoto and Abe [9] は素数列の実時間生成アルゴリズムを明らかにした. これらの研究では, 特定の数列の生成アルゴリズムについて考察されているが, 3.2.1 項では CA の数列生成能力に着目し, 1 状態, および 2 状態の CA で生成できる数列を明らかにする. 3.2.3 項では有沢 [5] の数列生成アルゴリズムを発展させ, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを明らかにし, 梅尾 [6] が示した数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を改良し, より少ない内部状態数の CA で数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が実時間で生成可能であることを示す. また, 先行研究では考察されていない, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムの設計を行ない, 設計を行ったアルゴリズムを実現する全ての遷移規則集合の正当性について, 形式的に証明を行なう. これらの実時間生成アルゴリズムは計算時間について最適であり, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムは内部状態数について最適となる.

3.3 節では, セル間通信量を 1 ビットに制限した $CA_{1\text{-bit}}$ 上の数列生成問題について述べる. 3.3.1 項では 1 状態, および 2 状態の $CA_{1\text{-bit}}$ で生成できる数列のクラスを明らかにし, 1 状態, および 2 状態の CA と $CA_{1\text{-bit}}$ の数列生成能力の比較を行なう. 3.3.2 項では, CA 上で実現している Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成について, 同一時間で解決する $CA_{1\text{-bit}}$ 上の生成アルゴリズムが存在することを明らかにする.

3.2 CA 上の数列生成問題

M を右半無限となる 1 次元接続 CA とし, $M = (Q, \delta, a)$ とする. $\{y(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とすると, すべての n について, $s_1^{k \cdot y(n)} = a$, すなわち, $t = k \cdot y(n)$ 時のみにセル C_1 の内部状態が a を取ると, $k \cdot$ 線形時間で, 数列 $\{y(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う. 特に, $k = 1$ の時は実時間で数列 $\{y(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う.

3.2.1 数列生成能力

3.2.1.1 1 状態 CA で生成可能な数列

最初に, 1 状態 CA で生成可能な数列について考える. M を 1 状態 CA とし, $M = (Q, \delta, q)$, $Q = \{q\}$ とする. 遷移規則, $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$ により, 左端のセル C_1 は常に状態 q をとる. すなわち, 1 状態 CA で生成可能な数列は数列 $\{n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ のみとなる.

3.2.2 2 状態 CA で生成可能な数列

M を 2 状態 CA とし, $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a\}$ とする. M の時刻 $t = 0$ 時の状態, すなわち, 初期計算状況は図 3.1, 図 3.2 に示す, 2 通り存在する. 図 3.1 に示す初期計算状況は, 全てのセルの内部状態は静止状態 q をとり, $t = 0$ 時のみ状態 a が外界から C_1 の左側に入力される. 図 3.2 に示す初期計算状況は, セル C_1 以外の全てのセルの内部状態は静止状態 q をとり, セル C_1 のみ, 状態 a をとる.

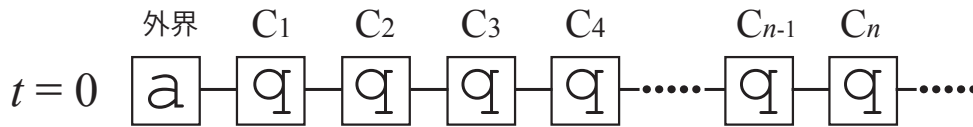


図 3.1 2 状態 CA の場合の初期計算状況 (1)

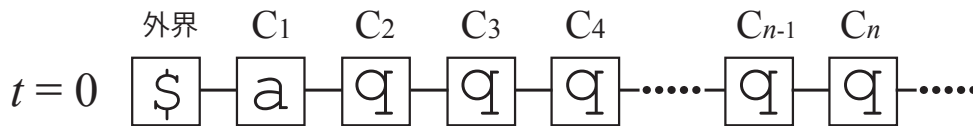


図 3.2 2 状態 CA の場合の初期計算状況 (2)

表 3.1 に 2 状態 CA の遷移規則表を示す. 表 3.1 中の d_i ($1 \leq i \leq 10$) には Q に属する内部状態が入る. また, 遷移規則 $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$ は予め定義されている. 表の最初の行 (列) はそれぞれ, 右 (左) 側に隣接するセルの状態を示す. 表内のそれぞれのエントリは 1 ステップ後のセルの内部状態を示す.

表 3.1 2 状態 CA の遷移規則表

		Right State	
		q	a
Left State	q	d_1	d_2
	a	d_3	d_4
	\$	d_5	d_6

		Right State	
		q	a
Left State	q	d_7	d_8
	a	d_9	d_{10}
	\$	d_5	d_6

次に, M がとりうる遷移規則集合の組み合わせについて考える. k を自然数とし, $k \geq 1$ とする. 状態遷移関数 δ はセル C_{k-1} , セル C_k , セル C_{k+1} の内部状態を入力とし, 1 ステップ後のセル C_k の内部状態を与える. $Q = \{q, a\}$ であるので, M のセル C_k は q, a の 2 つの状態をとりうる. 同様に右側のセル C_{k+1} も 2 つの状態をとりうる. 左側のセル C_{k-1} だけは特別に, 3 つの状態 $q, a, \$$ をとる. これは, $k = 1$ の場合, すなわちセル C_1 の左側にはセルは存在せず, 常に外界を表す $\$$ が入力されているからである. また, 静止状態 q については, $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$ をあらかじめ定義している. よって, δ の入力は $(2 \cdot 2 \cdot 3) - 2 = 10$ 通りとなる. 1 ステップ後に C_k がとりうる状態も q, a の 2 種類である. よって, 2 状態 CA のとりうる遷移規則集合は $2^{10} = 1,024$ 通りとなる. コンピュータを使用し, 1,024 通りの遷移規則集合に対してシミュレートを行い, 2 状態 CA が生成する数列を列挙する. 数列を列挙する手順を以下に示す.

Procedure

- Step 1.** 2 状態 CA がとりうる 1,024 個全ての遷移規則集合を列挙する。
- Step 2.** Step 1. で列挙した遷移規則集合に対して, 2 通りの初期計算状況で, 時刻 $t = 0 \sim 1000$ までシミュレートを行い数列を生成する. シミュレート時に使用した遷移規則に使用済みのマークを付ける。
- Step 3.** 時刻 $t = 0 \sim 1000$ の全ての時刻でセル C_1 の内部状態が静止状態 q となる遷移規則を取り除く。
- Step 4.** 全遷移規則集合をチェックして, 使用済みのマークがついていない (使用されていない) 遷移規則を取り除く。
- Step 5.** 再度, 全遷移規則集合をチェックして, 重複した遷移規則集合を取り除く。
-

2 状態 CA が生成する数列を調査した結果, 数列を生成可能である遷移規則集は 146 個となり, 78 種類の数列を生成可能であることが明らかになった. 表 3.2 に 146 個の遷移規則集合と, それぞれの遷移規則集合で生成される数列を示す. また, 78 種類の数列は, 表 3.3, 表 3.4, 表 3.5, 表 3.6, 表 3.7 に示す 5 つのクラスに分類することができる. 表 3.3 に 2 状態 CA で生成可能な 11 種類の有限数列を示す. 表 3.4 に 2 状態 CA で生成可能な 7 種類の線形数列を示す. 表 3.5 に 2 状態 CA で生成可能な 3 種類の非正則数列を示す. 表 3.6 に 2 状態 CA で生成可能な 21 種類の一般項で表すことができない数列を示す. 表 3.7 に 2 状態 CA で生成可能な 36 種類の複数の数列の和で表される数列を示す.

3.2.1.1 項より, 1 状態 CA で生成可能な数列は数列 $\{n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ のみである. よって, 表 3.2 に含まれる数列 $\{n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 以外の数列の生成アルゴリズムは生成時間および内部状態数について最適となる. 数列生成の例として, 図 3.3 に遷移規則集合 No.5, 初期計算状況 1 で生成される数列 $\{2^n - 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の, 図 3.4 に遷移規則集合 No.56, 初期計算状況 2 で生成される数列 $\{1\} \cup \{2^{n+2} - 4 | n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{2^{n+2} - 3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成シミュレーションの結果を示す. また, 付録 A に 146 個の遷移規則集合全てのシミュレーション結果を示す.

表 3.2: 146 個の遷移規則集合

Transition Rule No.	Next state										Sequence	
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	Initial Configuration 1	Initial Configuration 2
001	q	a	-	q	q	-	-	-	q	-	{1}	-
002	a	a	q	q	q	-	-	-	q	-	{1}	-
003	a	a	a	q	q	-	-	-	q	-	{1}	-
004	q	a	q	a	q	-	-	-	q	-	{1, 3}	{2}
005	a	a	q	a	q	-	-	-	q	-	$\{2^n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2^{n+1} - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
006	-	a	a	a	q	-	-	-	q	-	$\{2n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$
007	q	a	-	q	a	q	q	-	q	-	{1}	-
008	a	a	q	q	a	q	q	q	q	-	{1}	-
009	a	a	a	q	a	q	q	q	q	-	{1}	-
010	q	a	-	a	a	q	q	q	q	q	{1, 3}	{2}
011	a	a	q	a	a	q	q	q	q	q	$\{2^n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2^{n+1} - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
012	a	a	a	a	a	q	q	q	q	q	$\{1\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
013	-	a	q	q	a	a	q	-	q	-	{1}	-
014	q	a	a	q	a	a	q	q	q	-	{1}	-
015	a	a	a	q	a	a	q	q	q	-	{1}	-
016	q	a	q	a	a	a	q	q	q	q	{1, 3}	{2}
017	a	a	q	a	a	a	q	q	q	q	$\{1\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
018	q	a	a	a	a	a	q	q	q	q	{1, 3}	{2}
019	a	a	a	a	a	a	q	q	q	q	$\{1, 3\} \cup \{3n + 4 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2\} \cup \{3n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
020	q	a	-	q	a	q	a	-	q	-	{1}	-
021	a	a	q	q	a	q	a	q	q	-	{1}	-
022	a	a	a	q	a	q	a	-	q	-	{1}	-

table continued on next page

continued from previous page

Transition Rule No.	Next state										Sequence	
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	Initial Configuration 1	Initial Configuration 2
023	q	a	-	a	a	q	a	q	q	q	{1, 3}	{2}
024	a	a	q	a	a	q	a	q	q	q	{1, 3, 6, 8, 10, 12, 16, 19, 23, 25, 27, 30, 34, 36, 38, 42, ...}	{2, 5, 7, 9, 11, 15, 18, 22, 24, 26, 29, 33, 35, 37, 41, ...}
025	a	a	a	a	a	q	a	q	q	q	{1} ∪ {3n n = 1, 2, 3, ...}	{3n - 1 n = 1, 2, 3, ...}
026	-	a	q	q	a	a	a	q	q	-	{1}	-
027	q	a	a	q	a	a	a	q	q	-	{1}	-
028	a	a	a	q	a	a	a	q	q	-	{1}	-
029	q	a	q	a	a	a	a	q	q	q	{1, 3}	{2}
030	a	a	-	a	a	a	a	q	q	q	{1, 3} ∪ {2^{n+2} n = 1, 2, 3, ...} ∪ {2^{n+1} + 2 n = 1, 2, 3, ...}	{2} ∪ {2^{n+2} - 1 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {2^{n+1} + 1 n = 1, 2, 3, ...}
031	q	a	a	a	a	a	a	q	q	q	{1, 3}	{2}
032	a	a	q	q	a	q	q	a	q	-	{1}	-
033	a	a	a	q	a	q	q	a	q	-	{1}	-
034	q	a	q	a	a	q	q	a	q	q	{1, 3, 5}	{2, 4}
035	a	a	q	a	a	q	q	a	q	q	{1, 3, 5, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 27, 29, 35, 37, 43, 45, 47, ...}	{2, 4, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 26, 28, 34, 36, 42, 44, 46, ...}
036	-	a	a	a	a	q	q	a	q	q	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	{2n n = 1, 2, 3, ...}
037	-	a	a	q	a	a	q	a	q	-	{1}	-
038	q	a	q	a	a	q	a	q	q	q	{1, 3, 5}	{2, 4}
039	a	a	q	a	a	a	q	a	q	q	{3} ∪ {4n - 3 n = 1, 2, 3, ...}	{2} ∪ {4n n = 1, 2, 3, ...}
040	-	a	a	a	a	a	q	a	q	q	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	{2n n = 1, 2, 3, ...}
041	a	a	q	q	a	q	a	a	q	-	{1}	-
042	q	a	q	a	a	q	a	a	q	q	{1, 3, 5}	{2, 4}
043	a	a	q	a	a	q	a	a	q	q	{3} ∪ {4n - 3 n = 1, 2, 3, ...}	{2} ∪ {4n n = 1, 2, 3, ...}
044	-	a	a	a	a	q	a	a	q	q	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	{2n n = 1, 2, 3, ...}
045	-	a	-	q	a	a	a	a	q	-	{1}	-
046	-	a	-	a	a	a	a	a	q	q	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	{2n n = 1, 2, 3, ...}
047	-	q	-	-	-	-	-	-	a	-	-	{n n = 1, 2, 3, ...}
048	q	a	-	-	q	-	q	-	a	q	{1, 2}	{1}
049	a	a	q	q	q	-	q	-	a	q	{1, 2}	{1}
050	a	a	a	q	q	-	q	-	a	q	{1, 2}	{1}
051	a	a	q	a	q	-	q	-	a	q	{2^{n+1} - 3 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {2^{n+1} - 2 n = 1, 2, 3, ...}	{1} ∪ {2^{n+2} - 4 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {2^{n+2} - 3 n = 1, 2, 3, ...}
052	a	a	a	a	q	-	q	-	a	q	{4n - 3 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n - 2 n = 1, 2, 3, ...}	{1} ∪ {4n n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n + 1 n = 1, 2, 3, ...}
053	q	a	-	-	a	q	q	-	a	q	{1, 2}	{1}
054	a	a	q	q	a	q	q	q	a	q	{1, 2}	{1}
055	a	a	a	q	a	q	q	q	a	q	{1, 2}	{1}
056	a	a	q	a	a	q	q	q	a	q	{2^{n+1} - 3 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {2^{n+1} - 2 n = 1, 2, 3, ...}	{1} ∪ {2^{n+2} - 4 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {2^{n+2} - 3 n = 1, 2, 3, ...}
057	a	a	a	a	a	q	q	q	a	q	{4n - 3 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n - 2 n = 1, 2, 3, ...}	{1} ∪ {4n n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n + 1 n = 1, 2, 3, ...}
058	q	a	q	-	a	a	q	-	a	q	{1, 2}	{1}
059	a	a	q	q	a	a	q	q	a	q	{1, 2}	{1}
060	q	a	a	-	a	a	q	q	a	q	{1, 2}	{1}
061	a	a	a	q	a	a	q	q	a	q	{1, 2}	{1}
062	a	a	q	a	a	a	q	q	a	q	{1, 2, 5, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 35, 39, 43, 47, 51, 55, ...}	{1, 4, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 81, 85, 89, 93, 97} ∪ {4n + 96 n = 1, 2, 3, ...}
063	a	a	a	a	a	a	q	q	a	q	{1} ∪ {3n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	{3n - 2 n = 1, 2, 3, ...}
064	q	a	-	q	-	q	a	-	a	q	{1, 2}	{1}
065	a	a	q	q	q	q	a	-	a	q	{1, 2}	{1}
066	a	a	a	q	q	q	a	-	a	q	{1, 2}	{1}
067	q	a	q	a	-	q	a	-	a	q	{1} ∪ {4n - 2 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n + 1 n = 1, 2, 3, ...}	{4n - 3 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n - 1 n = 1, 2, 3, ...} ∪ {4n n = 1, 2, 3, ...}

table continued on next page

continued from previous page

Transition Rule No.	Next state										Sequence	
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	Initial Configuration 1	Initial Configuration 2
068	a	a	q	a	q	q	a	q	a	q	$\{1, 2\} \cup \{8n - 4 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{1\} \cup \{8n - 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 4 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
069	-	a	a	a	-	q	a	-	a	q	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
070	a	a	q	q	a	q	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
071	a	a	a	q	a	q	a	-	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
072	a	a	q	a	a	q	a	q	a	q	$\{1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 30, \dots\}$	$\{1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 29, 30, \dots\}$
073	q	a	q	q	q	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
074	a	a	q	q	q	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
075	q	a	a	q	q	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
076	a	a	a	q	q	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
077	q	a	q	a	q	a	a	q	a	q	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$
078	a	a	-	a	-	a	a	q	a	q	$\{2^{n-1} n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2^n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
079	q	a	a	a	q	a	a	q	a	q	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$
080	-	a	q	q	a	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
081	q	a	a	q	a	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
082	a	a	a	q	a	a	a	q	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
083	q	a	q	a	a	a	a	q	a	q	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$
084	q	a	a	a	a	a	a	q	a	q	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 3\}$
085	a	a	q	q	a	q	q	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
086	a	a	a	q	a	q	q	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
087	a	a	q	a	a	q	q	a	a	q	$\{1, 2, 5, 6, 7, 8\} \cup \{4n + 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 6 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, \dots\}$
088	a	a	a	a	a	q	q	a	a	q	$\{1, 2, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 30, \dots\}$	$\{1, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 29, 30, \dots\}$
089	a	a	q	q	a	a	q	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
090	q	a	a	-	a	a	q	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
091	a	a	a	q	a	a	q	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
092	a	a	q	a	a	a	q	a	a	q	$\{1, 2\} \cup \{2n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{1\} \cup \{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$
093	a	a	a	a	a	a	q	a	a	q	$\{1, 2\} \cup \{2n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{1\} \cup \{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$
094	a	a	q	a	-	q	a	a	a	q	$\{1\} \cup \{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$
095	a	a	q	q	a	q	a	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
096	-	a	-	q	-	a	a	a	a	q	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
097	-	a	-	a	-	a	a	a	a	q	$\{1\} \cup \{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
098	q	a	q	a	a	q	q	q	q	a	$\{1, 3, 4, 6, 7\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$
099	a	a	q	a	a	q	q	q	q	a	$\{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 18, 21, 22, 24, 25, 27, 28, \dots\}$	$\{2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, \dots\}$
100	q	a	a	a	a	q	q	q	q	a	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
101	a	a	a	a	a	q	q	q	q	a	$\{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 25, 27, \dots\}$	$\{8n - 6 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n n = 1, 2, 3, \dots\}$
102	q	a	q	a	a	a	q	q	q	a	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
103	a	a	q	a	a	a	q	q	q	a	$\{1, 3, 4\} \cup \{4n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, 30, 32, 33, 36, 37, 40, 41, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 60, 61, 64, 65, 68, 69, 72, 73, 76, 77\} \cup \{4n + 75 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 76 n = 1, 2, 3, \dots\}$
104	q	a	a	a	a	a	q	q	q	a	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
105	a	a	a	a	a	a	q	q	q	a	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$

table continued on next page

continued from previous page

Transition Rule No.	Next state										Sequence	
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	Initial Configuration 1	Initial Configuration 2
106	q	a	q	a	a	q	a	q	q	a	{1, 3, 4}	{2, 3}
107	a	a	q	a	a	q	a	q	q	a	{1, 3, 4, 8, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 31, 34, 35, ...}	{2, 3, 7, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 25, 30, 33, 34, 35, ...}
108	-	a	a	a	a	q	a	q	q	a	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
109	q	a	q	a	a	a	a	q	q	a	{1, 3, 4}	{2, 3}
110	a	a	q	a	a	a	a	q	q	a	$\{1\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
111	q	a	a	a	a	a	a	q	q	a	$\{1, 3, 4, 6, 7\} \cup \{3n + 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n + 7 n = 1, 2, 3, \dots\}$	{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, ...}
112	a	a	a	a	a	a	a	q	q	a	{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, ...}	{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, ...}
113	q	a	q	a	a	q	q	a	q	a	$\{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
114	a	a	q	a	a	q	q	a	q	a	{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, ...}	{2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 24, 26, ...}
115	-	a	a	a	a	q	q	a	q	a	{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ...}	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\} \setminus \{2^{n+1} - 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
116	q	a	q	a	a	a	q	a	q	a	$\{1, 3\} \cup \{3n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
117	a	a	q	a	a	a	q	a	q	a	$\{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
118	-	a	a	a	a	a	q	a	q	a	$\{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{2\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
119	-	a	-	a	a	-	a	a	q	a	$\{1\} \cup \{n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
120	q	a	q	-	q	-	q	-	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
121	a	a	q	-	q	q	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
122	-	a	a	-	q	-	q	-	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
123	q	a	q	-	a	q	q	-	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
124	a	a	q	-	a	q	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
125	q	a	a	-	a	q	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
126	a	a	a	-	a	q	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
127	a	a	q	-	q	a	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
128	-	a	q	-	a	a	q	-	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
129	q	a	a	-	a	a	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
130	a	a	a	-	a	a	q	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
131	q	a	q	-	-	q	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
132	a	a	q	-	q	q	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
133	-	a	a	-	-	q	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
134	a	a	q	-	a	q	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
135	q	a	q	-	q	a	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
136	a	a	q	-	q	a	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
137	q	a	a	-	q	a	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
138	a	a	a	-	-	a	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
139	-	a	q	-	a	a	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
140	q	a	a	-	a	a	a	q	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
141	a	a	q	-	q	q	q	a	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
142	a	a	q	-	a	q	q	a	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
143	-	a	a	-	a	q	q	a	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
144	a	a	q	-	q	a	q	a	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
145	-	a	a	-	a	a	q	a	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
146	-	a	-	-	-	-	a	a	a	a	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$

表 3.3: 2 状態 CA で生成される有限数列

Transition Rule No.		Sequence
Initial Configuration 1	Initial Configuration 2	
1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 26, 27, 28, 32, 33, 37, 41, 45	48, 49, 50, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 66, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 80, 81, 82, 85, 86, 89, 90, 91, 95, 96	{1}
4, 10, 16, 18, 23, 29, 31	77, 79, 83, 84	{1, 3}
–	4, 10, 16, 18, 23, 29, 31	{2}
34, 38, 42	–	{1, 3, 5}
–	34, 38, 42	{2, 4}
48, 49, 50, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 66, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 80, 81, 82, 85, 86, 89, 90, 91, 95, 96	–	{1, 2}
77, 79, 83, 84	–	{1, 2, 4}
98	–	{1, 3, 4, 6, 7}
–	98	{2, 3, 5, 6}
106, 109	–	{1, 3, 4}
–	106, 109	{2, 3}

表 3.4: 2 状態 CA で生成される線形数列

Transition Rule No.		Sequence
Initial Configuration 1	Initial Configuration 2	
6, 36, 40, 44, 46	97	$\{2n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	6, 36, 40, 44, 46	$\{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	6, 36, 40, 44, 46	$\{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	25	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146	47, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	63	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	119	$\{n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$

表 3.5: 2 状態 CA で生成される非正則数列

Transition Rule No.		Sequence
Initial Configuration 1	Initial Configuration 2	
5, 11	78	$\{2^n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	5, 11	$\{2^{n+1} - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
78	–	$\{2^{n-1} n = 1, 2, 3, \dots\}$

表 3.6: 2 状態 CA で生成される一般項で表す事ができない数列

Transition Rule No.		Sequence
Initial Configuration 1	Initial Configuration 2	
24	—	{1, 3, 6, 8, 10, 12, 16, 19, 23, 25, 27, 30, 34, 36, 38, 42, ...}
—	24	{2, 5, 7, 9, 11, 15, 18, 22, 24, 26, 29, 33, 35, 37, 41, ...}
35	—	{1, 3, 5, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 27, 29, 35, 37, 43, 45, 47, ...}
—	35	{2, 4, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 26, 28, 34, 36, 42, 44, 46, 48, ...}
62	—	{1, 2, 5, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 35, 39, 43, 47, 51, 55, ...}
72	—	{1, 2, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 30, ...}
—	72	{1, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 14, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 27, 29, 30, 32, ...}
—	87	{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 28, ...}
88	—	{1, 2, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 30, ...}
—	88	{1, 4, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 29, 30, ...}
99	—	{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 15, 17, 18, 21, 22, 24, 25, 27, 28, ...}
—	99	{2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 16, 17, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, ...}
101	—	{1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 25, 27, ...}
107	—	{1, 3, 4, 8, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 26, 31, 34, 35, ...}
—	107	{2, 3, 7, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 25, 30, 33, 34, 35, ...}
—	111	{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, ...}
112	—	{1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 24, ...}
—	112	{2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, ...}
114	—	{1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, ...}
—	114	{2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 24, 26, ...}
115	—	{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ...}

表 3.7: 2 状態 CA で生成される複数の数列の和で表される数列

Transition Rule No.		Sequence
Initial Configuration 1	Initial Configuration 2	
12, 17	—	$\{1\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
19	—	$\{1, 3\} \cup \{3n + 4 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	19	$\{2\} \cup \{3n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
25	—	$\{1\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
30	—	$\{1, 3\} \cup \{2^{n+2} n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{2^{n+1} + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	30	$\{2\} \cup \{2^{n+2} - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{2^{n+1} + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
39, 43	—	$\{3\} \cup \{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	39, 43	$\{2\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$
51, 56	—	$\{2^{n+1} - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{2^{n+1} - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	51, 56	$\{1\} \cup \{2^{n+2} - 4 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{2^{n+2} - 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
52, 57	—	$\{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	52, 57	$\{1\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	62	$\{1, 4, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 70, 74, 78, 81, 85, 89, 93, 97\} \cup \{4n + 96 n = 1, 2, 3, \dots\}$
63	—	$\{1\} \cup \{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
67, 94	—	$\{1\} \cup \{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
—	67, 94	$\{4n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$

table continued on next page

continued from previous page

Transition Rule No.		Sequence
Initial Configuration 1	Initial Configuration 2	
68	–	$\{1, 2\} \cup \{8n - 4 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	68	$\{1\} \cup \{8n - 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 4 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
69	–	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
100, 102, 104, 105, 108	69	$\{3n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
87	–	$\{1, 2, 5, 6, 7, 8\} \cup \{4n + 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 6 n = 1, 2, 3, \dots\}$
92, 93	–	$\{1, 2\} \cup \{2n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	92, 93	$\{1\} \cup \{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$
97	–	$\{1\} \cup \{2n n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	100, 102, 104, 105, 108	$\{3n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	101	$\{8n - 6 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 3 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{8n n = 1, 2, 3, \dots\}$
103	–	$\{1, 3, 4\} \cup \{4n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	103	$\{2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, 30, 32, 33, 36, 37, 40, 41, 44, 45, 48, 49, 52, 53, 56, 57, 60, 61, 64, 65, 68, 69, 72, 73, 76, 77\} \cup \{4n + 75 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 76 n = 1, 2, 3, \dots\}$
110	–	$\{1\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	110	$\{4n - 2 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
111	–	$\{1, 3, 4, 6, 7\} \cup \{3n + 5 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n + 7 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	113, 117, 118	$\{2\} \cup \{4n - 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{4n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	115	$\{n n = 1, 2, 3, \dots\} \setminus \{2^{n+1} - 3 n = 1, 2, 3, \dots\}$
116	–	$\{1, 3\} \cup \{3n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$
–	116	$\{2\} \cup \{3n n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{3n + 1 n = 1, 2, 3, \dots\}$
119	–	$\{1\} \cup \{n + 2 n = 1, 2, 3, \dots\}$

3.2.2.1 数列生成アルゴリズムの正当性について

前項では、2 状態 CA の 146 個の遷移規則集合から 78 種類の数列が生成される事を示したが、時刻 $t = 1000$ までの範囲でしか正当性を与えられていない。ここでは、数列 $\{2^n - 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の $t = 1001$ 以降も含めたアルゴリズムの正当性について述べる。数列 $\{2^n - 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムは表 3.8 に示す遷移規則表により実現する。

表 3.8 数列 $\{2^n - 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの遷移規則表

q		Right State	
		q	a
Left State	q	q	a
	a	a	q
	\$	q	a

a		Right State	
		q	a
Left State	q	q	–
	a	–	–
	\$	q	–

M を表 3.8 に示す遷移規則表を持つ 2 状態 CA とする。 M の $t = 0$ 時の状態、すなわち、初期計算状況は以下の通りとなる。

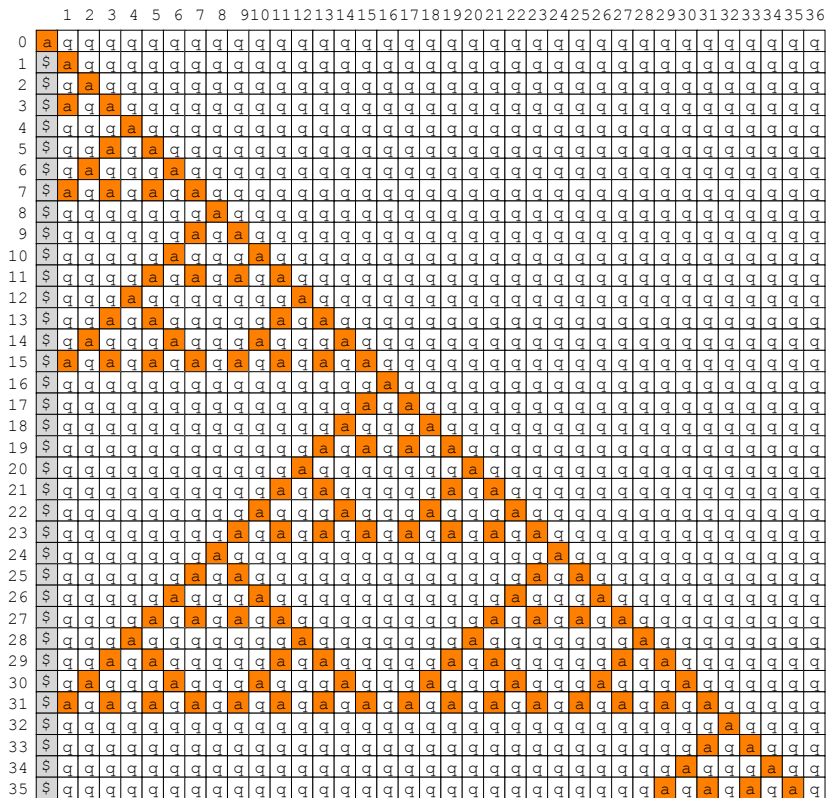


図3.3 数列 $\{2^n - 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

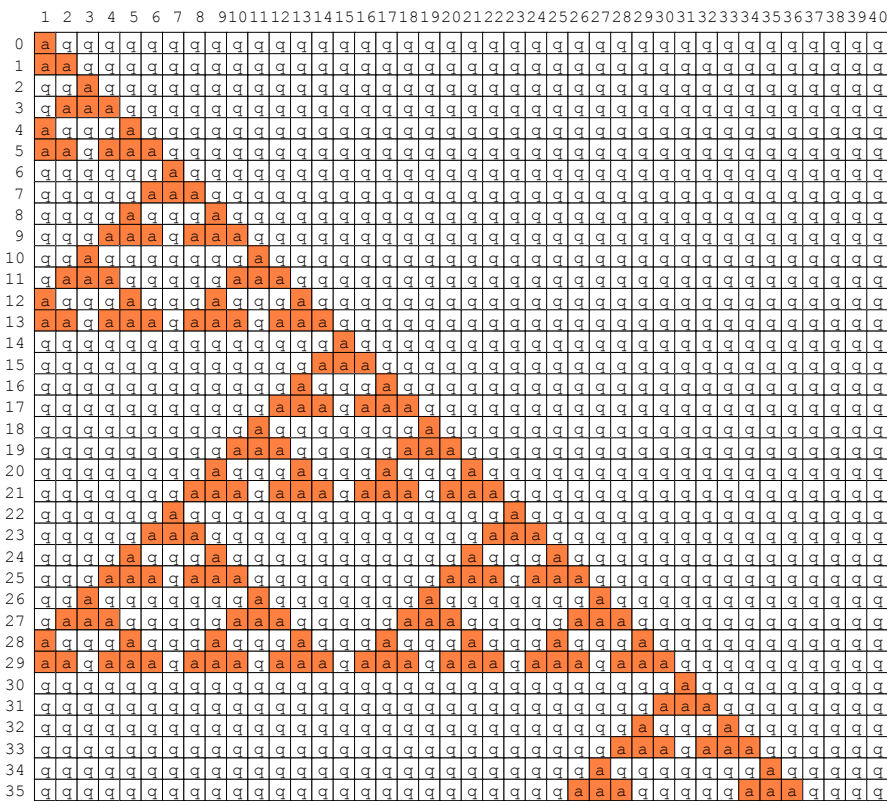


図3.4 数列 $\{1\} \cup \{2^{n+2} - 4 | n = 1, 2, 3, \dots\} \cup \{2^{n+2} - 3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

$$t = 0 : a \overbrace{q \dots}^{[1, \dots]}$$

セル列の左端の a は外界からの入力である. 時刻 $t = 1$ 時にセル C_1 以外の全てのセルの内部状態は遷移規則 $q \ q \ q \rightarrow q$ により, 静止状態 q を維持し, セル C_1 は $a \ q \ q \rightarrow a$ により a に遷移する. 以上より, 時刻 $t = 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 1 : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]}$$

時刻 $t = 2$ 時に C_1, C_2 以外の全てのセルの内部状態は遷移規則 $q \ q \ q \rightarrow q$ により, 静止状態 q を維持し, C_1 は $a \ q \rightarrow q$ により q に遷移し, C_2 は $a \ q \ q \rightarrow a$ により a に遷移する. 以上より, 時刻 $t = 2$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 2 : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{a}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

以上より, 次の補題を得る.

補題 3.2.1 遷移規則 $q \ q \ q \rightarrow q, a \ q \ q \rightarrow a, a \ q \rightarrow q, a \ q \ q \rightarrow a$ により, M は以下の様に遷移し, 時刻 $t = 1$ 時のみ C_1 の内部状態が a となる.

$$\begin{aligned} t = 0 & : a \overbrace{q \dots}^{[1, \dots]} \Rightarrow \\ t = 1 & : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]} \Rightarrow \\ t = 2 & : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{a}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]} \end{aligned}$$

次に, 時刻 $t = 2$ 以降の M の遷移を考える.

補題 3.2.2 x を任意の自然数とし, $x \geq 1$ とすると, 表 3.8 に示す遷移規則により, 時刻 $t = 2^x$ 時, 時刻 $t = 2 \cdot 2^x - 1$ 時, 時刻 $t = 2 \cdot 2^x$ 時に M は以下の状態をとる.

$$\begin{aligned} t = 2^x & : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2^x - 1]} \overbrace{a}^{[2^x]} \overbrace{q \dots}^{[2^x + 1, \dots]} \\ t = 2 \cdot 2^x - 1 & : \overbrace{a q a q \dots a}^{[1, 2 \cdot 2^x - 1]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^x, \dots]} \\ t = 2 \cdot 2^x & : \overbrace{q \dots q}^{[1, \dots, 2 \cdot 2^x - 1]} \overbrace{a}^{[2 \cdot 2^x]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^x + 1, \dots]} \end{aligned}$$

証明

(I) $x = 1$ の場合, M は $t = 2$ 時に以下の状態をとる.

$$t = 2 : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{a}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

表 3.8 に示す遷移規則により, M は $t = 2 : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{a}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$, $t = 3 : \overbrace{a q a}^{[1, 3]} \overbrace{q \dots}^{[4, \dots]}$, $t = 4 : \overbrace{q \dots q}^{[1, 3]} \overbrace{a}^{[4]} \overbrace{q \dots}^{[5, \dots]}$ の様に遷移する.

(II) k を任意の正整数とし, $k \geq 1$ とする. $x = k$ 場合, 時刻 $t = 2^k$ 時, 時刻 $t = 2 \cdot 2^k - 1$ 時, 時刻 $t = 2 \cdot 2^k$ 時に M は以下の状態を取ると仮定する.

$$\begin{aligned} t = 2^k & : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[2^k]} \overbrace{q, \dots}^{[2^k + 1, \dots]} \\ t = 2 \cdot 2^k - 1 & : \overbrace{aqaq \dots a}^{[1, 2 \cdot 2^k - 1]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k, \dots]} \\ t = 2 \cdot 2^k & : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2 \cdot 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[2 \cdot 2^k]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k + 1, \dots]} \end{aligned}$$

$x = k$ の場合の仮定により, 時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k - 1$ 時に M は以下の状態を取る.

$$t = 2 \cdot 2^k + 2^k - 1 : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2 \cdot 2^k - 2^k]} \overbrace{aqaq \dots a}^{[2 \cdot 2^k - 2^k + 1, 2 \cdot 2^k + 2^k - 1]} \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k + 2^k, \dots]}$$

次の時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k$ 時に M は以下の様に遷移する.

$$t = 2 \cdot 2^k + 2^k : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2 \cdot 2^k - 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[2 \cdot 2^k - 2^k]} \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k - 2^k + 1, 2 \cdot 2^k + 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[2 \cdot 2^k + 2^k]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k + 2^k + 1, \dots]}$$

$x = k$ の場合の仮定を, 部分空間

$$\overbrace{q \dots q}^{[1, 2 \cdot 2^k - 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[2 \cdot 2^k - 2^k]} \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k - 2^k + 1, 2 \cdot 2^k]} , \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k, 2 \cdot 2^k + 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[2 \cdot 2^k + 2^k]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k + 2^k + 1, \dots]}$$

にそれぞれ適用することにより, $2^k - 1$ ステップ後, 時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k + 2^k - 1 = 4 \cdot 2^k - 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 4 \cdot 2^k - 1 : \overbrace{aqaq \dots a}^{[1, 4 \cdot 2^k - 1]} \overbrace{q \dots}^{[4 \cdot 2^k, \dots]}$$

また, 次の時刻 $t = 4 \cdot 2^k$ 時に M は以下の状態を取る.

$$t = 4 \cdot 2^k : \overbrace{q \dots q}^{[1, 4 \cdot 2^k - 1]} \overbrace{a}^{[4 \cdot 2^k]} \overbrace{q \dots}^{[4 \cdot 2^k + 1, \dots]}$$

(I), (II) より, 全ての x の場合で補題 3.2.2 が成立する. \square

補題 3.2.1, 補題 3.2.2 より, 全ての n で時刻 $t = 2^n - 1$ 時にセル C_1 の内部状態は a となり, それ以外の時刻では状態は a をとらない. よって, 以下の定理を得る.

定理 3.2.3 数列 $\{2^n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.8 で示す遷移規則を持つ 2 状態 CA により実時間で生成可能である.

2 状態 CA で生成可能な数列のうち有限数列, 線形数列, 非正則数列, 複数の数列の和で表される数列については同様の方法で正当性を証明することが可能であるが, 一般項で表すことができない 21 種類の数列の正当性の証明については検討が必要である.

3.2.3 数列生成アルゴリズム

本項では、CA 上の数列生成アルゴリズムについて述べる。表 3.9 に先行研究と本研究で設計したアルゴリズムを示す。

表 3.9 本研究で設計した数列生成アルゴリズム

	先行研究			本研究		
	文献	内部状態数	生成時間	内部状態数	生成時間	備考
数列 $\{2^n n = 1, 2, 3, \dots\}$	有沢 [5]	7	2・線形時間	4 3	実時間 実時間	 内部状態数について最適
数列 $\{n^2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	有沢 [5]	9	2・線形時間	3	実時間	内部状態数について最適
Fibonacci 数列	有沢 [5]	9	2・線形時間	5	実時間	
数列 $\{n^2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	梅尾 [6]	7	実時間	3	実時間	内部状態数について最適
数列 $\{3^n n = 1, 2, 3, \dots\}$		-		3	実時間	内部状態数について最適
数列 $\{n^3 n = 1, 2, 3, \dots\}$		-		8	実時間	

有沢 [5] が明らかにした数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, Fibonacci 数列の生成アルゴリズムの生成時間は 2・線形時間である。これは、 $\{y(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する数列とした場合、 $y(n)$ を生成するのに $2 \cdot y(n)$ ステップ必要であることを示す。また、内部状態数についても考察されておらず、内部状態数の下限についても明らかにされていない。梅尾 [6] は有沢 [5] のアルゴリズムを改良し、生成時間が実時間となる数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムを設計した。しかしながら、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成を実現する内部状態数の下限については考察はされていない。本研究では、有沢 [5], 梅尾 [6] の数列生成アルゴリズムを改良し、有沢 [5], 梅尾 [6] の数列生成アルゴリズムよりも少ない内部状態数で数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, Fibonacci 数列の実時間生成を実現する遷移規則集合を明らかにする。数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムについては、有沢 [5] のアルゴリズムの改良した 4 状態 CA で実現するアルゴリズム、3.2.2.1 項で示した数列 $\{2^n - 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムを拡張した 3 状態 CA で実現するアルゴリズムの 2 種類が存在する。また、これまでの実時間数列生成問題では扱われていない数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムについても明らかにする。設計した数列生成アルゴリズムについては、遷移規則集合の正当性について形式的に証明を行なう。

本研究で設計した数列生成アルゴリズムでは、CA は図 3.5 に示す初期計算状況をとる。時刻 $t=0$ 時に、セル C_1 以外の全てのセルは静止状態 q をとり、セル C_1 の内部状態は静止状態 q 以外の Q に含まれる状態をとる。

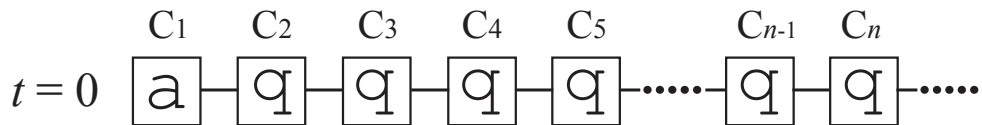


図 3.5 数列生成アルゴリズムの初期計算状況

3.2.3.1 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ (4 状態アルゴリズム)

本項では、有沢 [5] のアルゴリズムを改良し、4 状態 CA 上で動作する数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを実現する。M を 4 状態 CA とし、 $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a, b, c\}$ とする。数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.10 に示す状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$ により生成される。M の初期計算状況は以下の通りとなる。

$$t = 0: \underbrace{c}_{[1]} \underbrace{q \dots}_{[2, \dots]}$$

図 3.6 に数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成の為の時間-空間図を示す.

表 3.10 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$

q	Right State				
	q	a	b	c	
Left State	q	q	q		c
	a	q			
	b	q			
	c	a			
	\$	q	q		a

a	Right State				
	q	a	b	c	
Left State	q			q	q
	a				
	b				
	c	b			
	\$			q	q

b	Right State				
	q	a	b	c	
Left State	q				
	a	c			
	b				
	c	c			
	\$				

c	Right State				
	q	a	b	c	
Left State	q	c			c
	a		a		a
	b				
	c	c	c	c	c
	\$	c	a		

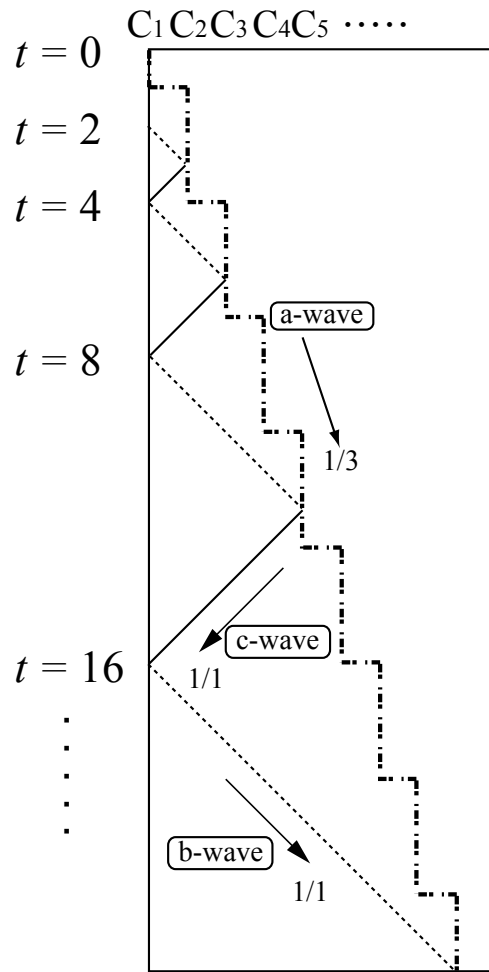


図 3.6 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図

図 3.6 に示す数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図は、有沢 [5] で示されている数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図を基に、数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成が可能となるように改良されている.

数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成には 3 種類の波, a 波, b 波, c 波を用いる. 図 3.6 参照.

時刻 $t = 0$ 時に, セル C_1 上で a 波が生成され, $1/3$ の速さで右方向に進む. 時刻 $t = 2$ 時に, セル C_1 の内部状態が a に遷移し, セル C_1 上で b 波が生成され, $1/1$ の速さで右方向に進む. b 波がセル空間上を右方向に進

み, a 波と衝突する. この時, a 波は右方向に進み続け, b 波は消滅し, 衝突したセル上で c 波が生成され, 1/1 の速さで左方向に進む. 時刻 $t = 4$ 時, c 波がセル C_1 に到達すると, c 波が消滅し, b 波が生成され, セル C_1 の内部状態が a に遷移する. このように, b 波, c 波をセル C_1 と a 波間を往復運動させ, c 波がセル C_1 に到達した時刻にセル C_1 の内部状態が a に遷移する. セル C_1 の内部状態が a となる時刻は, $t = 2, 4, 8, \dots, 2^n$ 時となる.

次に, 状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$ の正当性について考える.

補題 3.2.4 i を任意の自然数とし, $i \geq 1$ とした場合, 時刻 $t = 2^i + 2^{i-1}$ 時に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2^i + 2^{i-1} : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2^{i-1}]} \overbrace{c}^{[2^{i-1}+1]} \overbrace{q \dots}^{[2^{i-1}+2, \dots]}$$

証明

(I) 最初に, $i = 1$ の場合を考える. 時刻 $t = 0$ 時, M は以下に示す初期状態を取る.

$$t = 0 : \overbrace{c}^{[1]} \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]}$$

時刻 $t = 0$ 時, C_1 は $c q \rightarrow c$ により c に遷移し, C_2 は $c q q \rightarrow a$ により a に遷移し, C_1, C_2 以外のセルでは $q q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. 時刻 $t = 1$ 時, M は以下に示す状態をとる.

$$t = 1 : \overbrace{c}^{[1]} \overbrace{a}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

時刻 $t = 1$ 時, C_1 は $c a \rightarrow a$ により a に遷移し, C_2 は $c a q \rightarrow b$ により b に遷移し, C_3 は $a q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. C_1, C_2, C_3 以外のセルでは $q q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. 時刻 $t = 2$ 時, M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2 : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{b}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

時刻 $t = 2$ 時に, C_1 の内部状態は状態 a をとる. 時刻 $t = 2$ 時, C_1 は $a b \rightarrow q$ により q に遷移し, C_2 は $a b q \rightarrow c$ により c に遷移し, C_3 は $b q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. C_1, C_2, C_3 以外のセルでは $q q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. 時刻 $t = 3$ 時, M は以下に示す状態をとる.

$$t = 3 : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{c}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

$t = 0, t = 1, t = 2$ 時に使用した遷移規則の集合を遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$ の部分集合 \mathcal{R}_1 とする. \mathcal{R}_1 は表 3.11 に示す通りとなる.

表 3.11 部分集合 \mathcal{R}_1

$\$ c q \rightarrow c;$	$c a q \rightarrow b;$	$q q q \rightarrow q;$
$\$ c a \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$	$a q q \rightarrow q;$
$\$ a b \rightarrow q;$	$a b q \rightarrow c;$	$b q q \rightarrow q;$

(II) j を任意の自然数とし, $j \geq 1$ とする. $i = j$ の場合, 時刻 $t = 2^j + 2^{j-1}$ 時に, M が以下に示す状態を取ると仮定する.

$$t = 2^j + 2^{j-1} : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2^{j-1}]} \overbrace{c}^{[2^{j-1}+1]} \overbrace{q \dots}^{[2^{j-1}+2, \dots]}$$

表 3.12 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$ の部分集合 \mathcal{R}_2 により, M が以下の様に遷移する.

$$\begin{aligned}
t = 2^j + 2^{j-1} & : \underbrace{[1, 2^{j-1}] \text{ q} \dots \text{q}}_{\text{q} \dots \text{q}} \underbrace{[2^{j-1}+1] \text{ c}}_{\text{c}} \underbrace{[2^{j-1}+2, \dots]}_{\text{q} \dots} \\
t = 2^j + 2^{j-1} + 1 & : \underbrace{[1, 2^{j-1}-1] \text{ q} \dots \text{q}}_{\text{q} \dots \text{q}} \underbrace{[2^{j-1}, 2^{j-1}+1] \text{ cc}}_{\text{cc}} \underbrace{[2^{j-1}+2] \text{ a}}_{\text{a}} \underbrace{[2^{j-1}+3, \dots]}_{\text{q} \dots} \\
t = 2^j + 2^{j-1} + 2 & : \underbrace{[1, 2^{j-1}-2] \text{ q} \dots \text{q}}_{\text{q} \dots \text{q}} \underbrace{[2^{j-1}-1, 2^{j-1}+1] \text{ c} \dots \text{c}}_{\text{c} \dots \text{c}} \underbrace{[2^{j-1}+2] \text{ b}}_{\text{b}} \underbrace{[2^{j-1}+3, \dots]}_{\text{q} \dots} \\
t = 2^j + 2^{j-1} + 3 & : \underbrace{[1, 2^{j-1}-3] \text{ q} \dots \text{q}}_{\text{q} \dots \text{q}} \underbrace{[2^{j-1}-2, 2^{j-1}+2] \text{ c} \dots \text{c}}_{\text{c} \dots \text{c}} \underbrace{[2^{j-1}+3, \dots]}_{\text{q} \dots} \\
t = 2^j + 2^{j-1} + 4 & : \underbrace{[1, 2^{j-1}-4] \text{ q} \dots \text{q}}_{\text{q} \dots \text{q}} \underbrace{[2^{j-1}-3, 2^{j-1}+2] \text{ c} \dots \text{c}}_{\text{c} \dots \text{c}} \underbrace{[2^{j-1}+3] \text{ a}}_{\text{a}} \underbrace{[2^{j-1}+4, \dots]}_{\text{q} \dots}
\end{aligned}$$

表 3.12 部分集合 \mathcal{R}_2

q c q \rightarrow c;	q c c \rightarrow c;	\$ q q \rightarrow q;
\$ q c \rightarrow a;	q q q \rightarrow q;	q q c \rightarrow c;
a q q \rightarrow q;	b q q \rightarrow q;	c c q \rightarrow c;
c c a \rightarrow c;	c c b \rightarrow c;	c c c \rightarrow c;
c b q \rightarrow c;	c a q \rightarrow b;	c q q \rightarrow a;

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 c の事を c 波と呼ぶ. c 波は 1 ステップにつき 1 セルだけ進むので, 速さは $1/1$ である. c 波が通過したセルは, 状態 c を維持し続ける. 状態 a, b, c は 3 ステップにつき 1 セル, 右方向に進む. この状態 a, b, c の伝播を a 波と呼ぶ. N を自然数の集合とし, $P_a(t) : N \cup \{0\} \rightarrow N$ を時刻 t 時に a 波の存在するセルの位置を表す関数とすると, $P_a(t) = \lceil \frac{t}{3} \rceil + 1, t \geq 0$ となる. よって, 時刻 t 時に a 波はセル $C_{P_a(t)}$ 上に存在する. その時のセル $C_{P_a(t)}$ の内部状態 $S_{P_a(t)}^t$ は以下の通りとなる.

$$S_{P_a(t)}^t = \begin{cases} a & t \bmod 3 = 1 \\ b & t \bmod 3 = 2 \\ c & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

よって, $S_a(t) : N \cup \{0\} \rightarrow \{a, b, c\}$ を時刻 t 時の a 波が存在するセルの内部状態を表す関数とすると, $S_a(t)$ は以下の通りとなる.

$$S_a(t) = \begin{cases} a & t \bmod 3 = 1 \\ b & t \bmod 3 = 2 \\ c & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

a 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で, c 波は左方向に速さ $1/1$ で進み続け, a 波, b 波の通過したセルの内部状態は c を維持し続ける. c 波の速さは $1/1$ であるので, セル $C_{2^{j-1}+1}$ で生成された c 波がセル C_1 に到達するには $(2^{j-1} + 1) - 1 = 2^{j-1}$ ステップ必要である. よって, c 波がセル C_1 に到達した際, すなわち時刻 $t = 2^j + 2^{j-1} + 2^{j-1} = 2^{j+1}$ 時に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2^{j+1} : \underbrace{[1] \text{ a}}_{\text{a}} \underbrace{[2, P_a(2^{j+1})-1] \text{ c} \dots \text{c}}_{\text{c} \dots \text{c}} \underbrace{[P_a(2^{j+1})] S_a(2^{j+1})}_{S_a(2^{j+1})} \underbrace{[P_a(2^{j+1})+1, \dots]}_{\text{q} \dots}$$

時刻 $t = 2^{j+1}$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移する. 時刻 $t = 2^{j+1}$ 以降は, 表 3.13 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$ の部分集合 \mathcal{R}_3 が用いられる. \mathcal{R}_3 により, M が以下の様に遷移する.

表 3.13 部分集合 \mathcal{R}_3

$\$ a c \rightarrow q;$	$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q a \rightarrow q;$
$q a b \rightarrow q;$	$q a c \rightarrow q;$	$q q q \rightarrow q;$
$q q a \rightarrow q;$	$a c a \rightarrow a;$	$a c c \rightarrow a;$
$a b q \rightarrow c;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$
$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$	$c c b \rightarrow c;$
$c c c \rightarrow c;$	$c b q \rightarrow c;$	$c a q \rightarrow b;$
$c q q \rightarrow a;$		

$$\begin{aligned}
 t = 2^{j+1} & : \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, P_a(2^{j+1})-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1})]}_{S_a(2^{j+1})} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1})+1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = 2^{j+1} + 1 & : \underbrace{[1]}_q \quad \underbrace{[2]}_a \quad \underbrace{[3, P_a(2^{j+1}+1)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1}+1)]}_{S_a(2^{j+1}+1)} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1}+1)+1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = 2^{j+1} + 2 & : \underbrace{[1,2]}_{qq} \quad \underbrace{[3]}_a \quad \underbrace{[4, P_a(2^{j+1}+2)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1}+2)]}_{S_a(2^{j+1}+2)} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1}+2)+1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = 2^{j+1} + 3 & : \underbrace{[1,3]}_{q \dots q} \quad \underbrace{[4]}_a \quad \underbrace{[5, P_a(2^{j+1}+3)-1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1}+3)]}_{S_a(2^{j+1}+3)} \quad \underbrace{[P_a(2^{j+1}+3)+1, \dots]}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 右方向に伝播している状態 a の事を b 波と呼ぶ. b 波が通過したセルは, 状態 q を維持し続ける. b 波はセル空間を右方向に速さ 1/1 で進み, a 波に追いつき衝突する. p の自然数とし, 図 3.7 に示す様に, 時刻 $t = 2^{j+1} + p$ 時に a 波と b 波がセル $C_{P_a(2^{j+1}+p)}$ で衝突したとする.

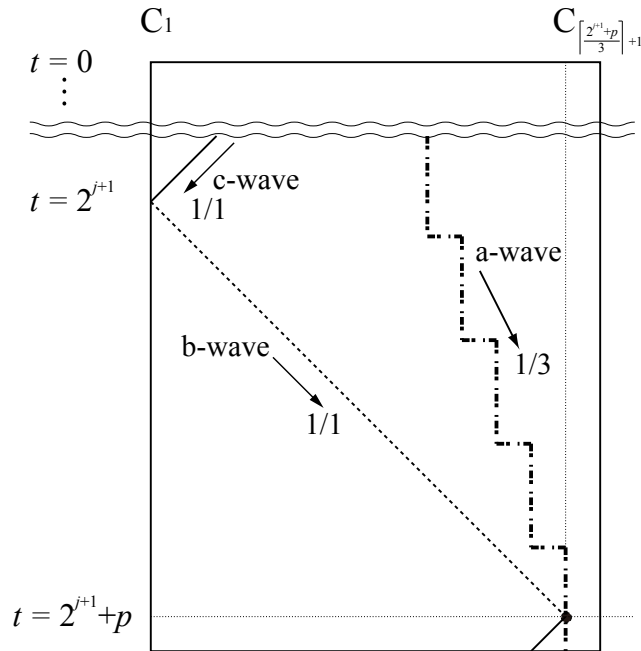


図 3.7 a 波と b 波の衝突

時刻 $t = 2^{j+1}$ 時にセル C_1 で生成された b 波は速さ 1/1 であるので, $t = 2^{j+1} + p$ 時にはセル C_{p+1} 上に存在する. よって, $P_a(2^{j+1} + p) = p + 1$ となり, $p = 2^j$ となる. 以上より, a 波と b 波は時刻 $t = 2^{j+1} + 2^j$ 時にセル $C_{2^{j+1}}$ で衝突することが示される. 時刻 $t = 2^{j+1} + 2^j$ 時, M は以下に示す状態を取る.

$$t = 2^{j+1} + 2^j : \underbrace{q \dots q}_{[1, 2^j]} \underbrace{c}_{[2^j+1]} \underbrace{q \dots}_{[2^j+2, \dots]}$$

(I), (II) より, 補題 3.2.4 が証明される. □

補題 3.2.4 より, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 2^n$ 時に状態 a をとる. 以上より以下の定理を得る.

定理 3.2.5 表 3.10 で与える遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(4State)}$ により, 4 状態 CA 上で数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する事ができる.

コンピュータ上に表 3.10 に示す遷移規則集合を実装し, $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い, 正当性を確認した. 図 3.8 に時刻 $t = 0 \sim 70$ のシミュレーション結果を示す.

3.2.3.2 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ (3 状態アルゴリズム)

数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムは, 3.2.2.1 項で証明した数列 $\{2^n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムを拡張して実現する. M を 3 状態 CA とし, $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a, b\}$ とする. 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.14 に示す状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{2^n} により生成される. 図 3.9 に時刻 $t = 0 \sim 30$ の数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成を示す.

表 3.14 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{2^n}

q		Right State			a		Right State			b		Right State			
		q	a	b			q	a	b			q	a	b	
Left State	q	q		b	Left State	q				Left State	q	q			
	a	q		b		a					a				
	b	b		q		b					b				
	\$	q		a		\$	q				\$	b			

補題 3.2.6 i を任意の自然数 ($i \geq 1$) とした場合, M は $t = 2^i$, $t = 2 \cdot 2^i - 1$, $t = 2 \cdot 2^i$ 時にそれぞれ以下の状態をとる.

$$\begin{aligned}
 t = 2^i & : \underbrace{a}_{[1]} \underbrace{q \dots q}_{[2, 2^i]} \underbrace{b}_{[2^i+1]} \underbrace{q \dots}_{[2^i+2, \dots]} \\
 t = 2 \cdot 2^i - 1 & : \underbrace{q}_{[1]} \underbrace{bqbq \dots qb}_{[2, 2 \cdot 2^i]} \underbrace{q \dots}_{[2 \cdot 2^i+1, \dots]} \\
 t = 2 \cdot 2^i & : \underbrace{a}_{[1]} \underbrace{q \dots q}_{[2, 2 \cdot 2^i]} \underbrace{b}_{[2 \cdot 2^i+1]} \underbrace{q \dots}_{[2 \cdot 2^i+2, \dots]}
 \end{aligned}$$

証明

(I) $t = 0$ 時, M は以下の初期計算状況をとる.

$$t = 0 : \underbrace{b}_{[1]} \underbrace{q \dots}_{[2, \dots]}$$

表 3.15 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_{2^n} の部分集合 \mathcal{R}_1 により, M が以下の様に遷移する.

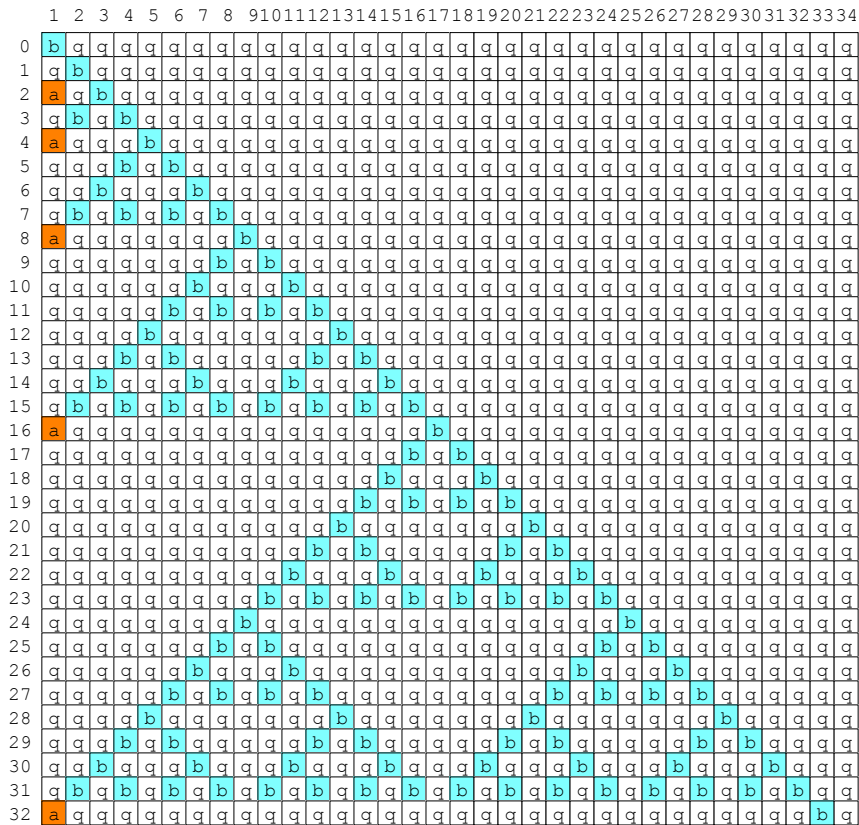


図 3.9 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

表 3.15 部分集合 \mathcal{R}_1

$\$ b q \rightarrow q; \quad b q q \rightarrow b; \quad q q q \rightarrow q;$ $\$ q b \rightarrow a; \quad q b q \rightarrow q; \quad \$ a q \rightarrow q;$ $a q b \rightarrow b; \quad b q b \rightarrow q;$
--

$$\begin{aligned}
 t = 0 & : \overbrace{b}^{[1]} \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 1 & : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{b}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 2 & : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q}^{[2]} \overbrace{b}^{[3]} \overbrace{q \dots}^{[4, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 3 & : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{b}^{[2]} \overbrace{q}^{[3]} \overbrace{b}^{[4]} \overbrace{q \dots}^{[5, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 4 & : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 4]} \overbrace{b}^{[5]} \overbrace{q \dots}^{[6, \dots]}
 \end{aligned}$$

以上より, $i = 1$ の場合は成立する.

(II) k を任意の正整数とし, $k \geq 1$ とする. $i = k$ の場合, M は $t = 2^k, t = 2 \cdot 2^k - 1, t = 2 \cdot 2^k$ 時にそれぞれ以下の状態をとると仮定する.

$$\begin{aligned}
 t = 2^k & : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, 2^k]}_{q \dots q} \underbrace{[2^k+1]}_b \underbrace{[2^k+2, \dots]}_{q \dots} \\
 t = 2 \cdot 2^k - 1 & : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2, 2 \cdot 2^k]}_{bqbq \dots qb} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = 2 \cdot 2^k & : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, 2 \cdot 2^k]}_{q \dots q} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1]}_b \underbrace{[2 \cdot 2^k+2, \dots]}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

$i = k$ の場合の仮定により, 時刻 $t = 2^{k+1} + 2^k - 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot 2^k + 2^k - 1 : \underbrace{[1, 2 \cdot 2^k+1-2^k]}_{q \dots q} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1-2^k+1, 2 \cdot 2^k+1+2^k-1]}_{bqbq \dots qb} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1+2^k, \dots]}_{q \dots}$$

次の時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k$ 時に M は以下の様に遷移する.

$$t = 2 \cdot 2^k + 2^k : \underbrace{[1, 2 \cdot 2^k+1-2^k-1]}_{q \dots q} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1-2^k]}_b \underbrace{[2 \cdot 2^k+1-2^k+1, 2 \cdot 2^k+1+2^k-1]}_{q \dots q} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1+2^k]}_b \underbrace{[2 \cdot 2^k+1+2^k+1, \dots]}_{q \dots}$$

$i = k$ の場合の仮定を, 部分空間

$$\underbrace{[1, 2 \cdot 2^k+1-2^k-1]}_{q \dots q} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1-2^k]}_b \underbrace{[2 \cdot 2^k+1-2^k+1, 2 \cdot 2^k+1]}_{q \dots q}, \underbrace{[2 \cdot 2^k+1, 2 \cdot 2^k+1+2^k-1]}_{q \dots q} \underbrace{[2 \cdot 2^k+1+2^k]}_b \underbrace{[2 \cdot 2^k+1+2^k+1, \dots]}_{q \dots}$$

にそれぞれ適用することにより, 時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k + 2^k - 1 = 4 \cdot 2^k - 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 4 \cdot 2^k - 1 : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2, 4 \cdot 2^k-1]}_{bqbq \dots qb} \underbrace{[4 \cdot 2^k, \dots]}_{q \dots}$$

遷移規則 $q b \rightarrow a, q b q \rightarrow q, b q b \rightarrow q, b q q \rightarrow b, q q q \rightarrow q$ が適用されることにより, 次の時刻 $t = 4 \cdot 2^k$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 4 \cdot 2^k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, 4 \cdot 2^k]}_{q \dots q} \underbrace{[4 \cdot 2^k+1]}_b \underbrace{[4 \cdot 2^k+2, \dots]}_{q \dots}$$

(I), (II) より, 全ての k の場合で補題 3.2.6 が成立する. □

補題 3.2.6 より, 全ての n で時刻 $t = 2^n$ 時にセル C_1 の内部状態は a となり, それ以外の時刻では状態は a をとらない. よって, 以下の定理を得る.

定理 3.2.7 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.14 で示す遷移規則を持つ 3 状態 CA により実時間で生成可能である.

数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は 3.2.2 項の表 3.2 で示した 2 状態 CA で生成可能な数列には含まれない. よって, 本項で示した 3 状態 CA 上の実時間数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムは, 生成時間および内部状態数について最適であり, CA で数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する為に必要となる内部状態数の下限は 3 となる.

3.2.3.3 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$

本項では、梅尾 [6] が示した 7 状態 CA 上の数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を改良し、生成時間、内部状態数ともに最適となる 3 状態 CA 上の実時間数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムを明らかにする。M を 3 状態 CA とし、 $M = (Q, \delta, a)$ 、 $Q = \{q, a, b\}$ とする。数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.16 に示す状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^2} により生成される。図 3.10 に数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成の為の時間-空間図を示す。

表 3.16 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^2}

q		Right State		
		q	a	b
Left State	q	q	q	b
	a	q		
	b	a		
	\$	q	q	b

a		Right State		
		q	a	b
Left State	q		q	q
	a	b		
	b	a		
	\$		q	q

b		Right State		
		q	a	b
Left State	q	b		b
	a		a	a
	b		b	b
	\$	a		a

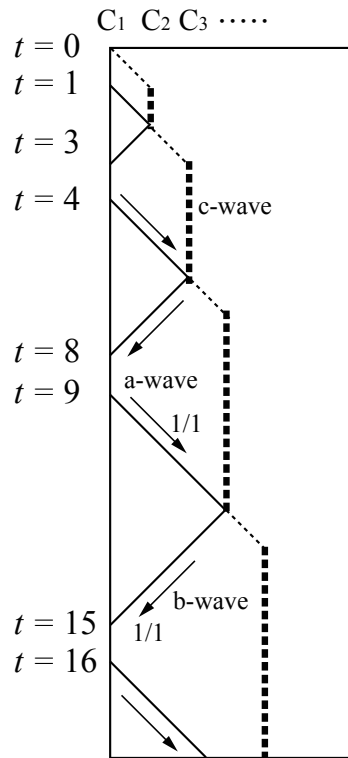


図 3.10 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図式

数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成には 3 種類の波、a 波、b 波、c 波を用いる。図 3.10 参照。時刻 $t = 1$ 時に、セル C_2 上にその場に留まり続ける波である c 波が、セル C_2 上に右方向に速さ 1/1 で進む a 波が生成される。a 波はセル空間を右方向に進み、a 波と c 波は衝突する。a 波、c 波は消滅し、セル C_2 上に b 波、セル C_3 上に c 波が生成される。b 波は左方向に速さ 1/1 で進む波であり、時刻 $t = 3$ 時にセル C_1 に到達する。b 波は消滅し、時刻 $t = 4$ 時にセル C_1 の内部状態が a となり、右方向に進む a 波が生成される。a 波はセル空間を右方向に進み、a 波と c 波は衝突し、消滅する。衝突の際に、セル C_3 上に b 波、セル C_4 上に c 波が生成される。b 波はセル空間を左方向に進み、時刻 $t = 8$ 時にセル C_1 に到達し、時刻 $t = 9$ 時にセル C_1 の内部状態が a となる。c 波

は, a 波と衝突する毎に 1 セルだけ右方向に移動する. a 波と b 波をセル C_1 -c 波間を往復させ, b 波がセル C_1 に到達した次の時刻にセル C_1 の内部状態が a となる.

補題 3.2.8 i を任意の正整数とし, $i \geq 1$ とすると, 時刻 $t = i^2 + i$ に M は以下の状態をとる.

$$t = i^2 + i : \overbrace{q \dots q}^{[1, i]} \overbrace{b}^{[i+1]} \overbrace{q \dots}^{[i+2, \dots]}$$

証明

(I) 最初に, $i = 1$ の場合を考える. 時刻 $t = 0$ 時, M は以下に示す初期状態をとる.

$$t = 0 : \overbrace{b}^{[1]} \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]}$$

時刻 $t = 1$ 時, セル C_1 , セル C_2 以外のセルの内部状態は, 遷移規則 $q \ q \ q \rightarrow q$ により, 静止状態 q となる. セル C_1 の内部状態は, 遷移規則 $b \ q \rightarrow a$ により状態 q をとり, セル C_2 の内部状態は, 遷移規則 $b \ q \ q \rightarrow a$ により a となる. 以上より, 時刻 $t = 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 1 : \overbrace{aa}^{[1,2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

時刻 $t = 2$ 時, セル C_1 , セル C_2 , セル C_3 以外のセルの内部状態は, 遷移規則 $q \ q \ q \rightarrow q$ により, 静止状態 q となる. セル C_1 の内部状態は, 遷移規則 $a \ a \rightarrow q$ により状態 q をとり, セル C_2 の内部状態は, 遷移規則 $a \ a \ q \rightarrow b$ により b をとり, セル C_3 の内部状態は, 遷移規則 $a \ a \ q \rightarrow b$ により b をとり, セル C_3 の内部状態は, 遷移規則 $a \ q \ q \rightarrow q$ により q となる. 以上より, 時刻 $t = 2$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 2 : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{b}^{[2]} \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]}$$

(II) j を任意の正整数とし, $j \geq 1$ とする. $i = j$ の場合, M は時刻 $t = j^2 + j$ 時に以下の状態をとると仮定する.

$$t = j^2 + j : \overbrace{q \dots q}^{[1, j]} \overbrace{b}^{[j+1]} \overbrace{q \dots}^{[j+2, \dots]}$$

表 3.17 に示す状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^2} の部分集合である \mathcal{R}_1 により, M は次のように遷移を行なう.

$$\begin{aligned} t = j^2 + j + 1 & : \overbrace{q \dots q}^{[1, j-1]} \overbrace{bb}^{[j, j+1]} \overbrace{a}^{[j+2]} \overbrace{q \dots}^{[j+3, \dots]} \Rightarrow \\ t = j^2 + j + 2 & : \overbrace{q \dots q}^{[1, j-2]} \overbrace{bbb}^{[j-1, j+1]} \overbrace{a}^{[j+2]} \overbrace{q \dots}^{[j+3, \dots]} \Rightarrow \\ t = j^2 + j + 3 & : \overbrace{q \dots q}^{[1, j-3]} \overbrace{b \dots b}^{[j-2, j+1]} \overbrace{a}^{[j+2]} \overbrace{q \dots}^{[j+3, \dots]} \end{aligned}$$

表 3.17 部分集合 \mathcal{R}_1

$\$ \ q \ q \rightarrow q;$	$q \ q \ q \rightarrow q;$	$q \ q \ b \rightarrow b;$
$q \ q \ b \rightarrow a;$	$q \ b \ q \rightarrow q;$	$q \ b \ b \rightarrow b;$
$b \ b \ b \rightarrow b;$	$\$ \ q \ b \rightarrow b;$	$\$ \ b \ q \rightarrow a;$
$b \ a \ q \rightarrow a;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	

左方向に1ステップにつき1セルだけ左方向に伝播している状態 b を b 波と呼ぶ. b 波が通過したセルの内部状態は b となる. セル C_{j+2} 上の留まり続ける状態 a を c 波と呼ぶ. b 波の速さは $1/1$ であるので, 時刻 $t = j^2 + j + j$ 時に b 波はセル C_1 に到達する. この時, M は以下の状態をとる.

$$t = (j^2 + j) + j : \underbrace{b \dots b}_{[1, j+1]} \underbrace{a}_{[j+2]} \underbrace{q \dots}_{[j+3, \dots]}$$

次の時刻に M は次の状態をとる.

$$t = (j^2 + j) + j + 1 : \underbrace{a}_{[1]} \underbrace{b \dots b}_{[2, j+1]} \underbrace{a}_{[j+2]} \underbrace{q \dots}_{[j+3, \dots]}$$

時刻 $t = j^2 + 2j + 1$ 時にセル C_1 の内部状態は a をとる. 表 3.17 に示す状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^2} の部分集合である \mathcal{R}_2 により, M は次のように遷移を行なう.

$$\begin{aligned} t = (j^2 + j) + (j + 1) + 1 & : \underbrace{q}_{[1]} \underbrace{a}_{[2]} \underbrace{b \dots b}_{[3, j+1]} \underbrace{a}_{[j+2]} \underbrace{q \dots}_{[j+3, \dots]} \Rightarrow \\ t = (j^2 + j) + (j + 1) + 2 & : \underbrace{qq}_{[1, 2]} \underbrace{a}_{[3]} \underbrace{b \dots b}_{[4, j+1]} \underbrace{a}_{[j+2]} \underbrace{q \dots}_{[j+3, \dots]} \Rightarrow \\ t = (j^2 + j) + (j + 1) + 3 & : \underbrace{q \dots q}_{[1, 3]} \underbrace{a}_{[4]} \underbrace{b \dots b}_{[4, j+1]} \underbrace{a}_{[j+2]} \underbrace{q \dots}_{[j+3, \dots]} \end{aligned}$$

表 3.18 部分集合 \mathcal{R}_2

$\$ a b \rightarrow q;$	$q a b \rightarrow q;$	$q a a \rightarrow b;$
$a b b \rightarrow a;$	$a b a \rightarrow a;$	$\$ q a \rightarrow q;$
$b b b \rightarrow b;$	$\$ q b \rightarrow b;$	$\$ b q \rightarrow a;$
$q q a \rightarrow q;$		

右方向に $1/1$ の速さで右方向に伝播している状態 a を a 波と呼ぶ. a 波が通過したセルの内部状態は q となる. a 波の速さは $1/1$ であるので, 時刻 $t = (j^2 + j) + (j + 1) + j + 1 = (j + 1)^2 + j + 1$ 時に a 波は c 波に到達し, 遷移規則 $a a q \rightarrow b$ により, セル C_{j+2} の内部状態は b に遷移する. そして, M は以下の状態をとる.

$$t = (j + 1)^2 + j + 1 : \underbrace{q \dots q}_{[1, j+1]} \underbrace{b}_{[j+2]} \underbrace{q \dots}_{[j+3, \dots]}$$

(I), (II) より, 全ての i で補題 3.2.8 が証明される. □

次にセル C_1 の内部状態が a となる時刻を考える. 最初にセル C_1 の内部状態が a となるのは時刻 $t = 1$ 時となる. 補題 3.2.8 より, 時刻 $t = i^2 + i$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = i^2 + i : \underbrace{q \dots q}_{[1, i]} \underbrace{b}_{[i+1]} \underbrace{q \dots}_{[i+2, \dots]}$$

時刻 $t = i^2 + i$ 時にセル C_{i+1} で生成された速さ $1/1$ の b 波がセル C_1 に到達した次の時刻に, セル C_1 の内部状態が a となる. よって, 時刻 $t = 1$ 以降にセル C_1 の内部状態が a となるのは, 時刻 $t = i^2 + i + (i + 1) - 1 + 1 = (i + 1)^2$ 時となる. 以上より, 時刻 $t = n^2$ 時にセル C_1 の内部状態が a となる. 以上より次の定理を得る.

定理 3.2.9 表 3.16 で与える遷移規則集合により, 3 状態 CA 上で数列 $\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する事ができる.

コンピュータ上に表 3.16 に示す遷移規則集合を実装し, $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い, 正当性を確認した. 図 3.11 に時刻 $t = 0 \sim 50$ のシミュレーション結果を示す.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
1	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
2	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
3	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
4	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
5	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
6	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
7	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
8	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
9	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
10	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
11	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
12	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
13	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
14	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
15	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
16	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
17	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
18	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
19	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
20	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
21	a	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
22	a	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
23	a	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
24	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
25	a	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
26	a	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
27	a	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
28	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
29	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
30	a	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
31	a	a	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
32	a	a	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
33	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
34	a	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
35	b	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
36	a	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
37	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
38	a	a	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
39	a	a	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
40	a	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a	a
41	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
42	a	a	a	a	a	a	b	a	a	a	a	a	a	a	a
43	a	a	a	a	a	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
44	a	a	a	a	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
45	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
46	a	a	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
47	a	b	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
48	b	b	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
49	a	b	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a
50	a	a	b	b	b	b	b	a	a	a	a	a	a	a	a

図 3.11 数列 $\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

数列 $\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は 3.2.2 項の表 3.2 で示した 2 状態 CA で生成可能な数列には含まれない. よって, 本項で示した 3 状態 CA 上の実時間数列 $\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムは, 生成時間および内部状態数について最適であり, CA で数列 $\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する為に必要となる内部状態数の下限は 3 となる.

3.2.3.4 Fibonacci 数列

本項では、有沢 [5] のアルゴリズムを改良し、5 状態 CA 上で動作する Fibonacci 数列の実時間生成アルゴリズムを実現する。Fibonacci 数列は一般的に、 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{i+2} = F_{i+1} + F_i (i \geq 0)$ として定義されるが、ここでは、 $i \geq 1$ の場合の Fibonacci 数列の生成について考える。M を 5 状態 CA とし、 $M = (Q, \delta, \alpha)$ 、 $Q = \{q, a, b, c, d\}$ とする。Fibonacci 数列は表 3.19 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{Fibonacci}$ を持つ M により生成される。図 3.12 に Fibonacci 数列生成の為の時間-空間図を示す。

表 3.19 Fibonacci 数列生成アルゴリズムの遷移規則集合 $\mathcal{R}_{Fibonacci}$

q	Right State				
	q	a	b	c	d
q	q	q		c	q
a	b				
b	q				
c	q				
d	b				
\$	q	q		a	a

a	Right State				
	q	a	b	c	d
q		d	q		q
a	b			d	
b					
c					
d	a	a	a	a	
\$		a	a	q	

b	Right State				
	q	a	b	c	d
q					
a	c			d	d
b	c				
c	c				
d			b	b	b
\$					

c	Right State				
	q	a	b	c	d
q			d		d
a	d	c	c	c	c
b	d	c	c	c	c
c	d	c	c	c	c
d	a	d	d	d	d
\$					

d	Right State				
	q	a	b	c	d
q			d	c	c
a	c	a	a	a	a
b	c				
c	c		d	d	d
d	b	d	d	d	d
\$	a				

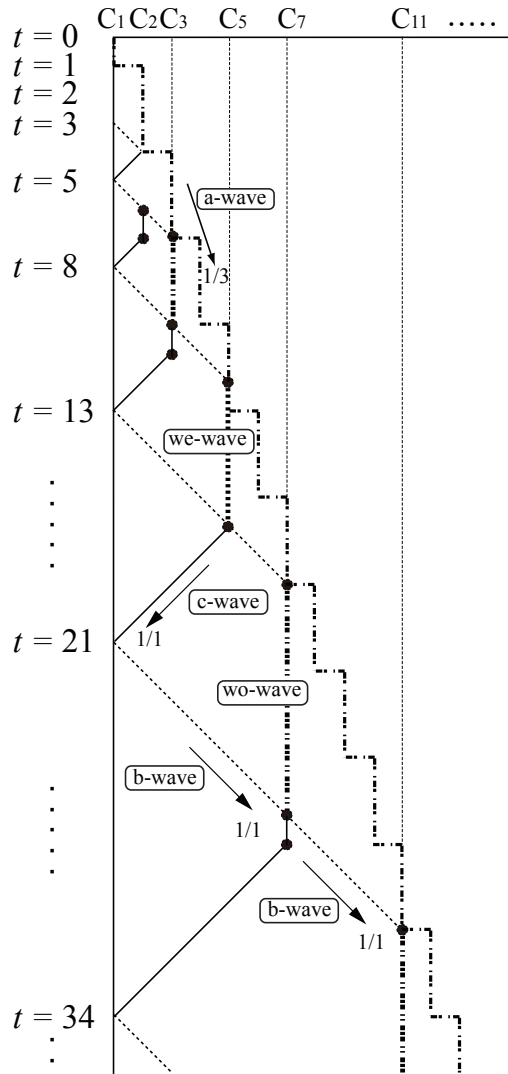


図 3.12 Fibonacci 数列生成のための時間-空間図式

図 3.12 に示す Fibonacci 数列生成のための時間-空間図は、有沢 [5] で示されている Fibonacci 数列生成のための時間-空間図を基に、Fibonacci 数列の実時間生成が可能となるように改良している。実時間で Fibonacci 数列を生成する為に、a 波、b 波、c 波 w_e 波、 w_o 波の 5 種類の波を用いる。表 3.20 に a 波、b 波、c 波 w_e 波、 w_o のそれぞれの速さ、進行方向を示す。

表 3.20 Fibonacci 数列生成アルゴリズムで使用する波の速さと進行方向

波	速さ	進行方向
a 波	1/3	右
b 波	1/1	右
c 波	1/1	左
w_e 波	0	なし (その場に留まる)
w_o 波	0	なし (その場に留まる)

以下に、Fibonacci 数列生成アルゴリズムの概要を示す。

1. 時刻 $t = 1$ 時にセル C_2 で生成された a 波はセル空間を速さ 1/3 で右方向に進む。
2. i 番目の項である F_i は、時刻 $t = F_i$ にセル C_1 で生成され、セル $C_{\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 1}$ 上に w_e 波、もしくは w_o が生成され、セル $C_{\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 1}$ 上に留まり続ける。セル $C_{\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor + 1}$ 上に配置される波が w_e 波、もしくは w_o であるかは、 F_{i-1} が偶数か奇数かにより定まる。
3. 時刻 $t = F_i$ 時に b 波は生成され、速さ 1/1 で右方向に進み、 w_e 波、もしくは w_o 波に到達し、左方向に 1/1 の速さで進む c 波が生成される。c 波がセル C_1 に到達すると、セル C_1 の内部状態が a に遷移し、セル C_1 は Fibonacci 数列の次の項を生成する。b 波が時刻 $t = F_i$ 時に生成され、セル C_1 から w_e 波、もしくは w_o までの距離は $\lfloor \frac{F_i-1}{2} \rfloor$ であり、b 波、b 波の速さは 1/1 であるので、セル C_1 が Fibonacci 数列の次の項を生成する時刻は $t = F_{i-1} + F_i = F_{i+1}$ 時である。 w_e 波、 w_o 波は b 波が衝突することで消滅する。
4. b 波が w_e 波、もしくは w_o 波に到達した後、a 波に到達するするまで速さ 1/1 で右方向に進み、衝突したセルに w_e 波、もしくは w_o 波を生成する。ただし、 $F_i, 1 \leq i \leq 4$ の生成のための w_e 波、もしくは w_o の配置は、アルゴリズムに沿わず、内部状態で実現する。図 3.12, 3.13 参照。これらの波の伝播を CA 上で繰り返す事で、実時間で Fibonacci 数列を生成することが出来る。

時刻 $t = 0$ 時、 M は以下に示す初期計算状況をとる。

$$t = 0 : \underbrace{[1]}_d \underbrace{[2, \dots]}_q \dots$$

時刻 $t = 1$ 時にセル C_1, C_2 以外のセルは $q \ q \ q \rightarrow q$ により状態 q を維持する。セル C_1 は $d \ q \rightarrow a$ により状態 a に、セル C_2 は $d \ q \ q \rightarrow b$ により b にそれぞれ遷移する。以上より、時刻 $t = 1$ 時に M は以下の状態をとる。

$$t = 1 : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2]}_b \underbrace{[3, \dots]}_q \dots$$

このようにして、 M は時刻 $t = 2, 3, 4$ に以下の様に遷移する。

$$\begin{aligned}
 t = 2 & : \underbrace{\quad [1] \quad}_{a} \underbrace{\quad [2] \quad}_{c} \underbrace{\quad [3, \dots] \quad}_{q \dots} \\
 t = 3 & : \underbrace{\quad [1] \quad}_{a} \underbrace{\quad [2] \quad}_{d} \underbrace{\quad [3, \dots] \quad}_{q \dots} \\
 t = 4 & : \underbrace{\quad [1] \quad}_{q} \underbrace{\quad [2] \quad}_{c} \underbrace{\quad [3] \quad}_{b} \underbrace{\quad [4, \dots] \quad}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

以下に5種類の波の生成と5状態CAによる波の生成を示す。

- **a波**: a波は状態 b, c, d により実現される。a波は時刻 $t = 1$ 時にセル C_2 で生成され、右方向に速さ $1/3$ で伝播する。 N を自然数の集合とし、 $P_a(t) : N \cup \{0\} \rightarrow N$ を時刻 t 時に a 波の存在するセルの位置を表す関数とすると、 $P_a(t) = \lceil \frac{t}{3} \rceil + 1, t \geq 0$ となる。よって、時刻 t 時に a 波はセル $C_{P_a(t)}$ 上に存在する。その時のセル $C_{P_a(t)}$ の内部状態は以下の通りとなる。

$$S_{P_a(t)}^t = \begin{cases} b & t \bmod 3 = 1 \\ c & t \bmod 3 = 2 \\ d & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

- **b波**: b波は状態 a により実現される。b波は $S_1^{F_i} = a (i \geq 3)$, すなわち $i \geq 3$ となる Fibonacci 数列の項の生成ごとにセル C_1 で生成される。b波は速さ $1/1$ でセル空間を右方向に進み、セル空間上にとどまっている w_e 波、もしくは w_o 波に到達する。b波が w_e 波、もしくは w_o 波に到達する事で、2つの波に変化する。1つはc波であり、セル空間を左方向に進む。もう1つはb波そのものであり、速さ $1/3$ で右方向に進むa波に追いつくまで速さ $1/1$ でセル空間を右方向に進む。b波とa波の衝突後、衝突したセル上に新しい w_e 波、もしくは w_o 波が生成され、b波は消滅する。図 3.12 参照。
- **c波**: c波は状態 c により実現される。c波は速さ $1/1$ でセル空間を左方向に進み、c波がセル C_1 に到達することで Fibonacci 数列の項を生成する。
- **w_e 波, w_o 波**: w_e 波は状態 a, w_o は b で実現される。これらの波はセル空間上に留まり続ける。b波とa波が衝突することで、 w_e 波、または w_o 波が生成される。 F_{i-1} が偶数の場合は w_e 波が、 F_{i-1} が奇数の場合は w_o 波が生成される。b波に w_o 波が衝突した場合は、1ステップ遅れてc波が生成される。一方、b波に w_e 波が衝突した場合は、遅延無しにc波が生成される。 w_e 波、 w_o 波はb波が衝突することで消滅する。

次に、Fibonacci 数列生成アルゴリズムの正当性について考える。時刻 $t = 0$ の時、 M は以下の状態をとる。

$$t = 0 : \underbrace{\quad [1] \quad}_{d} \underbrace{\quad [2, \dots] \quad}_{q \dots}$$

$t = 0$ から $t = 34$ までの Fibonacci 数列の生成は、アルゴリズムに沿わず、内部状態のみで実現している。 $t = 0 \sim 34$ では表 3.21 に示す遷移規則の部分集合 $\mathcal{R}_1 (\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_{Fibonacci})$ が使用され、図 3.13 に示す様に遷移を行う。

図 3.13 より、時刻 $t = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ 時にセル C_1 の状態は a となり、時刻 $t = 34$ の時、 M は以下の状態をとる。

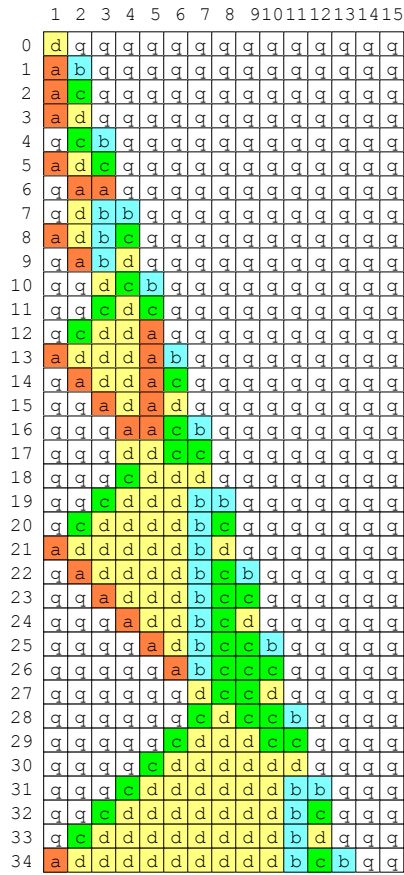


図 3.13 時刻 $t = 34$ までのシミュレーション状況

表 3.21 状態遷移規則の部分集合 \mathcal{R}_1

q d d \rightarrow c;	d b b \rightarrow b;	\$ a b \rightarrow a;	d b c \rightarrow b;	\$ a c \rightarrow a;
d b d \rightarrow b;	q c b \rightarrow d;	\$ a d \rightarrow q;	q c d \rightarrow d;	d a q \rightarrow a;
\$ q q \rightarrow q;	\$ q a \rightarrow q;	d a b \rightarrow a;	d a c \rightarrow a;	\$ q c \rightarrow a;
d a d \rightarrow a;	\$ q d \rightarrow a;	d q q \rightarrow b;	q a a \rightarrow d;	q a b \rightarrow q;
q a d \rightarrow q;	q q q \rightarrow q;	q q a \rightarrow q;	q q c \rightarrow c;	q q d \rightarrow q;
a d q \rightarrow c;	a d a \rightarrow a;	a d b \rightarrow a;	a d c \rightarrow a;	a d d \rightarrow a;
a c q \rightarrow d;	a c b \rightarrow c;	a b q \rightarrow c;	a b c \rightarrow d;	a b d \rightarrow d;
a a q \rightarrow b;	a a c \rightarrow d;	a q q \rightarrow b;	b d q \rightarrow c;	b c q \rightarrow d;
b c b \rightarrow c;	b c c \rightarrow c;	b c d \rightarrow c;	b b q \rightarrow c;	b q q \rightarrow q;
c d q \rightarrow c;	c d c \rightarrow d;	c d d \rightarrow d;	c c q \rightarrow d;	c c b \rightarrow c;
c c c \rightarrow c;	c c d \rightarrow c;	c b q \rightarrow c;	c q q \rightarrow q;	\$ d q \rightarrow a;
d d q \rightarrow b;	d d a \rightarrow d;	d d b \rightarrow d;	d d c \rightarrow d;	d d d \rightarrow d;
d c q \rightarrow a;	d c b \rightarrow d;	d c c \rightarrow d;	q d b \rightarrow d;	q d c \rightarrow c;

$$t = 34 : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, 10]}_d \underbrace{[11]}_b \underbrace{[12]}_c \underbrace{[13]}_b \underbrace{[14, \dots]}_q \dots$$

以上より、次の補題を得る。

補題 3.2.10 状態遷移規則の部分集合 P により、セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ 時に a をとり、時刻 $t = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ 時以外は a をとらない。また、時刻 $t = 34$ の時、 M は以下の状態をとる。

$$t = 34 : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, 10]}_d \underbrace{[11]}_b \underbrace{[12]}_c \underbrace{[13]}_b \underbrace{[14, \dots]}_q \dots$$

次に、時刻 $t = 34$ 以降の M の遷移について考える。 N を自然数の集合とし、 $S_a(t) : N \cup \{0\} \rightarrow \{b, c, d\}$ を時刻 t 時の a 波がとる状態を表す関数とすると、 $S_a(t)$ は以下の通りとなる。

$$S_a(t) = \begin{cases} b & t \bmod 3 = 1 \\ c & t \bmod 3 = 2 \\ d & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

補題 3.2.11 i を任意の自然数とし、 $i \geq 9$ とする。 F_i を Fibonacci 数列の部分数列とし、 $F_7 = 21, F_8 = 34, F_i = F_{i-2} + F_{i-1}, i \geq 9$ とする。表 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 で与えられる内部状態集合 $\mathcal{R}_j (2 \leq j \leq 5)$ を $\mathcal{R}_{Fibonacci}$ の部分集合とした場合、 $\mathcal{R}_j (2 \leq j \leq 5)$ を使用することで、 $i \geq 9$ となる全ての i において、時刻 $t = F_i$ 時に M のセル C_1 の内部状態が a をとり、時刻 $t = F_i$ 時に M は以下の状態をとる。

- F_{i-1} が偶数の場合:

$$t = F_i : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{i-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{i-1}}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_{i-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_i) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_i)]}_{S_a(F_i)} \underbrace{[P_a(F_i) + 1, \dots]}_q \dots$$

- F_{i-1} が奇数の場合:

$$t = F_i : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{i-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{i-1}}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_{i-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_i) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_i)]}_{S_a(F_i)} \underbrace{[P_a(F_i) + 1, \dots]}_q \dots$$

証明

(I) 補題 3.2.10 より、時刻 $t = 34$ 時に M は以下の状態をとる。

$$t = 34 : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, 10]}_d \underbrace{[11]}_b \underbrace{[12]}_c \underbrace{[13]}_b \underbrace{[14, \dots]}_q \dots$$

(II) k を任意の自然数とし、 $k \geq 9$ とすると、時刻 $t = F_k$ 時に M のセル C_1 の内部状態が a をとり、時刻 $t = F_k$ 時に M は以下の状態をとると仮定する。

- F_{k-1} が偶数の場合:

$$t = F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_q \dots$$

- F_{k-1} が奇数の場合:

$$t = F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_q \dots$$

次に示す 3 つの場合に分けて考える.

- F_{k-1} が奇数, F_k が偶数
- F_{k-1} が奇数, F_k が奇数
- F_{k-1} が偶数, F_k が奇数

F_{k-1} が奇数, F_k が偶数の場合: この場合, 時刻 $t = F_k$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

表 3.22 に示す部分集合 \mathcal{R}_2 により, M は次の様に遷移する.

$$\begin{aligned} t = F_k & : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\ t = F_k + 1 & : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_a \underbrace{[3, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + 1) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + 1)]}_{S_a(F_k + 1)} \underbrace{[P_a(F_k + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\ t = F_k + 2 & : \underbrace{[1, 2]}_{q \dots q} \underbrace{[3]}_a \underbrace{[4, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + 2) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + 2)]}_{S_a(F_k + 2)} \underbrace{[P_a(F_k + 2) + 1, \dots]}_{q \dots} \end{aligned}$$

表 3.22 状態遷移規則の部分集合 \mathcal{R}_2

\$ a d	→ q;	a d d	→ a;	d d d	→ d;
q q q	→ q;	\$ q q	→ q;	q q a	→ q;
q a d	→ q;	d d d	→ q;	d b c	→ b;
b c b	→ c;	b c c	→ c;	b c d	→ c;
c c b	→ c;	c c c	→ c;	d c d	→ c;
c b q	→ c;	c c q	→ d;	c d q	→ c;
b q q	→ q;	c q q	→ q;	d q q	→ b;
a d b	→ a;	a b c	→ d;	\$ q a	→ q;

セル空間を 1 ステップにつき 1 セルだけ右方向に伝播している状態 a を b 波, セル $C_{\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1}$ 上に留まる状態 b を w_o 波と呼ぶ. b 波と w_o 波は時刻 $t = F_k + \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1 - 1 = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2}$ 時に衝突する. 時刻 $t = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2}$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} : \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{q \dots q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_d \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2})} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

部分集合 \mathcal{R}_2 と表 3.23 に示す部分集合 \mathcal{R}_3 により M は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
t = F_k + \frac{F_{k-1}}{2} & : \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{q \dots q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_d \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, P_a(F_{k+1} + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_{k+1} + \frac{F_{k-1}}{2})]}_{S_a(F_{k+1} + \frac{F_{k-1}}{2})} \underbrace{[P_a(F_{k+1} + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
t = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 1 & : \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{q \dots q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_c \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2]}_d \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 3, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 1)} \\
& \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
t = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 2 & : \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor - 1]}_{q \dots q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_c \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 3]}_{d, d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 4, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2}) + 1]}_{c \dots c} \\
& \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 2)]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 2)} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
\end{aligned}$$

表 3.23 状態遷移規則の部分集合 \mathcal{R}_3

q q d \rightarrow q;	q b c \rightarrow c;	d c c \rightarrow d;
q c d \rightarrow d;	c d d \rightarrow d;	d d c \rightarrow d;
d c d \rightarrow d;	d c b \rightarrow a;	d c q \rightarrow a;
d d a \rightarrow d;	a q q \rightarrow b;	d a a \rightarrow b;
d a c \rightarrow a;	d a d \rightarrow a;	\$ q c \rightarrow q;

セル空間を速さ $1/1$ で左方向に伝播している状態 c を c 波, 速さ $1/1$ で右方向に進む状態 d を b 波と呼ぶ. b 波は a 波とセル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ で衝突する. a 波は速さ $1/3$ で右方向に進み続け, b 波は消滅し, セル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ の内部状態が状態 a となる. セル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ は状態 a を取り続ける. セル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ 上の状態 a を w_e 波と呼ぶ. c 波はセル空間を左方向に進み続ける. こうして, 時刻 $t = F_k + \frac{F_{k-1}-1}{2} + 1 + \frac{F_{k-1}-1}{2} = F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = F_{k+1} : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, P_a(F_{k+1}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})} \underbrace{[P_a(F_{k+1}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

F_{k-1} が奇数, F_k が奇数の場合: この場合, 部分集合 \mathcal{R}_2 により, a 波と b 波が衝突する 1 ステップ前までは F_{k-1} が奇数, F_k が偶数の場合と同様の遷移を行なう. a 波と b 波が衝突以降は, 表 3.24 に示す部分集合 \mathcal{R}_4 により, セル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ の内部状態が b に遷移し内部状態 b を保ち続ける. この内部状態 b を w_o 波と呼ぶ. c 波, a 波の動きは F_{k-1} が奇数, F_k が偶数の場合と同様であり, 時刻 $t = F_{k+1}$ 時に以下の状態をとる.

$$t = F_{k+1} : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_b \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, P_a(F_{k+1}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})} \underbrace{[P_a(F_{k+1}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

F_{k-1} が偶数, F_k が奇数の場合: この場合, 時刻 $t = F_k$ 時に, M は以下の状態をとる.

$$t = F_k : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

表 3.25 に示す部分集合 \mathcal{R}_5 により, M は以下に示すように遷移を行なう.

表 3.24 状態遷移規則の部分集合 \mathcal{R}_4

q q d \rightarrow q;	q b c \rightarrow c;	d c c \rightarrow d;
q c d \rightarrow d;	c d d \rightarrow d;	d d c \rightarrow d;
d c c \rightarrow d;	d d q \rightarrow b;	d c q \rightarrow a;
d d b \rightarrow d;	b b c \rightarrow b;	d b b \rightarrow b;
d b c \rightarrow a;	d b d \rightarrow b;	\$ q c \rightarrow q;

$$\begin{aligned}
 t = F_k & : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k)]}_{S_a(F_k)} \underbrace{[P_a(F_k) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
 t = F_k + 1 & : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_a \underbrace{[3, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + 1) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + 1)]}_{S_a(F_k + 1)} \underbrace{[P_a(F_k + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
 t = F_k + 2 & : \underbrace{[1, 2]}_{q \dots q} \underbrace{[3]}_a \underbrace{[4, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_a \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + 2) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + 2)]}_{S_a(F_k + 2)} \underbrace{[P_a(F_k + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

表 3.25 状態遷移規則の部分集合 \mathcal{R}_5 .

d b c \rightarrow b;	\$ a d \rightarrow q;	q c d \rightarrow d;
d a q \rightarrow a;	\$ q q \rightarrow q;	\$ q a \rightarrow q;
d a b \rightarrow a;	d a c \rightarrow a;	\$ q c \rightarrow a;
d a d \rightarrow a;	d q q \rightarrow b;	q a b \rightarrow q;
q a d \rightarrow q;	q q q \rightarrow q;	q q a \rightarrow q;
q q c \rightarrow c;	q q d \rightarrow q;	a d q \rightarrow c;
a d b \rightarrow a;	a d d \rightarrow a;	a c q \rightarrow d;
a b q \rightarrow c;	a b c \rightarrow d;	a q q \rightarrow b;
b c b \rightarrow c;	b c c \rightarrow c;	b c d \rightarrow c;
b q q \rightarrow q;	c d q \rightarrow c;	c d c \rightarrow d;
c d d \rightarrow d;	c c q \rightarrow d;	c c b \rightarrow c;
c c c \rightarrow c;	c c d \rightarrow c;	c b q \rightarrow c;
c q q \rightarrow q;	d d a \rightarrow d;	d d b \rightarrow d;
d d c \rightarrow d;	d d d \rightarrow d;	d c q \rightarrow a;
d c b \rightarrow d;	d c c \rightarrow d;	d c d \rightarrow d;
q d c \rightarrow c;		

b 波は速さ 1/1 で右方向に進み, セル $C_{\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1}$ 上の状態 a はその場に留まり続ける. この留まり続ける状態 a を w_e 波と呼ぶ. b 波と a 波は時刻 $t = F_k + \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1 - 1 = F_k + \frac{F_k-1}{2}$ 時に衝突する. 時刻 $t = F_k + \frac{F_k-1}{2}$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = F_k + \frac{F_k-1}{2} : \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor - 1]}_{q \dots q} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 1]}_{dd} \underbrace{[\lfloor \frac{F_k-1}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + \frac{F_k-1}{2}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_k-1}{2})} \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_k-1}{2}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

a 波と b 波の衝突後, M は次の様に遷移する.

$$\begin{aligned}
t = F_k + \frac{F_{k-1}}{2} & : \quad \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor - 1]}_{q \dots q} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_{dd} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) - 1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2})} \\
& \quad \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2}) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
t = F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1 & : \quad \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor - 1]}_{q \dots q} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_c \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1, \frac{F_{k-1}}{2} + 2]}_{ddd} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 3, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1) - 1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1)]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1)} \\
& \quad \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
t = F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 2 & : \quad \underbrace{[1, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor]}_{q \dots q} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 1]}_c \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 3]}_{d \dots d} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_{k-1}}{2} \rfloor + 4, P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 2) - 1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 2)]}_{S_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 2)} \\
& \quad \underbrace{[P_a(F_k + \frac{F_{k-1}}{2} + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
\end{aligned}$$

c 波が生成され左方向に進み, b 波は右方向に進み続ける. b 波が a 波と衝突した時, セル $C_{\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1}$ の内部状態が状態 b に遷移し, w_0 波が生成される. c 波, a 波の動きは F_{k-1} が奇数, F_k が偶数の場合と同様であり, 時刻 $t = F_{k+1}$ 時に以下の状態をとる.

$$t = F_{k+1} : \quad \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, \lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor]}_{d \dots d} \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 1]}_b \quad \underbrace{[\lfloor \frac{F_k}{2} \rfloor + 2, P_a(F_{k+1}) - 1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_a(F_{k+1})]}_{S_a(F_{k+1})} \quad \underbrace{[P_a(F_{k+1}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

(I), (II) により, 補題 3.2.11 が証明される. \square

補題 3.2.10, 補題 3.2.11 より, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{Fibonacci} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3 \cup \mathcal{R}_4 \cup \mathcal{R}_5$ により, $i \geq 1$ となる全ての i で, 時刻 $t = F_i$ 時にセル C_1 の内部状態は a となる. 以上より, 次の定理を得る.

定理 3.2.12 Fibonacci 数列は表 3.19 を持つ 5 状態 CA により実時間で生成できる.

コンピュータ上に表 3.19 に示す遷移規則集合を実装し, $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い, 正当性を確認した. 図 3.14 に時刻 $t = 0 \sim 74$ のシミュレーション結果を示す.

3.2.3.5 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$

M を 3 状態 CA とし, $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a, b\}$ とする. 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.26 に示す遷移規則集合により生成される. 図 3.15 に数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成の為の時間-空間図を示す.

数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成には 3 種類の波, a 波, b 波, c 波を用いる. 図 3.15 参照.

時刻 $t = 0$ 時に, セル C_1 上で a 波が生成され, $1/2$ の速さで右方向に進む. 時刻 $t = 3$ 時に, セル C_1 の内部状態が a に遷移し, セル C_1 上で b 波が生成され, $1/1$ の速さで右方向に進む. b 波がセル空間上を右方向に進み, a 波と衝突する. この時, a 波は右方向に進み続け, b 波は消滅し, 衝突したセル上で c 波が生成され, $1/1$ の速さで左方向に進む. 時刻 $t = 9$ 時, c 波がセル C_1 に到達すると, c 波が消滅し, b 波が生成され, セル C_1 の内部状態が a に遷移する. このように, b 波, c 波をセル C_1 と a 波間を往復運動させ, c 波がセル C_1 に到達し

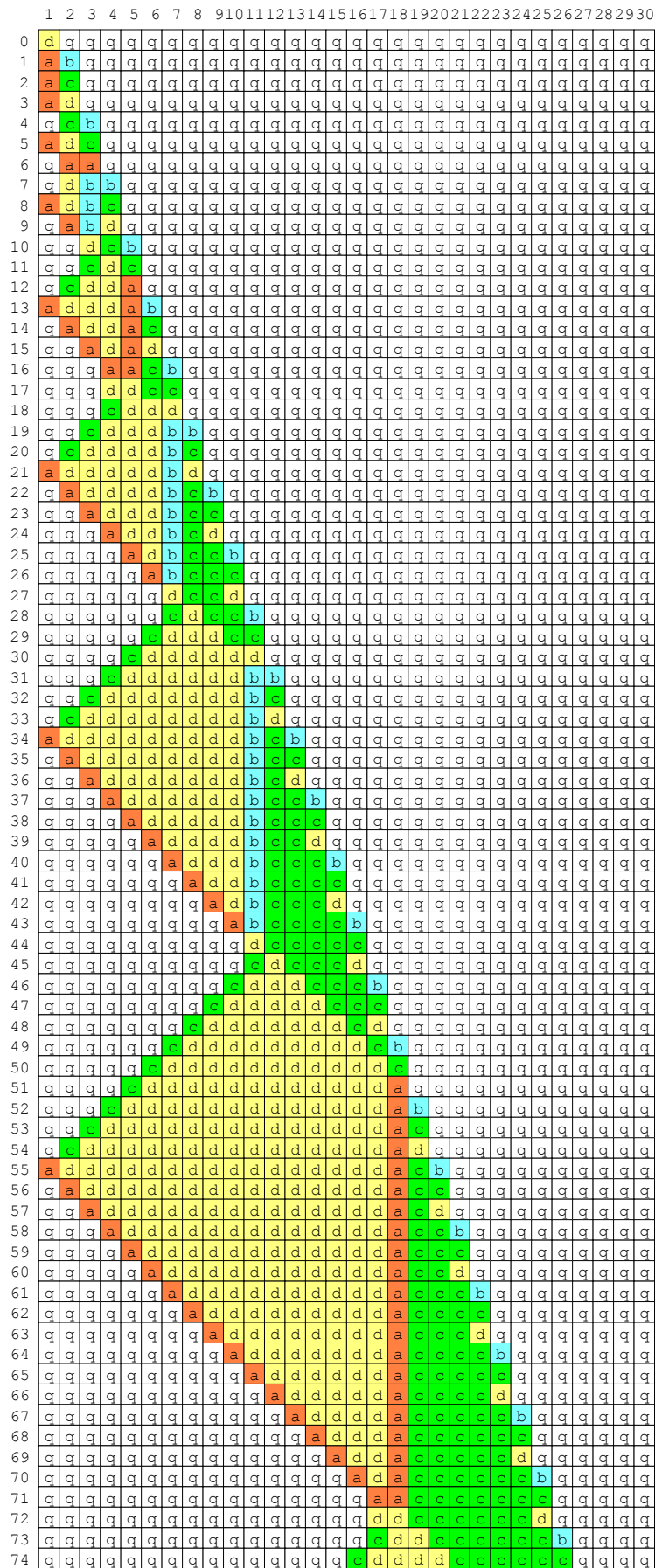


図 3.14 Fibonacci 数列生成アルゴリズムのシミュレーション結果

表 3.26 数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合 \mathcal{R}_{3^n}

q		Right State		
		q	a	b
Left State	q	q	q	b
	a	q		
	b	a		
	\$	q	q	a

a		Right State		
		q	a	b
Left State	q	b	q	q
	a	b		
	b	b		
	\$			q

b		Right State		
		q	a	b
Left State	q	b		b
	a	a	a	a
	b	b	b	b
	\$	q		

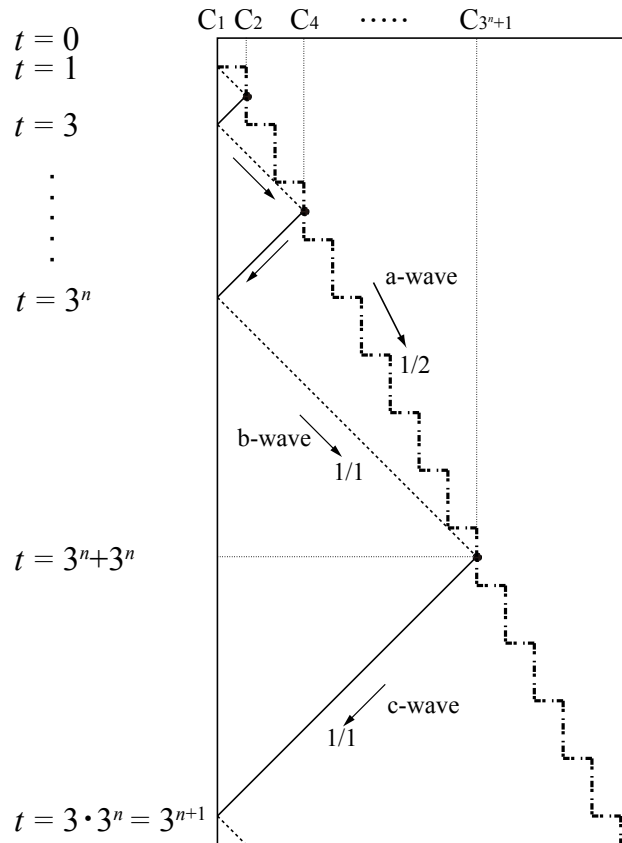


図 3.15 数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図式

た時刻にセル C_1 の内部状態が a に遷移する. セル C_1 の内部状態が a となる時刻は, $t = 3, 9, 27, \dots, 3^n$ 時となる.

補題 3.2.13 i を任意の正整数 ($i \geq 1$) とした場合, 時刻 $t = 2 \cdot 3^{i-1}$ 時に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2 \cdot 3^{i-1} : \underbrace{[1, \dots, 3^{i-1}]}_{q \dots q} \underbrace{[3^{i-1}+1]}_b \underbrace{[3^{i-1}+2, \dots]}_{q \dots}$$

証明

(I) 最初に, $i = 1$ の場合を考える. 時刻 $t = 0$ 時, M は以下に示す初期状態を取る.

$$t = 0 : \underbrace{\quad}_{[1]} \underbrace{\quad}_{[2, \dots]}$$

時刻 $t = 1$ 時, C_1 は $\$ b q \rightarrow q$ により q に遷移し, C_2 は $b q q \rightarrow a$ により a に遷移し, C_1, C_2 以外のセルでは $q q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. 時刻 $t = 1$ 時, M は以下に示す状態をとる.

$$t = 1 : \underbrace{\quad}_{[1]} \underbrace{\quad}_{[2]} \underbrace{\quad}_{[3, \dots]}$$

時刻 $t = 2$ 時, C_1 は $\$ q a \rightarrow q$ により q を維持し, C_2 は $q a q \rightarrow b$ により b に遷移し, C_3 は $a q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. C_1, C_2, C_3 以外のセルでは $q q q \rightarrow q$ により q を維持し続ける. 時刻 $t = 2$ 時, M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2 : \underbrace{\quad}_{[1]} \underbrace{\quad}_{[2]} \underbrace{\quad}_{[3, \dots]}$$

(II) j を任意の正整数とし, $j \geq 1$ とする. $i = j$ の場合, 時刻 $t = 2 \cdot 3^{j-1}$ 時に, M が以下に示す状態を取ると仮定する.

$$t = 2 \cdot 3^{j-1} : \underbrace{\quad}_{[1, \dots, 3^{j-1}]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+1]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+2, \dots]}$$

表 3.27 部分集合 \mathcal{R}_1

$\$ q q \rightarrow q;$	$q q q \rightarrow q;$	$q q b \rightarrow b;$
$q b q \rightarrow b;$	$b q q \rightarrow a;$	$q b b \rightarrow b;$
$b b b \rightarrow b;$	$b b a \rightarrow b;$	$b a q \rightarrow b;$
$a q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow a;$	

表 3.27 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_{3^n} の部分集合 \mathcal{R}_1 により, M が以下の様に遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = 2 \cdot 3^{j-1} + 1 & : \underbrace{\quad}_{[1, \dots, 3^{j-1}-1]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}, 3^{j-1}+1]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+2]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+3, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 2 \cdot 3^{j-1} + 2 & : \underbrace{\quad}_{[1, \dots, 3^{j-1}-2]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}-1, 3^{j-1}+2]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+3, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 2 \cdot 3^{j-1} + 3 & : \underbrace{\quad}_{[1, \dots, 3^{j-1}-3]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}-2, 3^{j-1}+2]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+3]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+4, \dots]} \Rightarrow \\
 t = 2 \cdot 3^{j-1} + 4 & : \underbrace{\quad}_{[1, \dots, 3^{j-1}-4]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}-3, 3^{j-1}+3]} \underbrace{\quad}_{[3^{j-1}+4, \dots]}
 \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 b の事を c 波と呼ぶ. c 波は 1 ステップにつき 1 セルだけ進むので, 速さは $1/1$ である. c 波が通過したセルは, 状態 b を維持し続ける. 状態 a, b は 2 ステップにつき 1 セル, 右方向に進む. この状態 a, b の伝播を a 波と呼ぶ. k を任意の正整数とし, $k \geq 1$ とする. a 波の速さは $1/2$ であるので, 時刻 $t = 2 \cdot 3^{j-1} + k$ 時に a 波はセル $C_{3^{j-1}+1+\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ 上に存在する. k が奇数の場合, セル $C_{3^{j-1}+1+\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ の内部状態は a となる. 逆に k が偶数の場合, $C_{3^{j-1}+1+\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ の内部状態は b となる. a 波が通過したセルは, 状態 b を維持し続ける. c 波の速さは $1/1$ であるので, c 波は時刻 $t = 2 \cdot 3^{j-1} + 3^{j-1}$ 時にセル C_1 に到達する. また, a 波の速さは $1/2$ であるので, c 波がセル C_1 に到達した際, すなわち時刻 $t = 2 \cdot 3^{j-1} + 3^{j-1}$ 時に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2 \cdot 3^{j-1} + 3^{j-1} : \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, \dots, 3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2} - 1]}_{b \dots b} \quad \underbrace{[3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2}]}_a \quad \underbrace{[3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2} + 1, \dots]}_{q \dots}$$

時刻 $t = 2 \cdot 3^{j-1} + 3^{j-1} = 3^j$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移する. 表 3.28 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_{3^n} の部分集合 \mathcal{R}_2 により, M が以下の様に遷移する.

表 3.28 部分集合 \mathcal{R}_2

$\$ a b \rightarrow q;$	$q a b \rightarrow q;$	$q a a \rightarrow b;$
$a b b \rightarrow a;$	$a b a \rightarrow a;$	$\$ q a \rightarrow q;$
$b b b \rightarrow b;$	$\$ q b \rightarrow b;$	$\$ b q \rightarrow a;$
$q q a \rightarrow q;$		

$$\begin{aligned}
 t = 3^j + 1 & : \underbrace{[1]}_q \quad \underbrace{[2]}_a \quad \underbrace{[3, \dots, 3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2}]}_{b \dots b} \quad \underbrace{[3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2} + 1, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
 t = 3^j + 2 & : \underbrace{[1, 2]}_{qq} \quad \underbrace{[3]}_a \quad \underbrace{[4, \dots, 3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2}]}_{b \dots b} \quad \underbrace{[3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2} + 1]}_a \quad \underbrace{[3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2} + 2, \dots]}_{q \dots} \Rightarrow \\
 t = 3^j + 3 & : \underbrace{[1, 3]}_{q \dots q} \quad \underbrace{[4]}_a \quad \underbrace{[5, \dots, \frac{3^{j-1} + 1}{2} + 1]}_{b \dots b} \quad \underbrace{[3^{j-1} + 1 + \frac{3^{j-1} + 1}{2} + 2, \dots]}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 右方向に伝播している状態 a の事を b 波と呼ぶ. b 波が通過したセルは, 状態 q を維持し続ける. p を任意の正整数とし, $p \geq 1$ とする. 時刻 $t = 2 \cdot 3^{j-1} + p$ に a 波と b 波がセル $C_{3^{j-1} + 1 + \lceil \frac{p}{2} \rceil}$ で衝突すると仮定する. 図 3.16 参照. 図 3.16 より, $p = 3^{j-1} + 3^{j-1} + 1 + \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1 = 4 \cdot 3^{j-1}$ となる. よって, a 波と b 波は時刻 $t = 2 \cdot 3^j$ にセル $C_{3^{j+1}}$ で衝突する.

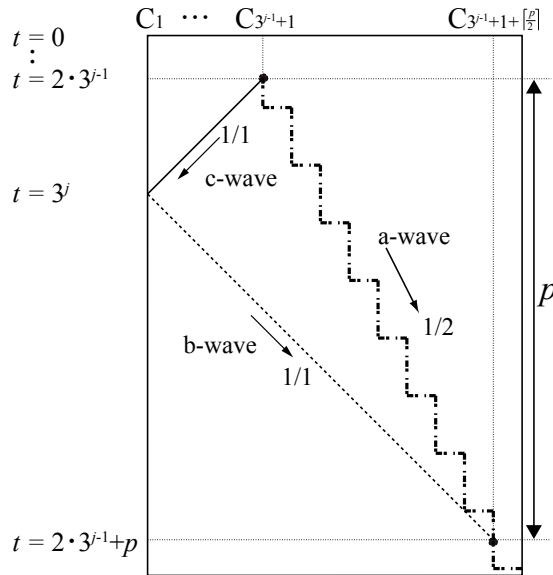


図 3.16 a 波と b 波の衝突

次に, a 波と b 波が衝突する 1 ステップ前, 時刻 $t = p - 1$ の M の状態を考える. $p - 1 = 4 \cdot 3^{j-1} - 1$ は奇数であるので, a 波は時刻 $t = 2 \cdot 3^j - 1$ にセル $C_{3^{j+1}}$ に存在し, セル $C_{3^{j+1}}$ の内部状態は a となる. この時, b 波はセル C_{3^j} 上に存在する. よって, 時刻 $t = 2 \cdot 3^j - 1$ に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2 \cdot 3^j - 1 : \underbrace{[1, \dots, 3^j - 1]}_{q \dots q} \underbrace{[3^j]}_a \underbrace{[3^j + 1]}_a \underbrace{[3^j + 2, \dots]}_{q \dots}$$

そして、次のステップに、セル C_{3^j} は $b \ a \ a \rightarrow q$ によって状態 q をとり、セル $C_{3^{j+1}}$ は $a \ a \ q \rightarrow b$ により状態は b をとる。以上より、 M は以下に示す状態を取る。

$$t = 2 \cdot 3^j : \underbrace{[1, \dots, 3^j]}_{q \dots q} \underbrace{[3^j + 1]}_b \underbrace{[3^j + 2, \dots]}_{q \dots}$$

(I), (II) より、補題 3.2.13 が証明される。 □

補題 3.2.13 より、セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 3^n$ 時に状態 a をとる。以上より以下の定理を得る。

定理 3.2.14 表 3.26 で与える遷移規則集合により、3 状態 CA 上で数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する事ができる。

コンピュータ上に表 3.26 に示す遷移規則集合を実装し、 $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い、正当性を確認した。図 3.17 に時刻 $t = 0 \sim 30$ のシミュレーション結果を示す。

数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は 3.2.2 項の表 3.2 で示した 2 状態 CA で生成可能な数列には含まれない。よって、本項で示した 3 状態 CA 上の実時間数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムは、生成時間および内部状態数について最適であり、CA で数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する為に必要となる内部状態数の下限は 3 となる。

3.2.3.6 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$

M を 8 状態 CA とし、 $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a, b, c, d, e, f, p\}$ とする。数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.29 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^3} を持つ M により生成される。図 3.18 に数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成の為に時間-空間図を示す。

数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する為に、 a 波、 b 波、 p 波、 c 波、 d 波、 e 波を用いる。 a 波、 d 波は速さ $1/1$ で右方向に進行する波である。 c 波、 e 波は速さ $1/2$ で右方向に進行する波であり、 b 波は速さ $1/1$ で左方向に進行する波である。 p 波はその場にとどまり続ける速さ 0 の波であり、 i を任意の自然数とし、 $i \geq 1$ とした場合、 p 波はセル C_2 , セル C_4 , セル C_7 , セル C_{11} , \dots , セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ に生成される。数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムは、 c 波、 d 波、 e 波による p 波の生成、および、セル C_1 と p 波で挟まれたセル空間内の a 波、 b 波の往復による数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成から構成される。まず、 a 波、 b 波の往復による数列の生成のみを考える為、図 3.19 に示すように、あらかじめ、時刻 $t = 0$ 時にセル C_2 , セル C_4 , セル C_7 , セル C_{11} , \dots , セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ に内部状態 p によりマーキングが施されていると仮定する。この場合の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの為に時間-空間図を図 3.20 示す。

図 3.19 に示すセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上のマーキング " p " が p 波であり、左から数えて i 番目の p 波を P_i と呼ぶ。 P_i はセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上に存在する。時刻 $t = 1$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移し、 a 波が生成される。 a 波は速さ $1/1$ でセル空間を右方向に進み、 P_1 と衝突する。衝突により、 a 波は消滅し、速さ $1/1$ で左方向に進む b 波が生成される。 b 波はセル空間を左方向に進みセル C_1 に達する。セル C_1 に達する事で、 b 波は消滅し、 a 波が生成される。セル C_1 - P_1 間を a 波、 b 波が往復運動し、3 回目の a 波と P_1 の衝突の際に P_1 は消滅し、 b 波を生成する。 b 波は時刻 $t = 7$ 時にセル C_1 に到達し、1 ステップ後の時刻 $t = 8$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移し、 a 波が生成され、セル C_1 - P_2 間を a 波、 b 波が往復運動する。

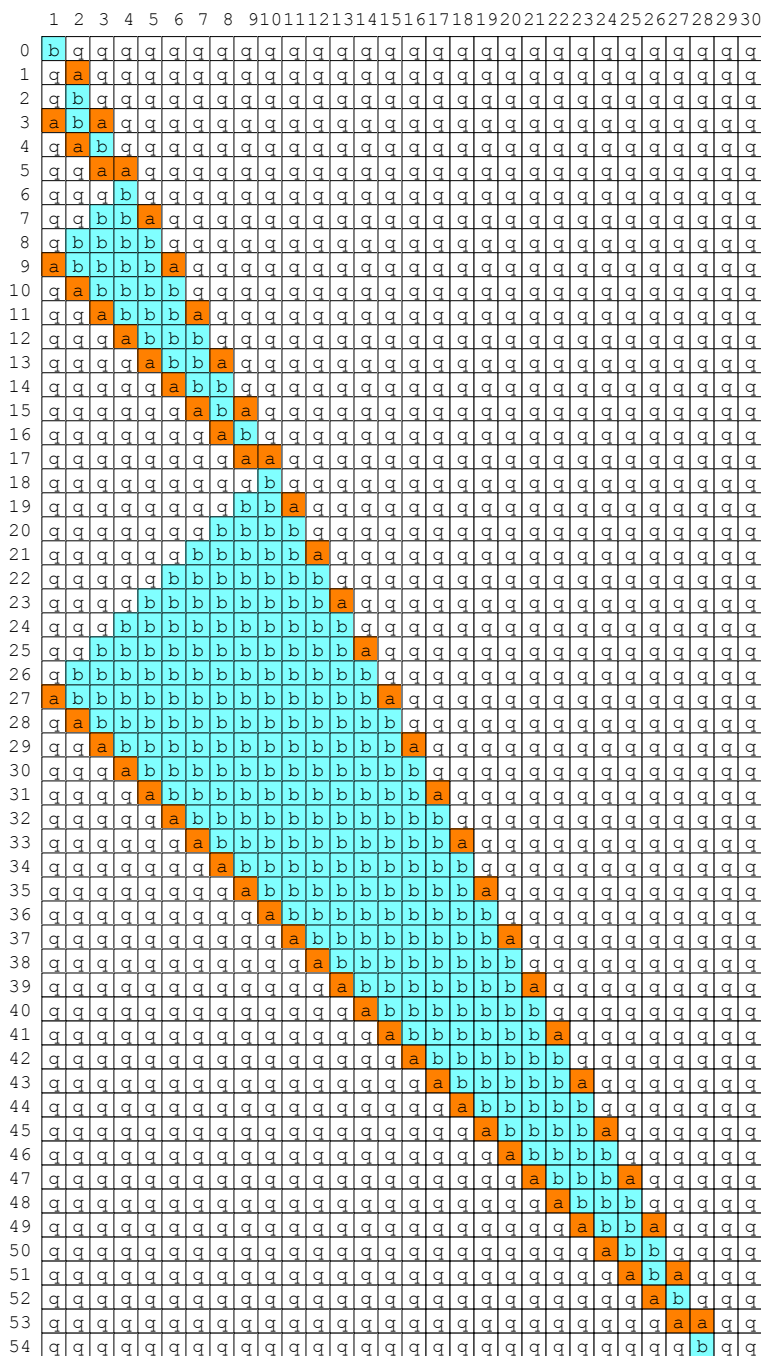


図 3.17 数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

この波の往復運動を繰り返すことで、時刻 $t = i^3$ 時にセル C_1 の内部状態が **a** に遷移し、**a** 波が生成される。この時、最も左側の **p** 波は P_i であり、セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上に存在する。セル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間には $\frac{i^2+i+2}{2}$ 個のセルが存在し、**a** 波は 1 ステップにつき 1 セル進む速さ $1/1$ の波であるので、**a** 波がセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ に達するには $\frac{i^2+i+2}{2} - 1$ ステップ必要である。同様に、**b** 波がセル C_1 に達するには $\frac{i^2+i+2}{2} - 1$ ステップ必要であるので、セル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間を **a** 波、**b** 波が 1 往復するには $2 \cdot (\frac{i^2+i+2}{2} - 1) = i^2 + i$ ステップ必要である。時刻 $t = i$ から **a** 波、**b** 波がセル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間を 3 往復した 1 ステップ後、すなわち、時刻 $t = i^3 + 3 \cdot (i^2 + i) + 1 = (i + 1)^3$ 時にセル C_1 の内部状態が **a** に遷移し、**a** 波が生成される。この様に、

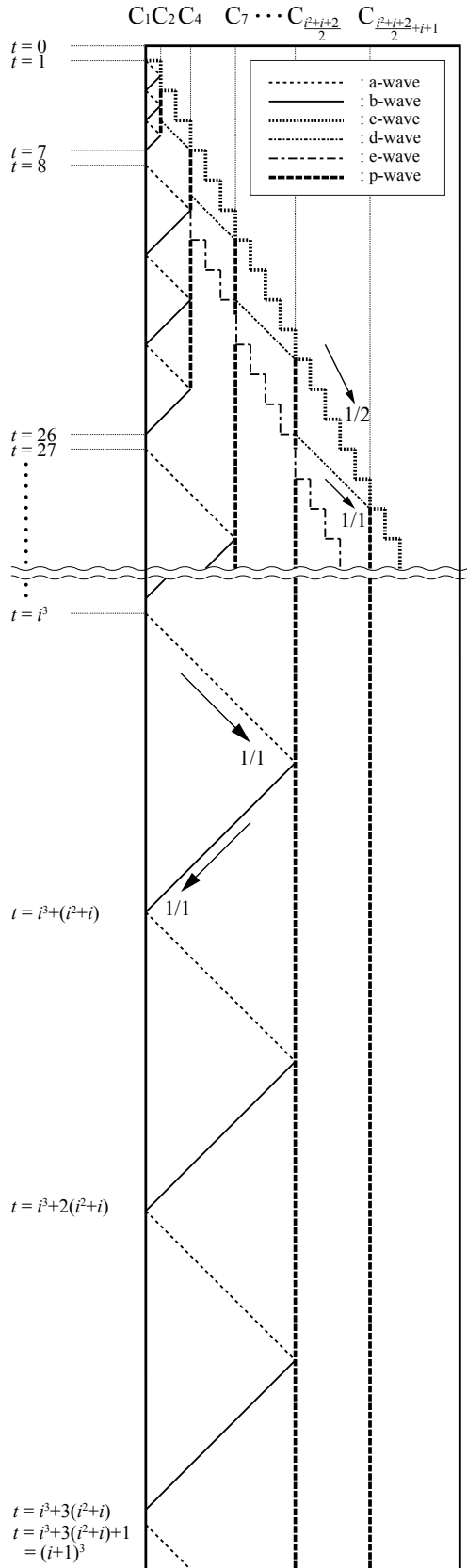


図 3.18 数列 $\{n^3 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図

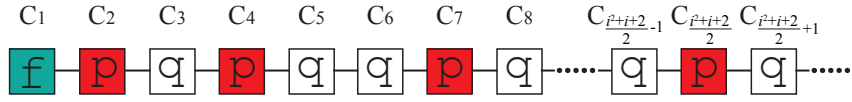


図 3.19 p 波をあらかじめ配置する場合の初期計算状況

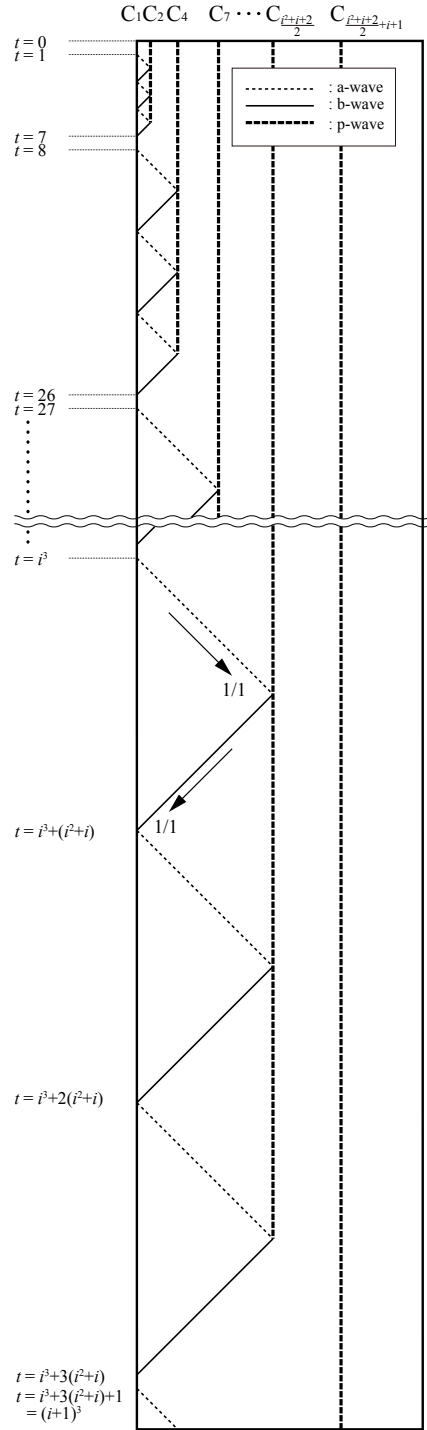


図 3.20 p 波をあらかじめ配置する場合の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図

表 3.29 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^3}

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	q	q	q	q	d	e	f	q
	a	a		a	a				
	b	q							
	c	b							
	d	q		q	q				
	e	q							
	f	f							f
	p	q		q	q				
\$	q		q	p	p	f	q		

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	p							
	a	e		p	e				
	b	d							
	c	b							
	d	b				c			
	e	e		p	e				
	f	f		b					
	p	b							
\$		b			q				

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	c				c	c		
	a	c							
	b								
	c								
	d	b				c			
	e								
	f	b					c		
	p	c	b			c			
\$	c		b		c			c	

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	q	q	q	q	q	q	q	
	a	a							
	b	p							
	c								c
	d					q			
	e								
	f								
	p	q				q			
\$	a							f	

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	d	d			d			
	a								
	b								
	c								
	d	d	d	d	d				
	e								
	f								
	p	e				p			
\$									

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	e				e			
	a								
	b	e			e	e			
	c					b	b		
	d								
	e	e	e			e	e		
	f								
	p	f				p			
\$									

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	f	f					f	c
	a			c				p	
	b								
	c								
	d								
	e								
	f	f	f	f				f	f
	p							p	p
\$	q						a		

		Right State							
		q	a	b	c	d	e	f	p
Left State	q	p	p	p	p	q	q	q	q
	a	p		p	p				
	b	p		p	p				
	c	a		a					
	d								
	e	p		p					
	f	p							
	p	d							
\$					q	q			

セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上にマーキング "p" を行い, セル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間を a 波, b 波を往復運動させる事で, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する事が可能である.

次に, 正当性について考える. 時刻 $t = 0$ の時, M は以下の状態をとる.

$$t = 0 : \underbrace{[1]}_f \underbrace{[2]}_p \underbrace{[3]}_q \underbrace{[4]}_p \underbrace{[5,6]}_{qq} \underbrace{[7]}_p \underbrace{[8, \frac{i^2+i+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{i^2+i+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{i^2+i+2}{2}+1, \dots, \frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}]}_p$$

$t = 0$ から $t = 8$ までの数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成は, アルゴリズムに沿わず, 内部状態のみで実現している. $t = 0 \sim 8$ では表 3.30, 表 3.31 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_0 (\mathcal{R}_0 \not\subset \mathcal{R}_{n^3})$, $\mathcal{R}_1 (\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_{n^3})$ が使用される. \mathcal{R}_0 は初期計算状況で p 波を配置した場合のみ使用される遷移規則集合であるので, \mathcal{R}_{n^3} には含まれない. $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ により, M は図 3.21 に示す様に遷移を行う.

表 3.30 状態遷移規則集合 \mathcal{R}_0

a p q \rightarrow d; d q p \rightarrow q; e q p \rightarrow q; q p q \rightarrow p;
\$ a p \rightarrow q; \$ f p \rightarrow a;

表 3.31 状態遷移規則集合 \mathcal{R}_1

f f f \rightarrow f; f f p \rightarrow f; f p q \rightarrow p; f q p \rightarrow f;
p d q \rightarrow e; p e q \rightarrow f; p q p \rightarrow q; p q q \rightarrow q;
q d q \rightarrow d; q e q \rightarrow e; q f q \rightarrow f; q q p \rightarrow q;
q q q \rightarrow q; \$ f f \rightarrow a; \$ p d \rightarrow q; \$ p e \rightarrow q;
\$ q d \rightarrow p; \$ q e \rightarrow p; \$ q f \rightarrow f;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	f	p	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
1	a	p	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
2	q	d	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
3	p	d	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
4	q	e	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
5	p	e	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
6	q	f	q	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
7	f	f	f	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q
8	a	f	f	p	q	q	p	q	q	q	p	q	q	q	q	p	q	q	q	q

図 3.21 時刻 $t = 8$ までのシミュレーション状況

以上より, 次の補題を得る.

補題 3.2.15 状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ により, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 1, 8$ 時に a をとり, 時刻 $t = 1, 8$ 時以外は a をとらない. また, 時刻 $t = 1, 8$ 時, M はそれぞれ以下の状態をとる.

$$t = 1 : \underbrace{[1] a}_{p} \underbrace{[2] p}_{p} \underbrace{[3] q}_{p} \underbrace{[4] p}_{p} \underbrace{[5,6] qq}_{p} \underbrace{[7] p}_{p} \underbrace{[8, \frac{i^2+i+2}{2}-1] q, \dots, q}_{p} \underbrace{[\frac{i^2+i+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{i^2+i+2}{2}+1, \dots, \frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}-1] q, \dots, q}_{p}$$

$$\underbrace{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}+1, \dots] q, \dots}_{p}$$

$$t = 8 : \underbrace{[1] a}_{p} \underbrace{[2,3] ff}_{p} \underbrace{[4] p}_{p} \underbrace{[5,6] qq}_{p} \underbrace{[7] p}_{p} \underbrace{[8, \frac{i^2+i+2}{2}-1] q, \dots, q}_{p} \underbrace{[\frac{i^2+i+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{i^2+i+2}{2}+1, \dots, \frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}-1] q, \dots, q}_{p}$$

$$\underbrace{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}+1, \dots] q, \dots}_{p}$$

次に, 時刻 $t = 8$ 以降の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成を考える.

補題 3.2.16 j を任意の自然数 ($j \geq 1$) とする. 時刻 $t = j^3$ 時に M は以下の状態をとる, 時刻 $t = j^3$ 時以外にセル C_1 の内部状態は a とならない.

$$t = j^3 : \underbrace{[1] a}_{p} \underbrace{[2, \frac{j^2+j+2}{2}-1] f, \dots, f}_{p} \underbrace{[\frac{j^2+j+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{j^2+j+2}{2}+1, \dots, \frac{(j+1)^2+(j+1)+2}{2}-1] q, \dots, q}_{p} \underbrace{[\frac{(j+1)^2+(j+1)+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{(j+1)^2+(j+1)+2}{2}+1, \dots] q, \dots}_{p}$$

[証明]

(I) 補題より, $j = 1, 2$ の場合は成立する.

(II) k を任意の自然数 ($k \geq 1$) とする. $j = k$ の場合, M は以下の状態をとると仮定する.

$$t = k^3 : \underbrace{[1] a}_{p} \underbrace{[2, \frac{k^2+k+2}{2}-1] f, \dots, f}_{p} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1] q, \dots, q}_{p} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}] p}_{p} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots] q, \dots}_{p}$$

表 3.32 に示す状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_2 (\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_{n^3})$ により, M は次のように遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = k^3 & : \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, \frac{k^2+k+2}{2}-1]}_{f, \dots, f} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]}_p \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = k^3 + 1 & : \underbrace{[1]}_q \quad \underbrace{[2]}_p \quad \underbrace{[3, \frac{k^2+k+2}{2}-1]}_{f, \dots, f} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]}_p \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = k^3 + 2 & : \underbrace{[1,2]}_{qq} \quad \underbrace{[3]}_p \quad \underbrace{[4, \frac{k^2+k+2}{2}-1]}_{f, \dots, f} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]}_p \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots}
 \end{aligned}$$

表 3.32 状態遷移規則集合 \mathcal{R}_2

a f f → p;	d d d → d;	d d q → d;	d q q → q;
e e e → e;	e e q → e;	e q q → q;	f f q → f;
f q q → f;	p d d → p;	p e e → p;	p f f → p;
p f p → p;	p p q → d;	q d d → d;	q e e → e;
q f f → f;	q p d → q;	q p e → q;	q p f → q;
q p p → q;	q q d → d;	q q e → e;	q q f → f;
\$ a f → q;	\$ q p → q;	\$ q q → q;	

1 ステップに 1 セルだけ右方向に伝播している状態 p を a 波, セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$, セル $C_{\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}}, \dots$ にとどまり続ける状態 p を p 波と呼ぶ. a 波は速さ $1/1$ で右方向に進み, 時刻 $t = k^3 + \frac{k^2+k+2}{2} - 1$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ 上の p 波と衝突する. 衝突後, M は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = k^3 + \frac{k^2+k+2}{2} - 1 & : \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]}_d \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
 & \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = k^3 + \frac{k^2+k+2}{2} & : \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2}-2]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}-1, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{dd} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
 & \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = k^3 + \frac{k^2+k+2}{2} + 1 & : \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2}-3]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}-2, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{d, \dots, d} \quad \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
 & \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots}
 \end{aligned}$$

1 ステップに 1 セルだけ左方向に伝播している状態 d を b 波と呼ぶ. セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ の内部状態は, 衝突回数をカウントするために d に遷移するが, その場にとどまり続ける. b 波は速さ $1/1$ で左方向に進み, 時刻 $t = k^3 + 2 \cdot (\frac{k^2+k+2}{2} - 1) = k^3 + (k^2 + k)$ 時にセル C_1 に到達する. 到達後, M は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
t = k^3 + (k^2 + k) & : \underbrace{[1]}_p \underbrace{[2, \frac{k^2+k+2}{2}]}_d, \dots, d \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots \Rightarrow \\
t = k^3 + (k^2 + k) + 1 & : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_p \underbrace{[3, \frac{k^2+k+2}{2}]}_d, \dots, d \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots \Rightarrow \\
t = k^3 + (k^2 + k) + 2 & : \underbrace{[1,2]}_{qq} \underbrace{[3]}_p \underbrace{[4, \frac{k^2+k+2}{2}]}_d, \dots, d \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots
\end{aligned}$$

a 波は速さ 1/1 で右方向に進み、時刻 $t = k^3 + (k^2 + k) + \frac{k^2+k+2}{2} - 1$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ 上の p 波と衝突する。衝突後、 M は以下の通り遷移する。

$$\begin{aligned}
t = k^3 + (k^2 + k) + \frac{k^2+k+2}{2} - 1 & : \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]}_e \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots \Rightarrow \\
t = k^3 + (k^2 + k) + \frac{k^2+k+2}{2} & : \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2}-2]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}-1, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{ee} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
& \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots \Rightarrow \\
t = k^3 + (k^2 + k) + \frac{k^2+k+2}{2} + 1 & : \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2}-3]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}-2, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{e, \dots, e} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
& \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots
\end{aligned}$$

1 ステップに 1 セルだけ左方向に伝播している状態 e が b 波となる。これは、b 波とセル C_1 の衝突の回数をカウントするためである。同様に、セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ の内部状態も e に遷移し、その場にとどまり続ける。b 波は速さ 1/1 で左方向に進み、時刻 $t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k)$ 時にセル C_1 に到達する。到達後、 M は以下の通り遷移する。

$$\begin{aligned}
t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) & : \underbrace{[1]}_p \underbrace{[2, \frac{k^2+k+2}{2}]}_e, \dots, e \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots \Rightarrow \\
t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + 1 & : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_p \underbrace{[3, \frac{k^2+k+2}{2}]}_e, \dots, e \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots \Rightarrow \\
t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + 2 & : \underbrace{[1,2]}_{qq} \underbrace{[3]}_p \underbrace{[4, \frac{k^2+k+2}{2}]}_e, \dots, e \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_q, \dots, q \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_q, \dots
\end{aligned}$$

a 波は速さ 1/1 で右方向に進み、時刻 $t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2+k+2}{2} - 1$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ 上の p 波と衝突する。衝突後、 M は以下の通り遷移する。

$$\begin{aligned}
 t = \frac{k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2} - 1}{\frac{k^2 + k + 2}{2} - 1} & : \quad [1, \underbrace{\frac{k^2+k+2}{2}-1}_{q, \dots, q}] \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]_f}_{f} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = \frac{k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2}}{\frac{k^2 + k + 2}{2}} & : \quad [1, \underbrace{\frac{k^2+k+2}{2}-2}_{q, \dots, q}] \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}-1, \frac{k^2+k+2}{2}+1]}_{f, \dots, f} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+2, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
 & \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = \frac{k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2} + 1}{\frac{k^2 + k + 2}{2} + 1} & : \quad [1, \underbrace{\frac{k^2+k+2}{2}-3}_{q, \dots, q}] \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}-2, \frac{k^2+k+2}{2}+2]}_{f, \dots, f} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}+3, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \\
 & \quad \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots}
 \end{aligned}$$

1 ステップに 1 セルだけ左方向に伝播している状態 f が b 波となる. 状態 f の伝播の b 波がセル C_1 の衝突した次のステップに, セル C_1 の内部状態は a に遷移する. セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ の内部状態も f に遷移し, セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ より右側にも状態 f が伝播する. 右方向への状態 f の伝播はセル $C_{\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1}$ まで達する. b 波は速さ $1/1$ で左方向に進み, 時刻 $t = k^3 + 3 \cdot (k^2 + k)$ 時にセル C_1 に到達する. 到達後, M は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = k^3 + 3 \cdot (k^2 + k) & : \quad [1, \underbrace{\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1}_{f, \dots, f}] \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}]}_p \\
 & \quad \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = k^3 + 3 \cdot (k^2 + k) + 1 & : \quad [1, \underbrace{\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}-1}_{f, \dots, f}] \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}+1, \dots, \frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}-1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}]}_p \\
 = (k+1)^3 & \quad \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}+1, \dots]}_{q, \dots}
 \end{aligned}$$

以上より, $j = k$ の場合に成立すると仮定すると, $j = k + 1$ の場合も成立する.

(I), (II) より, すべての j において補題 3.2.16 が成立する. □

補題 3.2.3.6, 補題 3.2.16 より, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = j^3$ 時に状態 a をとる. すなわち, M は遷移規則集合 $\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ により, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する.

次に, p 波の生成について考える. M が図 3.22 に示す初期計算状況を取った場合, 図 3.18 に示す時間-空間図の通りに波が生成され, p 波の生成と a 波, b 波の往復による数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成が並行に行われる. 図 3.23 に示す時間-空間図では, p 波および, p 波の生成の為に c 波, d 波, e 波の伝播のみを表している.

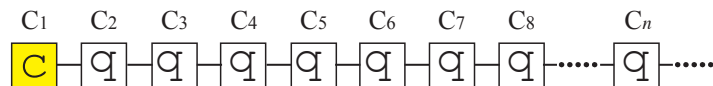


図 3.22 初期計算状況

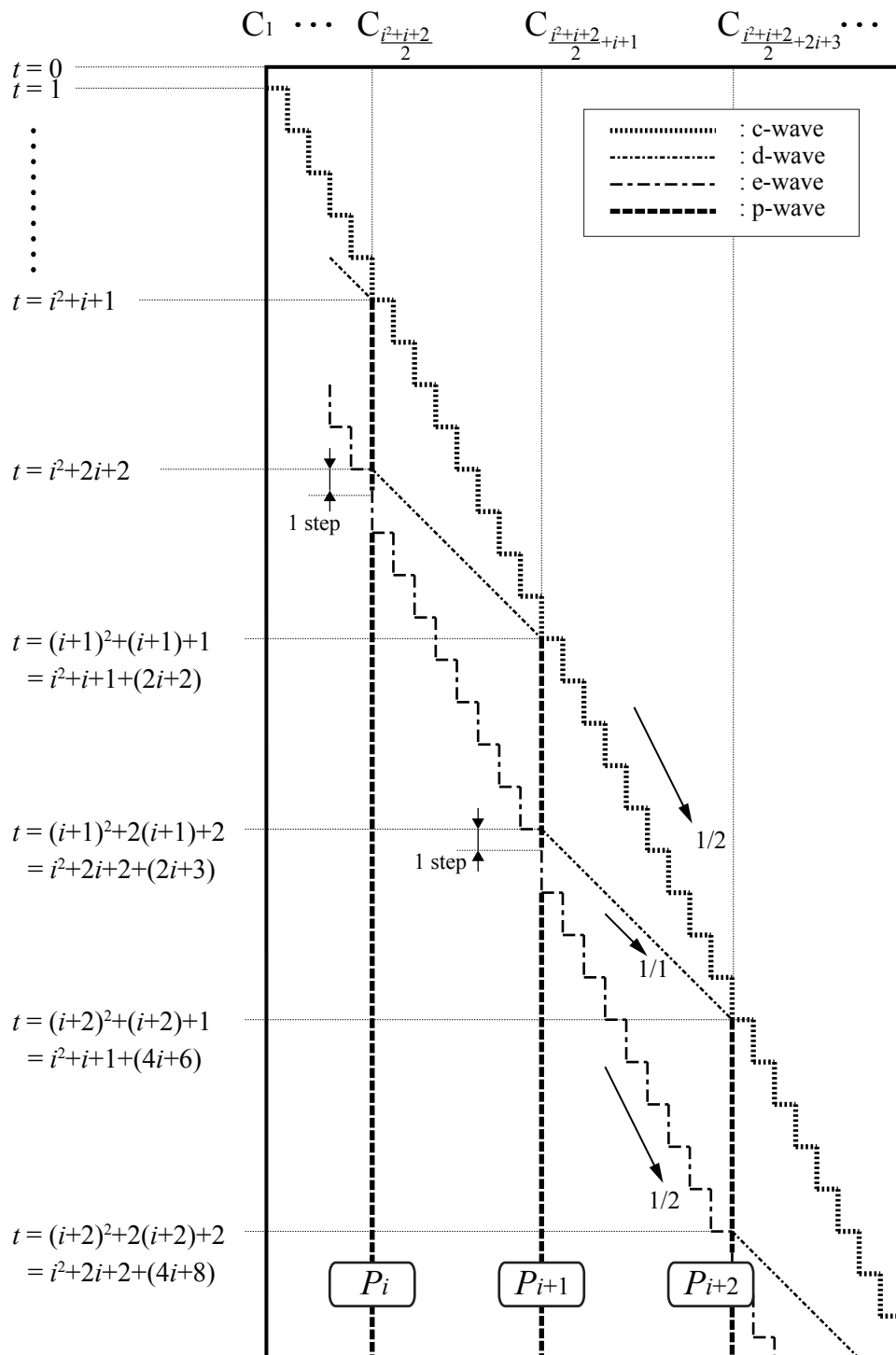


図 3.23 p 波の生成の為の時間-空間図

時刻 $t=0$ 時にセル C_2 で $c \ q \ q \rightarrow b$ が適用され、次のステップに内部状態が b に遷移する。時刻 $t=1$ 時に C_2 で $a \ b \ q \rightarrow c$ が適用され、次のステップに内部状態が c に遷移する。時刻 $t=2$ 時に C_3 で $c \ q \ q \rightarrow b$ が適用され、次のステップに内部状態が b に遷移する。時刻 $t=3$ 時にセル C_3 で $p \ b \ q \rightarrow c$ が適用され、次のステップに内部状態が c に遷移する。これらの遷移規則を連続して適用する事で、2ステップにつき1セルだけ進行する波が生成される。この状態 b, c で構成される速さ $1/2$ の波を c 波と呼ぶ。 c 波の存在する位置

を時刻 t の関数 $V(t)$ で表すと、 $V(t) = \lceil \frac{t}{2} \rceil + 1$ となる。また、時刻 t 時にセル $C_{V(t)}$ が取る状態を $U(t)$ とすると、 $U(t)$ は以下の通り表すことが出来る。

$$U(t) = \begin{cases} b & (t \bmod 2 = 1) \\ c & (t \bmod 2 = 0) \end{cases}$$

c 波はセル空間を右方向に進み、時刻 $t = i^2 + i + 1$ 時にセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ で速さ $1/1$ で右方向に進む d 波と衝突し、左から数えて i 番目の p 波 P_i がセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ に生成される。衝突の際に、d 波は消滅するが、c 波はセル空間を右方向に進み続ける。 P_i はその場にとどまり続け、e 波と衝突することで、時刻 $t = i^2 + 2i + 2$ 時に d 波を、1 ステップ後の時刻 $t = i^2 + 2i + 2 + 1$ 時に e 波を生成する。セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ で生成された d 波が c 波と衝突することでセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}+i+1}$ に P_{i+1} が生成され、セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ で生成された e 波が P_{i+1} に衝突することで P_{i+2} を生成するための d 波、e 波が生成される。この様に c 波、d 波、e 波を伝播させることで、全ての P_i を生成することが可能となる。

次に、p 波の生成についての正当性について考える。時刻 $t = 0$ の時、 M は以下の状態をとる。

$$t = 0 : \begin{array}{cc} [1] & [2, \dots] \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ c & q, \dots \end{array}$$

時刻 $t = 26$ までは、p 波の生成の為に c 波、d 波、e 波と数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成の為に a 波、b 波が混在する為、それぞれを独立したアルゴリズムとして考えることが出来ない。よって、 $t = 0$ から $t = 26$ までの P_1, P_2 の生成および数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成についてはアルゴリズムに沿わず、内部状態のみで実現する。 $t = 0 \sim 26$ では表 3.33 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_3 (\mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}_{n^3})$ が使用され、 M は図 3.24 に示す様に遷移を行う。

以上より、次の補題を得る。

補題 3.2.17 状態遷移規則集合 \mathcal{R}_3 により、セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 1, 8$ 時に a をとり、時刻 $t = 1, 8$ 時以外は a をとらない。また、時刻 $t = 17$ 時、時刻 $t = 26$ 時に M はそれぞれ以下の状態をとる。

$$t = 17 : \begin{array}{cccccc} [1, \dots, 3] & [4] & [5, 6] & [7] & [8, 9] & [10] & [11, \dots] \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} \\ q, \dots, q & e & qq & a & qq & b & q, \dots \end{array}$$

$$t = 26 : \begin{array}{cccccc} [1, \dots, 6] & [7] & [8, 10] & [11] & [12, 13] & [14] & [15, \dots] \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} & \underbrace{\hspace{0.5cm}} \\ f, \dots, f & p & q, \dots, q & a & qq & c & q, \dots \end{array}$$

時刻 $t = 17$ 時にはセル C_4 上に P_2 、セル C_7 上に P_3 が存在し、時刻 $t = 26$ 時には P_2 が消滅し、セル C_7 上に P_3 、セル C_{11} 上に P_4 が存在する。

次に、時刻 $t = 26$ 以降の p 波の生成を考える。

補題 3.2.18 l を 3 以上の任意の自然数 ($l \geq 3$) とする。セル $C_{\frac{\ell^2+\ell+2}{2}}$ に P_ℓ が存在し、時刻 $t = \ell^2 + 2\ell + 2$ 時にセル $C_{\frac{\ell^2+\ell+2}{2}}$ が内部状態 a をとると、時刻 $t = \ell^2 + \ell + 1 + (2\ell + 2)$ 時にセル $C_{\frac{\ell^2+\ell+2}{2}+\ell+1}$ に $P_{\ell+1}$ が生成され、時刻 $t = \ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3)$ 時にセル $C_{\frac{\ell^2+\ell+2}{2}+\ell+1}$ が内部状態 a をとる。 M は時刻 $t = \ell^2 + 2\ell + 2$ 時、 $t = \ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3)$ 時にそれぞれ以下の状態をとる。

表 3.33 状態遷移規則集合 \mathcal{R}_3

q d d \rightarrow d;	\$ b p \rightarrow c;	d b a \rightarrow b;	q c q \rightarrow q;
\$ a b \rightarrow b;	q c a \rightarrow q;	q c c \rightarrow q;	d b e \rightarrow c;
\$ a f \rightarrow q;	d a q \rightarrow b;	\$ q q \rightarrow q;	q c e \rightarrow q;
q b q \rightarrow c;	q c p \rightarrow q;	\$ q c \rightarrow q;	e p q \rightarrow p;
\$ q d \rightarrow p;	\$ q e \rightarrow p;	\$ q f \rightarrow f;	e p c \rightarrow p;
q b e \rightarrow c;	\$ q p \rightarrow q;	d q b \rightarrow q;	q a q \rightarrow p;
q b p \rightarrow c;	d q c \rightarrow q;	q q q \rightarrow q;	q q a \rightarrow q;
q q b \rightarrow q;	e e q \rightarrow e;	q q c \rightarrow q;	e e a \rightarrow e;
q q d \rightarrow d;	q q e \rightarrow e;	q q f \rightarrow f;	a f b \rightarrow c;
e e e \rightarrow e;	q q p \rightarrow q;	a c q \rightarrow a;	a b q \rightarrow c;
e a b \rightarrow p;	e a c \rightarrow e;	f p q \rightarrow p;	e q q \rightarrow q;
f f q \rightarrow f;	f f b \rightarrow f;	b p q \rightarrow p;	b p b \rightarrow p;
b p c \rightarrow p;	a q q \rightarrow a;	f f f \rightarrow f;	f f p \rightarrow f;
a q b \rightarrow a;	a q c \rightarrow a;	b e a \rightarrow e;	b e p \rightarrow e;
f b a \rightarrow b;	b c q \rightarrow p;	f a q \rightarrow f;	f b p \rightarrow c;
f a c \rightarrow b;	f q q \rightarrow f;	b a q \rightarrow e;	b a b \rightarrow p;
b a c \rightarrow e;	c p q \rightarrow a;	f q p \rightarrow f;	c p c \rightarrow a;
b q q \rightarrow q;	p e q \rightarrow f;	p e e \rightarrow p;	p d q \rightarrow e;
p d d \rightarrow p;	c e e \rightarrow b;	p c q \rightarrow q;	c e p \rightarrow b;
p c e \rightarrow q;	p b q \rightarrow c;	p b a \rightarrow b;	p b e \rightarrow c;
p a q \rightarrow b;	c c p \rightarrow c;	p q q \rightarrow q;	c a q \rightarrow d;
p q b \rightarrow q;	\$ p d \rightarrow q;	p q c \rightarrow q;	\$ p e \rightarrow q;
\$ f a \rightarrow q;	c q q \rightarrow b;	\$ f f \rightarrow a;	q p q \rightarrow p;
q p a \rightarrow p;	q p b \rightarrow p;	q p c \rightarrow p;	q p d \rightarrow q;
q p e \rightarrow q;	q f q \rightarrow f;	q f a \rightarrow f;	\$ c q \rightarrow a;
d d q \rightarrow d;	q f f \rightarrow f;	q e q \rightarrow e;	d d b \rightarrow d;
d d c \rightarrow d;	d d d \rightarrow d;	q e e \rightarrow e;	\$ c p \rightarrow f;
\$ b c \rightarrow b;	q d a \rightarrow d;	d c e \rightarrow q;	

$$t = \ell^2 + 2\ell + 2 : \dots \underbrace{\left[\frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} \right]}_a \underbrace{\left[\frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} + 1, V(\ell^2 + 2\ell + 2) - 1 \right]}_{q, \dots, q} \underbrace{\left[V(\ell^2 + 2\ell + 2) \right]}_{U(\ell^2 + 2\ell + 2)} \underbrace{\left[V(\ell^2 + 2\ell + 2) + 1, \dots \right]}_{q, \dots}$$

$$t = \ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3) : \dots \underbrace{\left[\frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} \right]}_p \underbrace{\left[\frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} + 1, \frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} + \ell + 1 - 1 \right]}_{q, \dots, q} \underbrace{\left[\frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} + \ell + 1 \right]}_a \underbrace{\left[\frac{\ell^2 + \ell + 2}{2} + \ell + 1 + 1, V(\ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3)) - 1 \right]}_{q, \dots, q}$$

$$\underbrace{\left[V(\ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3)) \right]}_{U(\ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3))} \underbrace{\left[V(\ell^2 + 2\ell + 2 + (2\ell + 3)) + 1, \dots \right]}_{q, \dots}$$

【証明】

(I) 補題 3.2.17 より, $\ell = 3$ の場合は成立する.

(II) k を任意の自然数 ($k \geq 3$) とする. $\ell = k$ の場合, M は以下の状態をとると仮定する.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
1	a	b	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
2	b	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
3	b	p	b	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
4	c	p	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
5	f	a	q	b	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
6	q	f	a	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
7	f	f	b	a	b	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
8	a	f	b	p	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
9	q	c	c	p	q	b	q	q	q	q	q	q	q	q	q
10	q	q	c	a	q	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q
11	q	q	q	d	a	q	b	q	q	q	q	q	q	q	q
12	q	q	d	d	b	a	c	q	q	q	q	q	q	q	q
13	q	d	d	d	b	e	a	b	q	q	q	q	q	q	q
14	p	d	d	d	c	e	p	c	q	q	q	q	q	q	q
15	q	p	d	d	q	b	p	q	b	q	q	q	q	q	q
16	q	q	p	d	q	c	p	q	c	q	q	q	q	q	q
17	q	q	q	e	q	q	a	q	q	b	q	q	q	q	q
18	q	q	e	e	q	q	p	a	q	c	q	q	q	q	q
19	q	e	e	e	q	q	p	b	a	q	b	q	q	q	q
20	p	e	e	e	q	q	p	b	e	a	c	q	q	q	q
21	q	p	e	e	q	q	p	c	e	e	a	b	q	q	q
22	q	q	p	e	q	q	p	q	b	e	p	c	q	q	q
23	q	q	q	f	q	q	p	q	c	e	p	q	b	q	q
24	q	q	f	f	f	q	p	q	q	b	p	q	c	q	q
25	q	f	f	f	f	f	p	q	q	c	p	q	q	b	q
26	f	f	f	f	f	f	p	q	q	q	a	q	q	c	q

図 3.24 時刻 $t = 26$ までのシミュレーション状況

$$\begin{aligned}
 t = k^2 + 2k + 2 : \dots & \underbrace{\dots}_{a} \underbrace{\dots}_{q, \dots, q} \underbrace{\dots}_{U(k^2 + 2k + 2)} \underbrace{\dots}_{q, \dots} \\
 t = k^2 + 2k + 2 & \underbrace{\dots}_{p} \underbrace{\dots}_{q, \dots, q} \underbrace{\dots}_{a} \underbrace{\dots}_{q, \dots, q} \\
 + (2k + 3) & \underbrace{\dots}_{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3))} \underbrace{\dots}_{q, \dots}
 \end{aligned}$$

P_{k+2} の生成はセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+k+1}$ より右側の領域で行われる. 表 3.34 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_4(\mathcal{R}_4 \subset \mathcal{R}_{n^3})$ が使用され, M は以下の通り遷移する.

表 3.34 状態遷移規則集合 \mathcal{R}_4

q c q \rightarrow q;	q c e \rightarrow q;	q b q \rightarrow c;	q c p \rightarrow q;
e p q \rightarrow p;	e p c \rightarrow p;	q b e \rightarrow c;	q a q \rightarrow p;
q b p \rightarrow c;	q q q \rightarrow q;	q q a \rightarrow q;	q q b \rightarrow q;
q q c \rightarrow q;	e e a \rightarrow e;	e e e \rightarrow e;	q q p \rightarrow q;
e e p \rightarrow e;	a c q \rightarrow a;	e a q \rightarrow e;	a b q \rightarrow c;
e a b \rightarrow p;	e a c \rightarrow e;	b p q \rightarrow p;	a q q \rightarrow a;
a q b \rightarrow a;	a q c \rightarrow a;	b e a \rightarrow e;	b e e \rightarrow e;
b e p \rightarrow e;	b a q \rightarrow e;	c p q \rightarrow a;	b q q \rightarrow q;
c e e \rightarrow b;	p c q \rightarrow q;	c e p \rightarrow b;	p c e \rightarrow q;
p b a \rightarrow b;	p b e \rightarrow c;	p a q \rightarrow b;	p q q \rightarrow q;
p q b \rightarrow q;	p q c \rightarrow q;	c q q \rightarrow b;	q p q \rightarrow p;
q p a \rightarrow p;	q p b \rightarrow p;	q p c \rightarrow p;	

$$t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \right]}_a \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1, V(k^2+2k+2+(2k+3))-1 \right]}_{q, \dots, q} \overbrace{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3))}^{[V(k^2+2k+2+(2k+3))]-1}$$

$$\underbrace{[V(k^2+2k+2+(2k+3))+1, \dots]}_{q, \dots}$$

$$t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 1 : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \right]}_p \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1 \right]}_a \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 2, V(k^2+2k+2+(2k+3)+1)-1 \right]}_{q, \dots, q}$$

$$\overbrace{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 1)}^{[V(k^2+2k+2+(2k+3)+1)]} \underbrace{[V(k^2+2k+2+(2k+3)+1)+1, \dots]}_{q, \dots}$$

$$t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 2 : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \right]}_p \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1 \right]}_b \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 2 \right]}_a \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 3, V(k^2+2k+2+(2k+3)+2)-1 \right]}_{q, \dots, q}$$

$$\overbrace{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 2)}^{[V(k^2+2k+2+(2k+3)+2)]} \underbrace{[V(k^2+2k+2+(2k+3)+2)+1, \dots]}_{q, \dots}$$

$$t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 3 : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \right]}_p \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1 \right]}_b \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 2 \right]}_q \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 3 \right]}_a$$

$$\underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 4, V(k^2+2k+2+(2k+3)+3)-1 \right]}_{q, \dots, q} \overbrace{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 3)}^{[V(k^2+2k+2+(2k+3)+3)]}$$

$$\underbrace{[V(k^2+2k+2+(2k+3)+3)+1, \dots]}_{q, \dots}$$

$$\begin{aligned}
t = k^2 + 2k + 2 & : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \right]}_p \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1 \right]}_c \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 2, \frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 3 \right]}_{qq} \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 4 \right]}_a \\
& + (2k + 3) + 4 : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 5, V(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 4) - 1 \right]}_{q, \dots, q} \\
& \underbrace{\left[V(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 4) \right]}_{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 4)} \\
& \underbrace{\left[V(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 4) + 1, \dots \right]}_{q, \dots}
\end{aligned}$$

右方向に 1 ステップにつき 1 セルだけ伝播している状態 a が d 波であり, 右方向に 2 ステップに 1 セルだけ伝播している状態 b, c が e 波である. e 波は時刻 $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 3$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+k+1+1}$ に現れる. d 波, e 波はセル空間を右方向に進み, d 波は c 波に追いつき衝突したセルに P_{k+2} を生成する. 衝突時, d 波は消滅し, c 波は右方向に進み続ける. h を自然数 ($h \geq 1$) とし, c 波と d 波がセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+k+1+h}$ で衝突したとする. d 波の速さは $1/1$ であるので, 時刻 $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3)$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+k+1}$ で生成された d 波は, 時刻 $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + h$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+k+1+h}$ に到達する. $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + h$ 時に c 波は P_{k+2} の右隣のセルに存在するので, $V(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + h) - 1 = \frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + h$ となり, $h = k + 2$ となる. 以上より, 時刻 $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + k + 2 = k^2 + k + 1 + (4k + 6)$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+2k+3}$ 上に P_{k+2} が生成される. この時のセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+2k+3}$ の内部状態は p となり, 遷移規則 $q p q \rightarrow p$ により, 内部状態は p を維持し続ける. 次に P_{k+2} と e 波の衝突について考える. e 波は時刻 $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 3$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+k+1+1}$ に現れ, 右方向に進む. e 波は速さ $1/2$ であるので, e 波が P_{k+2} に到達するには, $2 \cdot \left\{ \left(\frac{k^2+k+2}{2} + 2k + 3 \right) - \left(\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1 \right) \right\} = 2k + 2$ ステップ必要となる. よって, 時刻 $t = k^2 + 2k + 2 + (2k + 3) + 3 + 2k + 2 = k^2 + 2k + 2 + (4k + 8)$ 時に e 波はセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}+2k+3}$ 上の P_{k+2} に到達し, M は以下の状態をとる.

$$\begin{aligned}
t = k^2 + 2k + 2 & : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 \right]}_p \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + k + 1 + 1, \frac{k^2+k+2}{2} + 2k + 3 - 1 \right]}_{q, \dots, q} \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + 2k + 3 \right]}_a \\
& + (4k + 8) : \dots \underbrace{\left[\frac{k^2+k+2}{2} + 2k + 3 + 1, V(k^2 + 2k + 2 + (4k + 8)) - 1 \right]}_{q, \dots, q} \underbrace{\left[V(k^2 + 2k + 2 + (4k + 8)) \right]}_{U(k^2 + 2k + 2 + (2k + 3))} \underbrace{\left[V(k^2 + 2k + 2 + (4k + 8)) + 1, \dots \right]}_{q, \dots}
\end{aligned}$$

以上より, $\ell = k$ の場合に成立すると仮定すると, $\ell = k + 1$ の場合も成立する.

(I), (II) より, 3 以上のすべての ℓ において補題 3.2.18. が成立する. \square

補題 3.2.17 によりセル C_1 の内部状態は時刻 $t = 1, 8$ 時に a の生成が, 補題 3.2.17, 補題 3.2.18 により $i \geq 3$ となる P_i の生成が, 補題 3.2.16 により P_i 設置後の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成がそれぞれ実現可能であることが示される. 以上より以下の定理を得る.

定理 3.2.19 遷移規則集合 R_{n^3} により, CA 上で数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する事ができる.

コンピュータ上に表 3.29 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_{n^3} を実装し, $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い, 正当性を確認した. 図 3.25 に時刻 $t = 0 \sim 65$ のシミュレーション結果を示す.

3.3 CA_{1-bit} 上の数列生成問題

$\{y(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とすると, 任意の自然数 n について, $t = y(n)$ 時のみにセル C_1 から左側に信号'1' が出力されると, M は実時間で, 数列 $\{y(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う.

3.3.1 数列生成能力

3.3.1.1 1 状態 CA_{1-bit} で生成可能な数列

M を 1 状態 CA_{1-bit} とし, $M = (Q, \delta(q, 0, 0) = (q, 0, 0), \delta(q, 1, 0) = (q, a, b), \delta(q, 0, 1) = (q, c, d), \delta(q, 1, 1) = (q, e, f)), Q = \{q\}, a, b, c, d, e, f \in \{0, 1\}$ とする. M の初期計算状況, すなわち, 時刻 $t = 0$ の M は図 3.26 に示す様に, 全てのセルの内部状態は静止状態 q をとり, $t = 0$ 時のみ 1 ビットの信号'1' が外界から C_1 の左側に入力される.

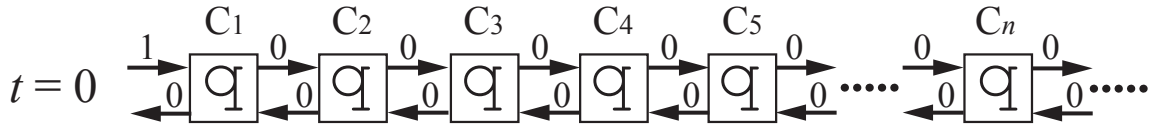


図 3.26 1 状態 CA_{1-bit} の場合の初期計算状況

1 状態 CA_{1-bit} で生成可能な全ての数列を表 3.35 に示す.

表 3.35 に示される Rule no. は遷移規則を識別する番号であり, 以下の通り定義される.

$$\text{Rule no.} = f \cdot 2^5 + e \cdot 2^4 + d \cdot 2^3 + c \cdot 2^2 + b \cdot 2^1 + a \cdot 2^0 + 1$$

また, ”-”は常に C_1 が左側に信号'0' を出力する, すなわち, 数列を生成しない遷移規則集合を示す.

3.3.1.2 2 状態 CA_{1-bit} で生成可能な数列

次に 2 状態 CA_{1-bit} で生成可能な数列を考える. M を 2 状態 CA_{1-bit} とし, $M = (Q, \delta), Q = \{q, a\}$ とする. M の初期計算状況については, 1 状態 CA_{1-bit} の場合と同一である. k を自然数とし, $k \geq 1$ とした場合, 状態遷移関数 δ はセル C_k の内部状態と左右のセルから入力される 1 ビット信号を入力とし, 出力として 1 ステップ後のセル C_k の内部状態と左右のセルに出力する 1 ビット信号を与える. ただし, 静止状態 q については, $\delta(q, 0, 0) = (q, 0, 0)$ をあらかじめ定義している. よって, δ の入力は $(2 \cdot 2 \cdot 2) - 1 = 7$ 通りとなり, 出力は $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ 通りとなる. よって, 2 状態 CA のとりうる遷移規則集合は $8^7 = 2,097,152$ 通りとなる. コンピュータを使用し, 2,097,152 通りの遷移規則集合に対してシミュレートを行い, 生成される数列の特徴付けを行った. 表 3.36 に 2 状態 CA_{1-bit} で生成される数列のクラスをそれぞれ示す.

数列生成の例として, 表 3.42 に数列 $\{\frac{6+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} - 2 \cdot n - 3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成の為の遷移規則集合, 図 3.27 にシミュレーション結果を, 表 3.38 に数列 $\{n^2 - n + 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成の為の遷移規則集合, 図 3.28 にシミュレーション結果を示す.

3.3.1.3 CA と CA_{1-bit} の数列生成能力の比較

CA_{1-bit} は最も単純で能力が低い CA のモデルであると考えられていたが, 状態数が 2 以下であれば, CA_{1-bit} が CA より複雑な数列を生成可能であるという結果を得た. 状態数が 2 以下の場合, CA_{1-bit} が CA より複雑な数列を生成可能となる理由を CA_{1-bit} の”出力信号の非対称性”と CA_{1-bit} の”内部状態と出力信号の相違性”

表 3.35 1 状態 CA_{1-bit} で生成可能な数列

Rule no.	Sequence	Rule no.	Sequence
1	-	33	-
2	-	34	-
3	-	35	-
4	-	36	-
5	{1}	37	{1}
6	{1}	38	{1}
7	{1}	39	{1}
8	{1}	40	{1}
9	-	41	-
10	-	42	-
11	-	43	-
12	-	44	-
13	{1}	45	{1}
14	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	46	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}
15	{1}	47	{1}
16	{2 ⁿ - 1 n = 1, 2, 3, ...}	48	{1, 3}
17	-	49	-
18	-	50	-
19	-	51	-
20	-	52	-
21	{1}	53	{1}
22	{1}	54	{1}
23	{1}	55	{1}
24	{1}	56	{1}
25	-	57	-
26	-	58	-
27	-	59	-
28	-	60	-
29	{1}	61	{1}
30	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	62	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}
31	{1}	63	{1}
32	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}	64	{2n - 1 n = 1, 2, 3, ...}

表 3.36 2 状態 CA_{1-bit} で生成される数列のクラス

Class	Type	Sequence
1	有限数列	例) {1}, {1, 3}
2	$a \cdot n + b$	例) $\{n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{3 \cdot n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
3	$a \cdot 2^n + b$	$\{2^n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{2^n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{2 \cdot 2^n - 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{2 \cdot 2^n - 3 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{4 \cdot 2^n - 3 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{\frac{3}{2} \cdot 2^n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{\frac{3}{2} \cdot 2^n - 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{\frac{5}{2} \cdot 2^n - 4 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{\frac{9}{2} \cdot 2^n - 4 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
4	$a \cdot 2^n + b \cdot n + c$	$\{7 \cdot 2^n - 4 \cdot n - 8 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{\frac{7}{2} \cdot 2^n - 4 \cdot n - 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
5	$n^2 - n + 1$	$\{n^2 - n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
6	$\frac{6+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} - 2 \cdot n - 3$	$\{\frac{6+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1} - 2 \cdot n - 3 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
7	その他	一般項で表すことが出来ない数列

表 3.37 数列 $\left\{ \frac{6+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - 2 \cdot n - 3 \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ 生成のための状態遷移規則集合

1	q	Right Input	
		0	1
	Left Input	0	1
	0	(q, 0, 0)	(a, 1, 1)
	1	(q, 1, 1)	(q, 1, 1)

2	a	Right Input	
		0	1
	Left Input	0	1
	0	(a, 0, 0)	(q, 0, 0)
	1	(a, 0, 1)	(q, 0, 1)

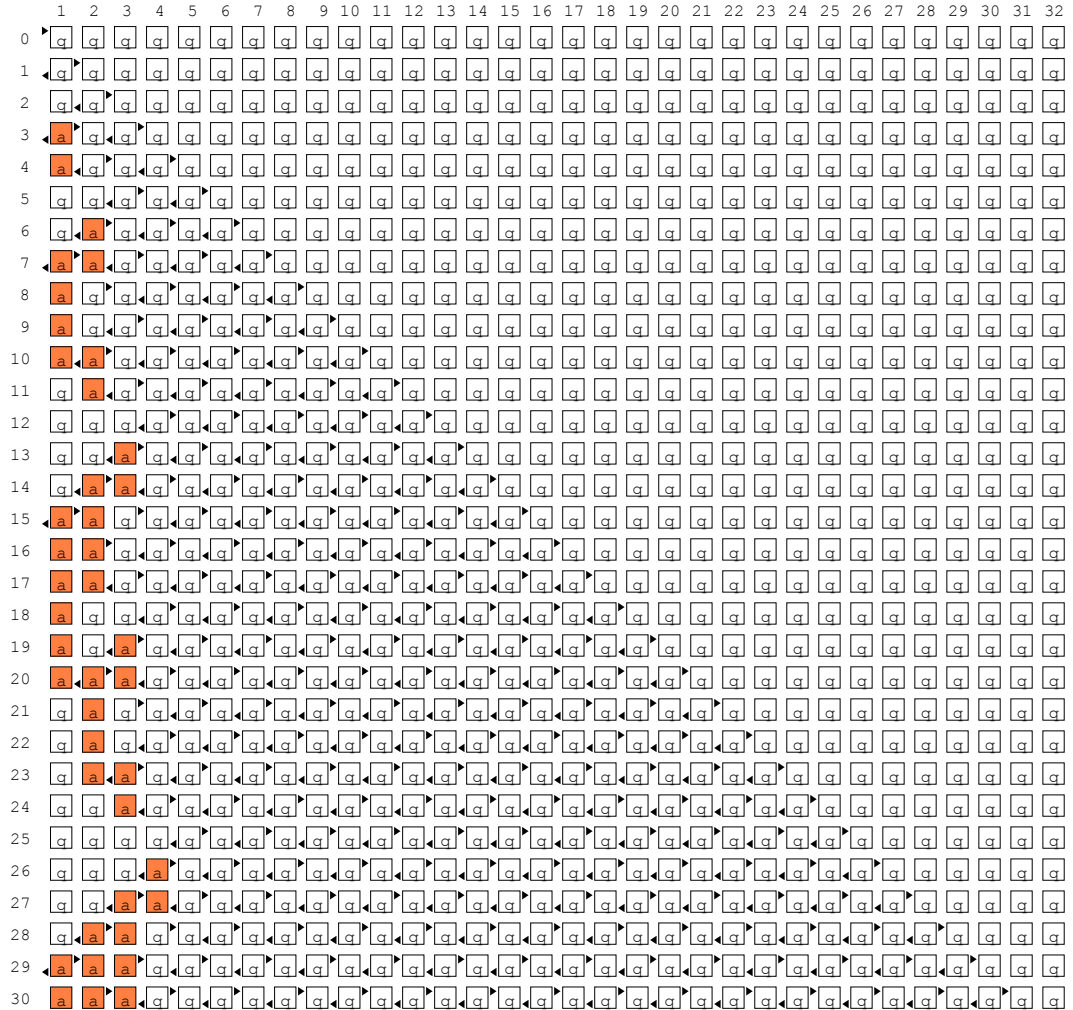


図 3.27 数列 $\left\{ \frac{6+2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{6-2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}+5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - 2 \cdot n - 3 \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ 生成のシミュレーション結果

表 3.38 数列 $\{n^2 - n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合

1	q	Right Input	
		0	1
	Left Input	0	1
	0	(q, 0, 0)	(a, 0, 0)
	1	(a, 1, 1)	(q, 1, 1)

2	a	Right Input	
		0	1
	Left Input	0	1
	0	(a, 0, 0)	(q, 1, 1)
	1		(a, 1, 1)

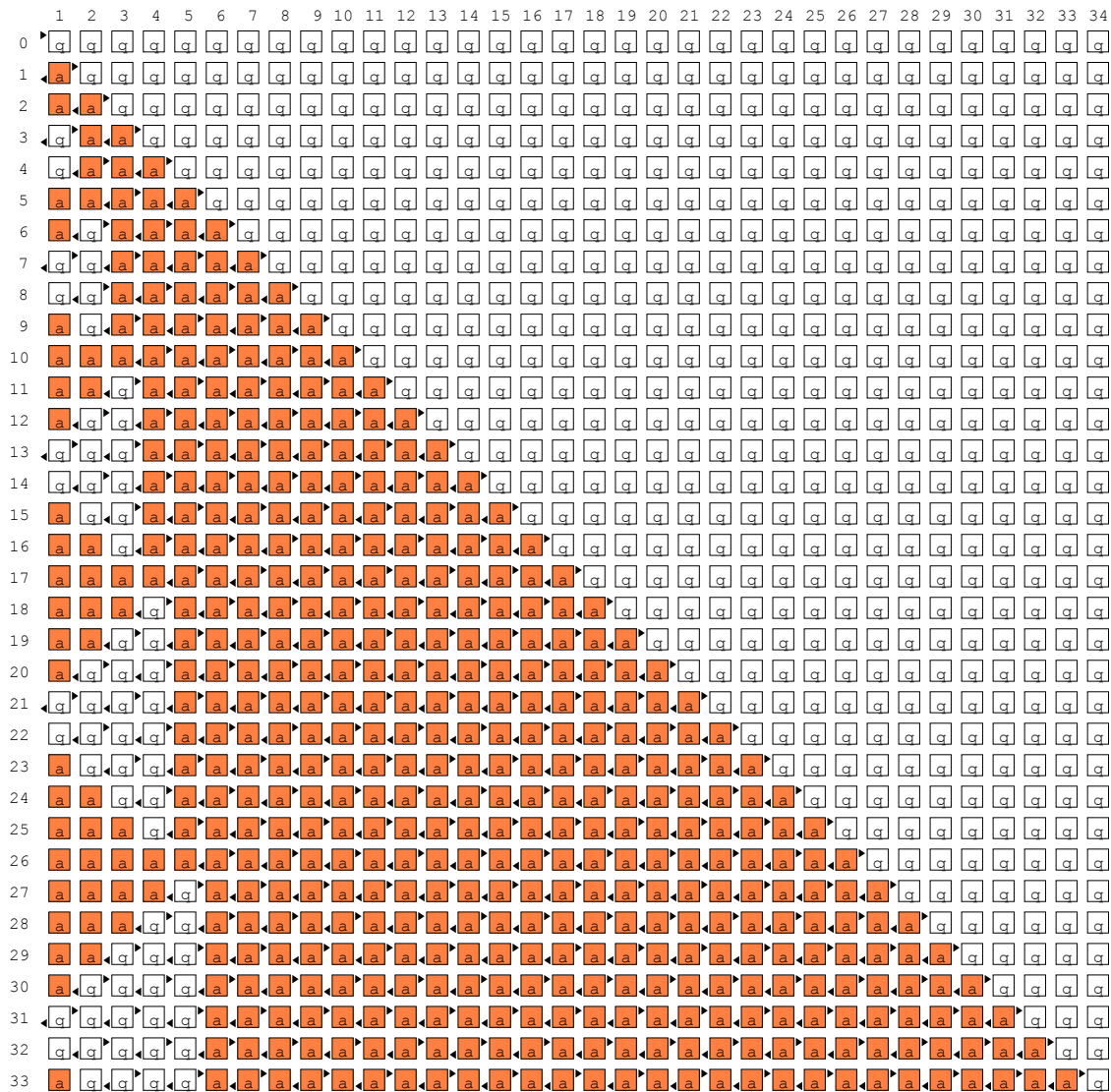


図 3.28 数列 $\{n^2 - n + 1 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のシミュレーション結果

にあると考える。 $|Q|$ 状態の CA の場合、セルは自らの内部状態を $\lceil \log_2 |Q| \rceil$ ビットの信号にエンコードし、左右のセルに同じ $\lceil \log_2 |Q| \rceil$ ビット信号を出力していると考えられる。

M を 2 状態の CA とし、 $M = (Q, \delta)$ 、 $Q = \{q, a\}$ とする。状態 q に '0'、 a に '1' を割り当てると、セルが取りうる内部状態と出力信号の組み合わせは 2 通り ($\{q, 0, 0\}$, $\{a, 1, 1\}$) となる。次に $CA_{1\text{-bit}}$ の場合を考える。 A を 2 状態の $CA_{1\text{-bit}}$ とする。 A を定式化すると、 $A = (Q, \delta)$ 、 $Q = \{q, a\}$ となる。 $CA_{1\text{-bit}}$ の場合、左右のセルに異なる信号を出力することが可能である (出力信号の非対称性)。 よって出力信号の組み合わせは 4 通り ($\{0, 0\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 0\}$, $\{1, 1\}$) となる。 また、 $CA_{1\text{-bit}}$ は内部状態に関わらず、出力信号を設定することが可能である (内部状態と出力信号の相違性)。 以上より、セルが取りうる内部状態と出力信号の組み合わせは 8 通り ($\{q, 0, 0\}$, $\{q, 0, 1\}$, $\{q, 1, 0\}$, $\{q, 1, 1\}$, $\{a, 0, 0\}$, $\{a, 0, 1\}$, $\{a, 1, 0\}$, $\{a, 1, 1\}$) となる。 また、 1 状態 CA の場合は 1 通り ($\{q, 0, 0\}$)、 1 状態 $CA_{1\text{-bit}}$ の場合は 4 通り ($\{q, 0, 0\}$, $\{q, 0, 1\}$, $\{q, 1, 0\}$, $\{q, 1, 1\}$) となる。

内部状態数が 2 以下の場合、セル間通信量を 1 ビットに制限したとしても、現在の内部状態を隣接するセルに時間遅れなしに伝えることが可能であるので、 2 状態 $CA_{1\text{-bit}}$ は 2 状態 CA と同等の機能を持つ。 それに加え $CA_{1\text{-bit}}$ の特徴である出力信号の非対称性と内部状態と出力信号の相違性により、取りうる内部状態と出力

信号の組み合わせが増加し、結果として、2 状態以下であれば CA_{1-bit} が 2 状態 CA より複雑な数列を生成可能である。

3.3.2 数列生成アルゴリズム

本項では、3.2.3 項で述べた数列生成アルゴリズムの CA_{1-bit} 上での実現について述べる。表 3.39 に 3.2.3 項で示した CA のアルゴリズムと、本項で設計した CA_{1-bit} のアルゴリズムを示す。

表 3.39 本研究で設計した数列生成アルゴリズム

	3.2.3 項で示したアルゴリズム		CA _{1-bit} 上のアルゴリズム	
	内部状態数	生成時間	内部状態数	生成時間
数列 $\{2^n n = 1, 2, 3, \dots\}$	3	実時間	2	実時間
	4	実時間	4	実時間
数列 $\{n^2 n = 1, 2, 3, \dots\}$	3	実時間	3	実時間
Fibonacci 数列	5	実時間	9	実時間
数列 $\{3^n n = 1, 2, 3, \dots\}$	3	実時間	3	実時間
数列 $\{n^3 n = 1, 2, 3, \dots\}$	8	実時間		-

これらの数列生成アルゴリズムでは、図 3.29 に示す初期計算状況をとる。

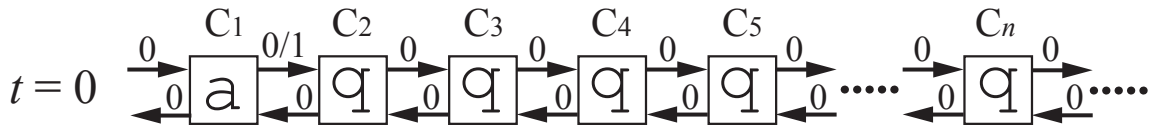


図 3.29 CA_{1-bit} 上の数列生成アルゴリズムの初期計算状況

時刻 $t = 0$ 時に、セル C_1 以外の全てのセルが静止状態 q をとる。 C_1 の内部状態、右方向への出力は自由に設定することが出来る。

3.3.2.1 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ (4 状態アルゴリズム)

M を 4 状態 CA_{1-bit} とし、 $M = (Q, \delta)$ 、 $Q = \{q, a, b, r\}$ とし、以下の初期計算状況をとるとする。

$$t = 0 : \underbrace{q}_{[1]} \blacktriangleright \underbrace{q \dots}_{[2, \dots]}$$

数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.40 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit, 4State)}$ を持つ M により生成される。

表 3.40 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit, 4State)}$

1	<table border="1"> <tr> <td rowspan="2">q</td> <td colspan="2">Right Input</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">Left Input</td> <td>0</td> <td>(q, 0, 0)</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>(q, 1, 1)</td> </tr> </table>	q	Right Input		0	1	Left Input	0	(q, 0, 0)	1	(q, 1, 1)	2	<table border="1"> <tr> <td rowspan="2">a</td> <td colspan="2">Right Input</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">Left Input</td> <td>0</td> <td>(b, 0, 0)</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>(b, 0, 0)</td> </tr> </table>	a	Right Input		0	1	Left Input	0	(b, 0, 0)	1	(b, 0, 0)	3	<table border="1"> <tr> <td rowspan="2">b</td> <td colspan="2">Right Input</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">Left Input</td> <td>0</td> <td>(b, 0, 1)</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>(r, 0, 0)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">Left Input</td> <td>0</td> <td>(b, 1, 1)</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>(r, 0, 1)</td> </tr> </table>	b	Right Input		0	1	Left Input	0	(b, 0, 1)	1	(r, 0, 0)	Left Input	0	(b, 1, 1)	1	(r, 0, 1)
q	Right Input																																							
	0	1																																						
Left Input	0	(q, 0, 0)																																						
	1	(q, 1, 1)																																						
a	Right Input																																							
	0	1																																						
Left Input	0	(b, 0, 0)																																						
	1	(b, 0, 0)																																						
b	Right Input																																							
	0	1																																						
Left Input	0	(b, 0, 1)																																						
	1	(r, 0, 0)																																						
Left Input	0	(b, 1, 1)																																						
	1	(r, 0, 1)																																						
4	<table border="1"> <tr> <td rowspan="2">r</td> <td colspan="2">Right Input</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">Left Input</td> <td>0</td> <td>(r, 0, 0)</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>(r, 1, 0)</td> </tr> <tr> <td rowspan="2">Left Input</td> <td>0</td> <td>(r, 0, 1)</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>(r, 0, 1)</td> </tr> </table>	r	Right Input		0	1	Left Input	0	(r, 0, 0)	1	(r, 1, 0)	Left Input	0	(r, 0, 1)	1	(r, 0, 1)																								
r	Right Input																																							
	0	1																																						
Left Input	0	(r, 0, 0)																																						
	1	(r, 1, 0)																																						
Left Input	0	(r, 0, 1)																																						
	1	(r, 0, 1)																																						

図 3.30 に 4 状態 CA_{1-bit} 上の実時間数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの時間-空間図を示す。

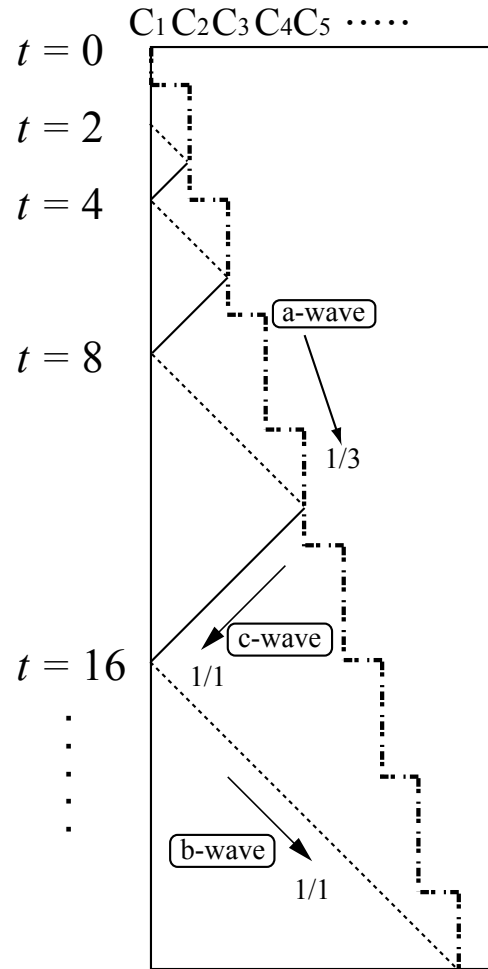


図 3.30 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図

図 3.30 に示す時間-空間図は、3.2.3.1 項の図 3.6 で示した 4 状態 CA 上の実時間数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの時間-空間図と同様の波の伝播を行なう. 3 状態 CA 上での生成と同様に、右方向に速さ $1/3$ で進む a 波、右方向に速さ $1/1$ で進む b 波、左方向に速さ $1/1$ で進む c 波を伝播させ、実時間で数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する. 図 3.30 に数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ のシミュレーション結果を示す.

3.2.3.1 項で示した 4 状態 CA 上での数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成の場合、静止状態 q、状態 a、状態 b により b 波、c 波の伝播を表している. 一方、 $CA_{1\text{-bit}}$ の場合、「内部状態と出力信号の相違性」により、内部状態を変化させずに、1 ビット信号 '1' のみ伝播させることが可能であるので、静止状態 q のみでも波の伝播を実現できる. このことより、セル間通信量と制限している $CA_{1\text{-bit}}$ であっても CA の場合と同様の状態数 4 で数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成が可能となる.

次に、状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1\text{Bit}, 4\text{State})}$ の正当性について考える.

補題 3.3.1 i を任意の自然数とし、 $i \geq 2$ とした場合、時刻 $t = 3 \cdot 2^{i-1}$ 時に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2^i + 2^{i-1} : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2, 2^{i-1}]}_{r \dots r} \underbrace{[2^{i-1}+1]}_{\blacktriangleleft b \blacktriangleright} \underbrace{[2^{i-1}+2, \dots]}_{q \dots}$$

証明

(I) 最初に、 $i = 2$ の場合を考える. 時刻 $t = 0$ 時、 M は以下に示す初期状態を取る.

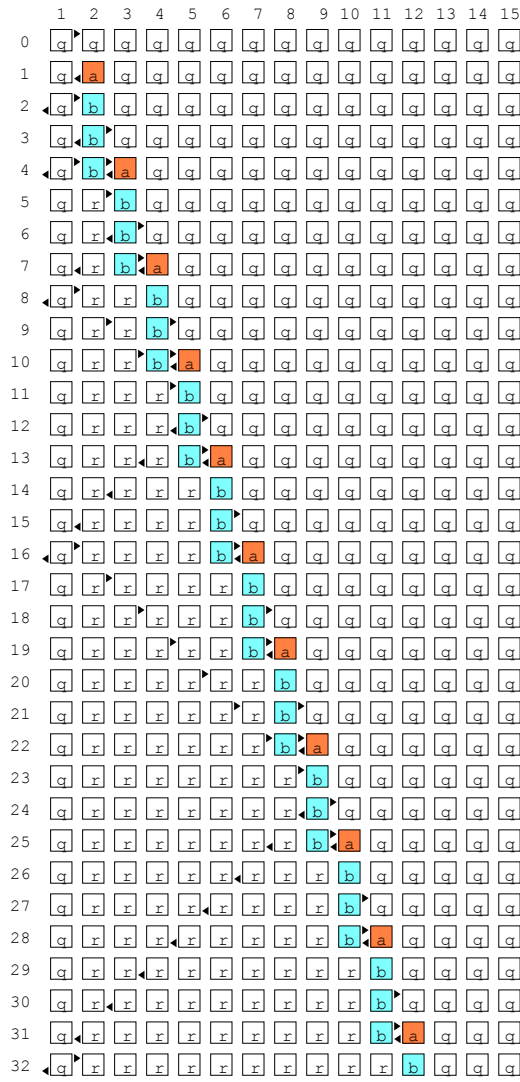


図 3.31 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

$$t = 0 : \underbrace{q}_{[1]} \blacktriangleright \underbrace{q \dots}_{[2, \dots]}$$

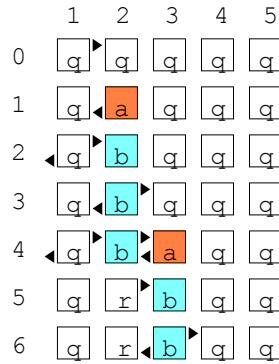
時刻 $t = 0 \sim 6$ までは図 3.41 に示す様にアルゴリズムに沿わず、内部状態、遷移規則で実現する。
時刻 $t = 6$ 時に M は以下の状態をとる。

$$t = 6 : \underbrace{q}_{[1]} \quad \underbrace{r}_{[2]} \quad \underbrace{\blacktriangleleft b \blacktriangleright}_{[3]} \quad \underbrace{q \dots}_{[4, \dots]}$$

(II) j を任意の自然数とし、 $j \geq 1$ とする。 $i = j$ の場合、時刻 $t = 3 \cdot 2^{j-1}$ 時に、 M が以下に示す状態を取ると仮定する。

$$t = 2^j + 2^{j-1} : \underbrace{q}_{[1]} \quad \underbrace{r \dots r}_{[2, 2^{j-1}]} \quad \underbrace{\blacktriangleleft b \blacktriangleright}_{[2^{j-1}+1]} \quad \underbrace{q \dots}_{[2^{j-1}+2, \dots]}$$

表 3.12 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit, 4State)}$ により、 M が以下の様に遷移する。

表 3.41 時刻 $t = 0 \sim 6$ までの遷移

$$\begin{aligned}
 t = 2^j + 2^{j-1} & : \overbrace{[1]}^q \overbrace{[2, 2^{j-1}]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}+1]}{\leftarrow b \rightarrow} \overbrace{[2^{j-1}+2, \dots]}{q \dots} \\
 t = 2^j + 2^{j-1} + 1 & : \overbrace{[1]}^q \overbrace{[2, 2^{j-1}-1]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}]}{\leftarrow r} \overbrace{[2^{j-1}+1]}{b \rightarrow} \overbrace{[2^{j-1}+2]}{\leftarrow a} \overbrace{[2^{j-1}+3, \dots]}{q \dots} \\
 t = 2^j + 2^{j-1} + 2 & : \overbrace{[1]}^q \overbrace{[2, 2^{j-1}-2]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}-1]}{\leftarrow r} \overbrace{[2^{j-1}, 2^{j-1}+1]}{rr} \overbrace{[2^{j-1}+2]}{b} \overbrace{[2^{j-1}+3, \dots]}{q \dots} \\
 t = 2^j + 2^{j-1} + 3 & : \overbrace{[1]}^q \overbrace{[2, 2^{j-1}-3]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}-2]}{\leftarrow r} \overbrace{[2^{j-1}-1, 2^{j-1}+1]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}+2]}{b \rightarrow} \overbrace{[2^{j-1}+3, \dots]}{q \dots} \\
 t = 2^j + 2^{j-1} + 4 & : \overbrace{[1]}^q \overbrace{[2, 2^{j-1}-4]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}-3]}{\leftarrow r} \overbrace{[2^{j-1}-2, 2^{j-1}+1]}{r \dots r} \overbrace{[2^{j-1}+2]}{b \rightarrow} \overbrace{[2^{j-1}+3]}{\leftarrow a} \overbrace{[2^{j-1}+4, \dots]}{q \dots}
 \end{aligned}$$

1ステップにつき1セル、左方向に伝播している1ビット信号'1'の事をc波と呼ぶ。c波は1ステップにつき1セルだけ進むので、速さは1/1である。c波が通過したセルは、状態rを維持し続ける。(a, 1, 0), (b, 0, 0), (b, 0, 1)と遷移し、3ステップにつき1セルだけ右方向に進む1ビット信号'1'をa波と呼ぶ。Nを自然数の集合とし、 $P_a(t) : N \cup \{0\} \rightarrow N$ を時刻t時にa波の存在するセルの位置を表す関数とすると、 $P_a(t) = \lceil \frac{t}{3} \rceil + 1, t \geq 0$ となる。よって、時刻t時にa波はセル $C_{P_a(t)}$ 上に存在する。その時のセル $C_{P_a(t)}$ の内部状態 $S_{P_a(t)}^t$ は以下の通りとなる。

$$S_{P_a(t)}^t = \begin{cases} (a, 1, 0) & t \bmod 3 = 1 \\ (b, 0, 0) & t \bmod 3 = 2 \\ (b, 0, 1) & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

よって、 $S_a(t) : N \cup \{0\} \rightarrow \{a, b, c\}$ を時刻t時のa波が存在するセルの内部状態を表す関数とすると、 $S_a(t)$ は以下の通りとなる。

$$S_a(t) = \begin{cases} (a, 1, 0) & t \bmod 3 = 1 \\ (b, 0, 0) & t \bmod 3 = 2 \\ (b, 0, 1) & t \bmod 3 = 0 \end{cases}$$

a波はセル空間を右方向に速さ1/1で、c波は左方向に速さ1/1で進み続け、a波、b波の通過したセルの内部状態はrを維持し続ける。c波の速さは1/1であるので、セル $C_{2^{j-1}+1}$ で生成されたc波がセル C_1 に到達するには $(2^{j-1} + 1) - 1 = 2^{j-1}$ ステップ必要である。よって、c波がセル C_1 に到達した際、すなわち時刻

$t = 2^j + 2^{j-1} + 2^{j-1} = 2^{j+1}$ 時に M は以下に示す状態をとる.

$$t = 2^{j+1} : \underbrace{\leftarrow q \rightarrow}_{[1]} \quad \underbrace{r \dots r}_{[2, P_a(2^{j+1})-1]} \quad \underbrace{S_a(2^{j+1})}_{[P_a(2^{j+1})]} \quad \underbrace{q \dots}_{[P_a(2^{j+1})+1, \dots]}$$

時刻 $t = 2^{j+1}$ 時にセル C_1 は左右に 1 ビット信号 '1' を出力する. 時刻 $t = 2^{j+1}$ 以降に M は以下の様に遷移する.

$$\begin{aligned} t=2^{j+1} & : \underbrace{\leftarrow q \rightarrow}_{[1]} \quad \underbrace{r \dots r}_{[2, P_a(2^{j+1})-1]} \quad \underbrace{S_a(2^{j+1})}_{[P_a(2^{j+1})]} \quad \underbrace{q \dots}_{[P_a(2^{j+1})+1, \dots]} \\ t=2^{j+1} + 1 & : \underbrace{q \rightarrow}_{[1]} \quad \underbrace{r \rightarrow}_{[2]} \quad \underbrace{r \dots r}_{[3, P_a(2^{j+1}+1)-1]} \quad \underbrace{S_a(2^{j+1} + 1)}_{[P_a(2^{j+1}+1)]} \quad \underbrace{q \dots}_{[P_a(2^{j+1}+1)+1, \dots]} \\ t=2^{j+1} + 2 & : \underbrace{q \rightarrow}_{[1]} \quad \underbrace{r \rightarrow}_{[2]} \quad \underbrace{r \rightarrow}_{[3]} \quad \underbrace{r \dots r}_{[4, P_a(2^{j+1}+2)-1]} \quad \underbrace{S_a(2^{j+1} + 2)}_{[P_a(2^{j+1}+2)]} \quad \underbrace{q \dots}_{[P_a(2^{j+1}+2)+1, \dots]} \\ t=2^{j+1} + 3 & : \underbrace{q \rightarrow}_{[1]} \quad \underbrace{rr \rightarrow}_{[2, 3]} \quad \underbrace{r \rightarrow}_{[4]} \quad \underbrace{r \dots r}_{[5, P_a(2^{j+1}+3)-1]} \quad \underbrace{S_a(2^{j+1} + 3)}_{[P_a(2^{j+1}+3)]} \quad \underbrace{q \dots}_{[P_a(2^{j+1}+3)+1, \dots]} \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 右方向に伝播している 1 ビット信号 '1' を b 波と呼ぶ. b 波が通過したセルは, 状態 r を維持し続ける. b 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, a 波に追いつき, 時刻 $t = 2^{j+1} + 2^j$ 時にセル $C_{2^{j+1}}$ で衝突する. 時刻 $t = 2^{j+1} + 2^j$ 時, M は以下に示す状態を取る.

$$t = 2^{j+1} + 2^j : \underbrace{q \dots q}_{[1, 2^j]} \quad \underbrace{\leftarrow b \rightarrow}_{[2^j+1]} \quad \underbrace{q \dots}_{[2^j+2, \dots]}$$

(I), (II) より, 補題 3.3.1 が証明される. □

補題 3.3.1 より, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 2^n$ 時に左右に 1 ビット信号 '1' を出力する. 以上より以下の定理を得る.

定理 3.3.2 表 3.40 で与える遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit, 4State)}$ により, 4 状態 CA_{1-bit} 上で数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する事ができる.

3.3.2.2 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$

M を 2 状態 CA_{1-bit} とし, $M = (Q, \delta)$, $Q = \{q, a\}$ とし, 以下に示す初期計算状況をとるとする.

$$t = 0 : \underbrace{a \rightarrow}_{[1]} \quad \underbrace{q \dots}_{[2, \dots]}$$

数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.42 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit)}$ を持つ M により生成される.

表 3.42 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit)}$

1	q	Right Input	
		0	1
	Left Input	0	1
	0	(q, 0, 0)	(q, 1, 1)
	1	(q, 1, 1)	(q, 0, 0)

2	a	Right Input	
		0	1
	Left Input	0	1
	0	(a, 0, 0)	(a, 1, 0)
	1		

図 3.32 に数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ のシミュレーション結果を示す.

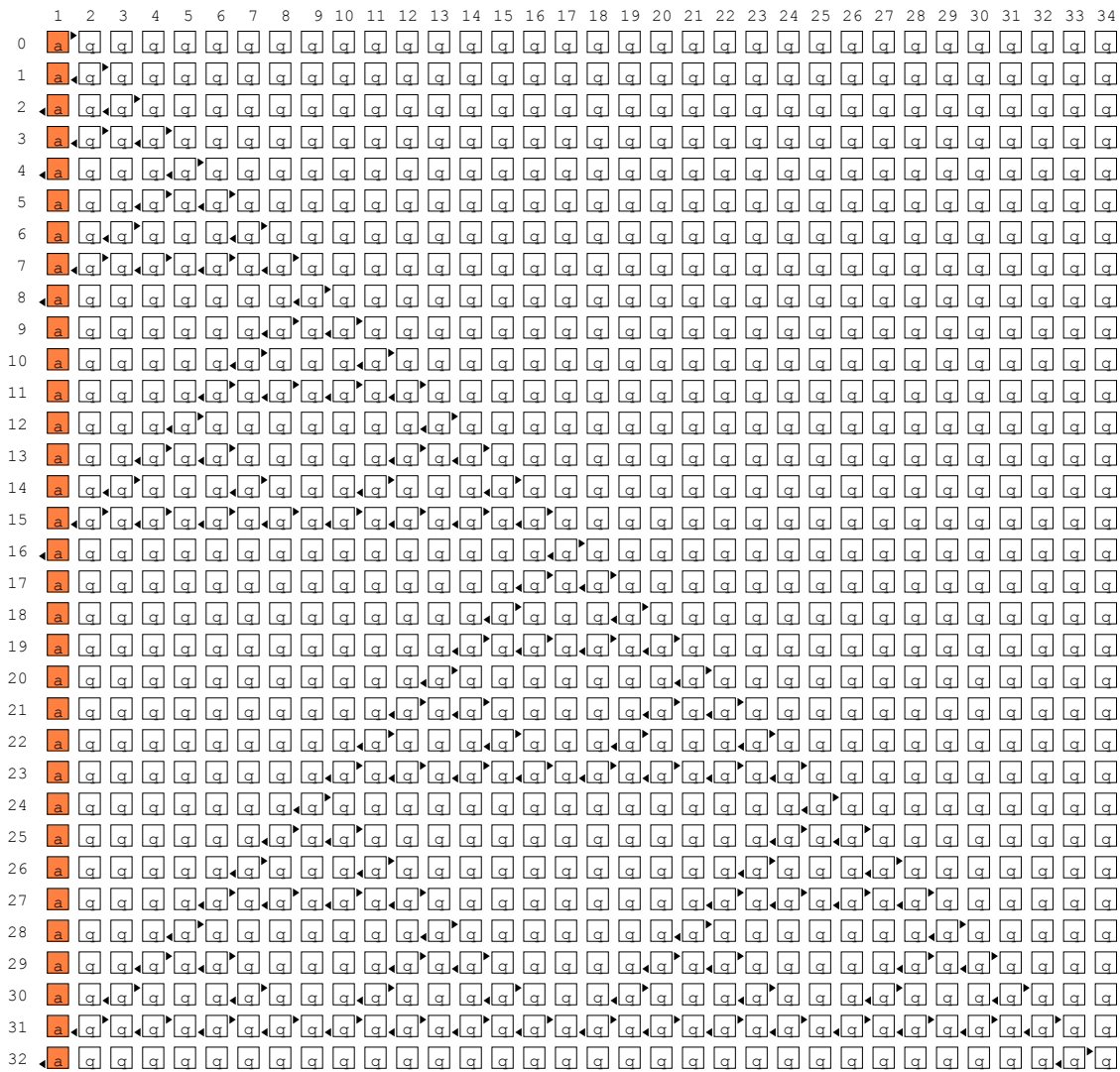


図 3.32 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

3.2.3.2 で示した CA 上の数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成の場合、静止状態 q と状態 b により波の伝播を表している。一方、 CA_{1-bit} の場合、“内部状態と出力信号の相違性”により、内部状態を変化させずに、1 ビット信号 '1' のみ伝播させることが可能であるので、静止状態 q のみでも波の伝播を実現できる。このことより、CA の場合より 1 状態少ない 2 状態 CA_{1-bit} で数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成が可能となる。

次に、状態遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit)}$ の正当性について考える。

補題 3.3.3 i を任意の自然数 ($i \geq 1$) とした場合、 M は $t = 2^i$, $t = 2 \cdot 2^i - 1$, $t = 2 \cdot 2^i$ 時にそれぞれ以下の状態をとる。

$$\begin{aligned}
 t = 2^i & : \overbrace{\left\langle a \ q \dots \ q \right\rangle}^{[1]} \overbrace{\left\langle q \right\rangle}^{[2, 2^i]} \overbrace{\left\langle q \right\rangle}^{[2^i+1]} \overbrace{q \dots}^{[2^i+2, \dots]} \\
 t = 2 \cdot 2^i - 1 & : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{\left\langle q \right\rangle \left\langle q \right\rangle \left\langle q \right\rangle \dots \left\langle q \right\rangle}^{[2, 2 \cdot 2^i]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^i+1, \dots]} \\
 t = 2 \cdot 2^i & : \overbrace{\left\langle a \ q \dots \ q \right\rangle}^{[1]} \overbrace{\left\langle q \right\rangle}^{[2, 2 \cdot 2^i]} \overbrace{\left\langle q \right\rangle}^{[2 \cdot 2^i+1]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^i+2, \dots]}
 \end{aligned}$$

証明

(I) $t = 0$ 時, M は以下の初期計算状況をとる.

$$t = 0 : \overbrace{a}^{[1]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]}$$

遷移規則集合 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit)}$ により, M が以下の様に遷移する.

$$\begin{aligned} t=0 & : \overbrace{a}^{[1]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]} \\ t=1 & : \overbrace{a}^{[1]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[3, \dots]} \\ t=2 & : \blacktriangleleft \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q}^{[2]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[3]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[4, \dots]} \\ t=3 & : \overbrace{a}^{[1]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2]} \blacktriangleright \overbrace{q}^{[3]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[4]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[5, \dots]} \\ t=4 & : \blacktriangleleft \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 4]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[5]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[6, \dots]} \end{aligned}$$

以上より, $i = 1$ の場合は成立する.

(II) k を任意の正整数とし, $k \geq 1$ とする. $i = k$ の場合, M は $t = 2^k, t = 2 \cdot 2^k - 1, t = 2 \cdot 2^k$ 時にそれぞれ以下の状態をとると仮定する.

$$\begin{aligned} t = 2^k & : \overbrace{\blacktriangleleft a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 2^k]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2^k+1]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[2^k+2, \dots]} \\ t = 2 \cdot 2^k - 1 & : \overbrace{a}^{[1]} \blacktriangleleft \overbrace{q \blacktriangleright q \blacktriangleleft q \blacktriangleright q \dots q \blacktriangleleft q}^{[2, 2 \cdot 2^k]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k+1, \dots]} \\ t = 2 \cdot 2^k & : \overbrace{\blacktriangleleft a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 2 \cdot 2^k]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2 \cdot 2^k+1]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k+2, \dots]} \end{aligned}$$

$i = k$ の場合の仮定により, 時刻 $t = 2^{k+1} + 2^k - 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot 2^k + 2^k - 1 : \overbrace{q \dots q}^{[1, 2 \cdot 2^k+1-2^k]} \blacktriangleleft \overbrace{q \blacktriangleright q \blacktriangleleft q \blacktriangleright q \dots q \blacktriangleleft q}^{[2 \cdot 2^k+1-2^k+1, 2 \cdot 2^k+1+2^k-1]} \blacktriangleright \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k+1+2^k, \dots]}$$

次の時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k$ 時に M は以下の様に遷移する.

$$t = 2 \cdot 2^k + 2^k : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 2 \cdot 2^k+1-2^k-1]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2 \cdot 2^k+1-2^k]} \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k+1-2^k+1, 2 \cdot 2^k+1+2^k-1]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2 \cdot 2^k+1+2^k]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k+1+2^k+1, \dots]}$$

$i = k$ の場合の仮定を, 部分空間

$$\overbrace{a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 2 \cdot 2^k+1-2^k-1]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2 \cdot 2^k+1-2^k]} \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k+1-2^k+1, 2 \cdot 2^k+1]} \quad , \quad \overbrace{q \dots q}^{[2 \cdot 2^k+1, 2 \cdot 2^k+1+2^k-1]} \blacktriangleleft \overbrace{q}^{[2 \cdot 2^k+1+2^k]} \overbrace{q \dots}^{[2 \cdot 2^k+1+2^k+1, \dots]}$$

にそれぞれ適用することにより、時刻 $t = 2 \cdot 2^k + 2^k + 2^k - 1 = 4 \cdot 2^k - 1$ 時に M は以下の状態をとる。

$$t = 4 \cdot 2^k - 1 : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{\leftarrow q \rightarrow q \leftarrow q \rightarrow q \dots q \leftarrow q \rightarrow}^{[2, 4 \cdot 2^k - 1]} \overbrace{q \dots}^{[4 \cdot 2^k, \dots]}$$

遷移規則 $\delta(q, 0, 0) \rightarrow (q, 0, 0)$, $\delta(q, 1, 1) \rightarrow (q, 0, 0)$, $\delta(q, 1, 0) \rightarrow (q, 1, 1)$, $\delta(a, 0, 1) \rightarrow (q, 1, 0)$ が適用されることにより、次の時刻 $t = 4 \cdot 2^k$ 時に M は以下の状態をとる。

$$t = 4 \cdot 2^k : \overbrace{\leftarrow a}^{[1]} \overbrace{q \dots q}^{[2, 4 \cdot 2^k]} \overbrace{\leftarrow q \rightarrow}^{[4 \cdot 2^k + 1]} \overbrace{q \dots}^{[4 \cdot 2^k + 2, \dots]}$$

(I), (II) より、全ての k の場合で補題 3.3.3 が成立する。 □

補題 3.3.3 より、全ての n で時刻 $t = 2^n$ 時にセル C_1 は左側に 1 ビット信号 '1' を出力する。よって、以下の定理を得る。

定理 3.3.4 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.42 で示す遷移規則 $\mathcal{R}_{2^n(1Bit)}$ を持つ 2 状態 CA_{1-bit} により実時間で生成可能である。

同様の手法で CA_{1-bit} 上の $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, Fibonacci 数列の生成アルゴリズムの正当性の証明は可能であるが、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, Fibonacci 数列については、遷移規則集合、シミュレーション結果を明らかにするとどめる。

3.3.2.3 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$

M を 3 状態 CA_{1-bit} とし、 $M = (Q, \delta)$, $Q = \{q, a\}$ とし、以下に示す初期計算状況をとるとする。

$$t = 0 : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{qq \dots}^{[2, \dots]}$$

数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ は表 3.43 に示す遷移規則集合を持つ M により生成される。図 3.33 に数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ のシミュレーション結果を示す。

表 3.43 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合

1	q				2	a				3	r			
	Right Input		Right Input			Right Input		Right Input						
	0	1	0	1		0	1	0	1					
Left Input	0	(q, 0, 0)	1	(a, 0, 0)	Left Input	0	(q, 1, 1)	1	(a, 1, 0)	Left Input	0	(r, 0, 0)	1	(r, 1, 0)
Left Input	1	(r, 1, 0)	Left Input	1		Left Input	1	(r, 0, 1)	Left Input	1	(r, 0, 1)	Left Input	1	

3.2.3.3 で示した CA 上の数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成の場合、 c 波と a 波の衝突により、 c 波を 1 セル左側のセルに移動させていたが、 CA_{1-bit} 上のアルゴリズムの場合、静止状態 q に c 波の役割を与え、あらかじめセル C_2 以降のセルに c 波が存在すると考えた。また、セル C_1 - c 波間の波の往復運動についても、内部状態が r となるセルの領域を”内部状態と出力信号の相違性”により、内部状態を変化させずに、1 ビット信号 '1' のみ伝播させている。結果として、 CA の場合と同じ状態数である 3 状態で、 CA_{1-bit} 上で数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成を実現している。

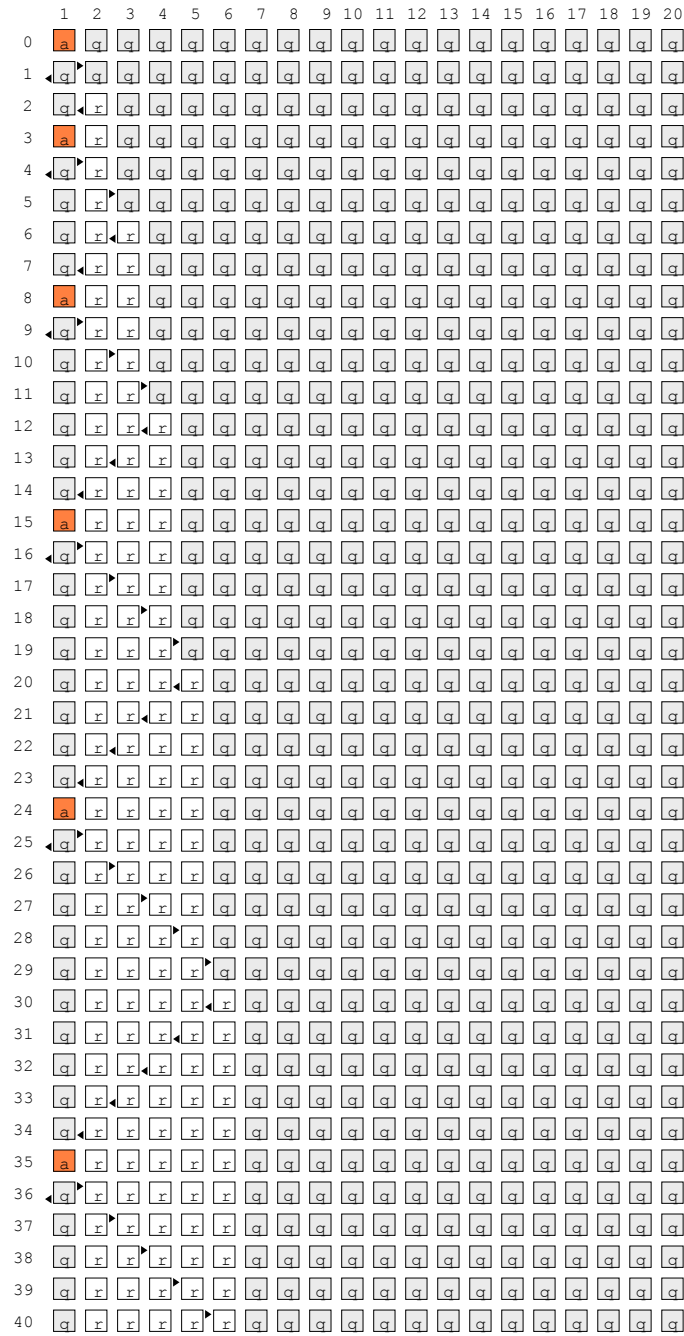


図 3.33 数列 $\{n^2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

3.3.2.4 Fibonacci 数列

M を 9 状態 CA_{1-bit} とし, $M = (Q, \delta)$, $Q = \{q, a, b, c, d, e, o, m, r\}$ とし, 以下に示す初期計算状況をとるとする.

$$t = 0 : \underbrace{m}_{[1]} \blacktriangleright \underbrace{qq\dots}_{[2,\dots]}$$

Fibonacci 数列は表 3.44 に示す遷移規則集合を持つ M により生成される. 図 3.34 に Fibonacci 数列のシミュレーション結果を示す.

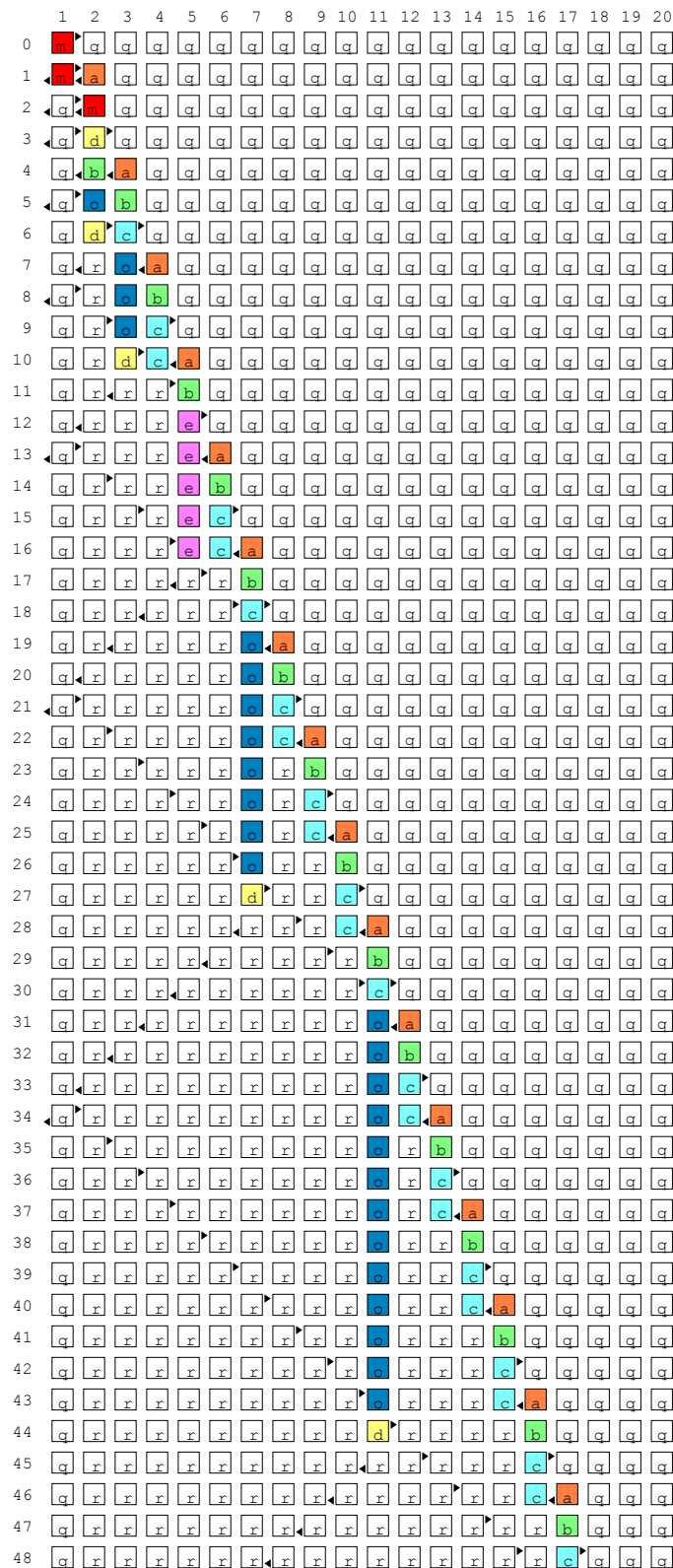


図 3.34 Fibonacci 数列生成アルゴリズムのシミュレーション結果

表 3.44 Fibonacci 数列生成のための状態遷移規則集合

1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(q, 0, 0)</td><td>(q, 1, 1)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(a, 1, 0)</td><td>(q, 0, 0)</td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(q, 0, 0)	(q, 1, 1)	Right	(a, 1, 0)	(q, 0, 0)	2	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(b, 0, 0)</td><td>(a, 1, 0)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(m, 1, 0)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(b, 0, 0)	(a, 1, 0)	Right	(m, 1, 0)		3	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(c, 0, 1)</td><td>(o, 0, 0)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(e, 0, 1)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(c, 0, 1)	(o, 0, 0)	Right	(e, 0, 1)	
				Right Input																																								
		0	1																																									
Input	Left	(q, 0, 0)	(q, 1, 1)																																									
	Right	(a, 1, 0)	(q, 0, 0)																																									
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(b, 0, 0)	(a, 1, 0)																																									
	Right	(m, 1, 0)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(c, 0, 1)	(o, 0, 0)																																									
	Right	(e, 0, 1)																																										
4	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(c, 0, 0)</td><td>(r, 0, 0)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(o, 0, 0)</td><td>(r, 0, 1)</td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(c, 0, 0)	(r, 0, 0)	Right	(o, 0, 0)	(r, 0, 1)	5	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(r, 1, 0)</td><td></td></tr> <tr><th>Right</th><td>(b, 1, 0)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(r, 1, 0)		Right	(b, 1, 0)		6	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(e, 0, 0)</td><td>(e, 0, 0)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(r, 1, 1)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(e, 0, 0)	(e, 0, 0)	Right	(r, 1, 1)	
				Right Input																																								
		0	1																																									
Input	Left	(c, 0, 0)	(r, 0, 0)																																									
	Right	(o, 0, 0)	(r, 0, 1)																																									
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(r, 1, 0)																																										
	Right	(b, 1, 0)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(e, 0, 0)	(e, 0, 0)																																									
	Right	(r, 1, 1)																																										
7	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(o, 0, 0)</td><td>(o, 0, 0)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(d, 0, 1)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(o, 0, 0)	(o, 0, 0)	Right	(d, 0, 1)		8	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(m, 1, 1)</td><td>(q, 1, 1)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(d, 0, 1)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(m, 1, 1)	(q, 1, 1)	Right	(d, 0, 1)		9	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(r, 0, 0)</td><td>(r, 1, 0)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(r, 0, 1)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(r, 0, 0)	(r, 1, 0)	Right	(r, 0, 1)	
				Right Input																																								
		0	1																																									
Input	Left	(o, 0, 0)	(o, 0, 0)																																									
	Right	(d, 0, 1)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(m, 1, 1)	(q, 1, 1)																																									
	Right	(d, 0, 1)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(r, 0, 0)	(r, 1, 0)																																									
	Right	(r, 0, 1)																																										

3.2.3.4 で示した CA 上の Fibonacci 数列生成アルゴリズムの場合、1つの状態に複数の役割を与える事で、5状態 CA で実現している。しかしながら、CA_{1-bit} の場合、隣接するセルからの入力の情報量は1ビットに制限されているので、CA の場合と同様に1つの状態に複数の役割を与える事が出来ない。したがって、CA_{1-bit} 上の Fibonacci 数列生成アルゴリズムの場合、状態 a, b, c で a 波を、状態 r の空間の1ビット信号'1'の伝播により b 波, c 波を、状態 e で w_e 波を、状態 o で w_o 波を実現している。また、状態 d により w_o 波で反射する際の1ステップの遅延を実現する。状態 m については、アルゴリズムに沿わない部分を実現するために導入している。Fibonacci 数列生成アルゴリズムの場合、内部状態を9まで増やし、波の伝播に状態を割り当てることで、CA_{1-bit} 上でも動作可能である。

3.3.2.5 数列 {3ⁿ | n = 1, 2, 3, ...}

M を2状態 CA_{1-bit} とし、M = (Q, δ), Q = {q, a} とし、以下に示す初期計算状況をととする。

$$t = 0 : \underbrace{a}_{[1]} \blacktriangleright \underbrace{qq\dots}_{[2, \dots]}$$

数列 {3ⁿ | n = 1, 2, 3, ...} は表 3.45 に示す遷移規則集合を持つ M により生成される。図 3.35 に数列 {3ⁿ | n = 1, 2, 3, ...} のシミュレーション結果を示す。

表 3.45 数列 {3ⁿ | n = 1, 2, 3, ...} 生成のための状態遷移規則集合

1	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(q, 0, 0)</td><td></td></tr> <tr><th>Right</th><td>(a, 0, 0)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(q, 0, 0)		Right	(a, 0, 0)		2	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(r, 0, 1)</td><td></td></tr> <tr><th>Right</th><td>(r, 1, 1)</td><td></td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(r, 0, 1)		Right	(r, 1, 1)		3	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="2">Right Input</th></tr> <tr><th>0</th><th>1</th></tr> <tr><th rowspan="2">Input</th><th>Left</th><td>(r, 0, 0)</td><td>(r, 1, 1)</td></tr> <tr><th>Right</th><td>(r, 0, 1)</td><td>(r, 0, 1)</td></tr> </table>			Right Input		0	1	Input	Left	(r, 0, 0)	(r, 1, 1)	Right	(r, 0, 1)	(r, 0, 1)
				Right Input																																								
		0	1																																									
Input	Left	(q, 0, 0)																																										
	Right	(a, 0, 0)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(r, 0, 1)																																										
	Right	(r, 1, 1)																																										
		Right Input																																										
		0	1																																									
Input	Left	(r, 0, 0)	(r, 1, 1)																																									
	Right	(r, 0, 1)	(r, 0, 1)																																									

CA_{1-bit} 上の数列 {3ⁿ | n = 1, 2, 3, ...} の生成アルゴリズムの場合も”内部状態と出力信号の相違性”により、内部状態を変化させずに、1ビット信号'1'のみ伝播させている。結果として、内部状態を増やすこと無く、CA の場合と同じ状態数である3状態で、CA_{1-bit} 上で数列 {3ⁿ | n = 1, 2, 3, ...} の生成を実現している。

3.4 非対称 CA_{1-bit} 上の数列生成問題

3.2.1 項では1状態、および2状態の CA で生成できる数列を明らかにし、3.3.1 項では1状態、および2状態の CA_{1-bit} で生成できる数列のクラスを明らかにした。CA_{1-bit} は最も単純で能力が低い CA のモデルである

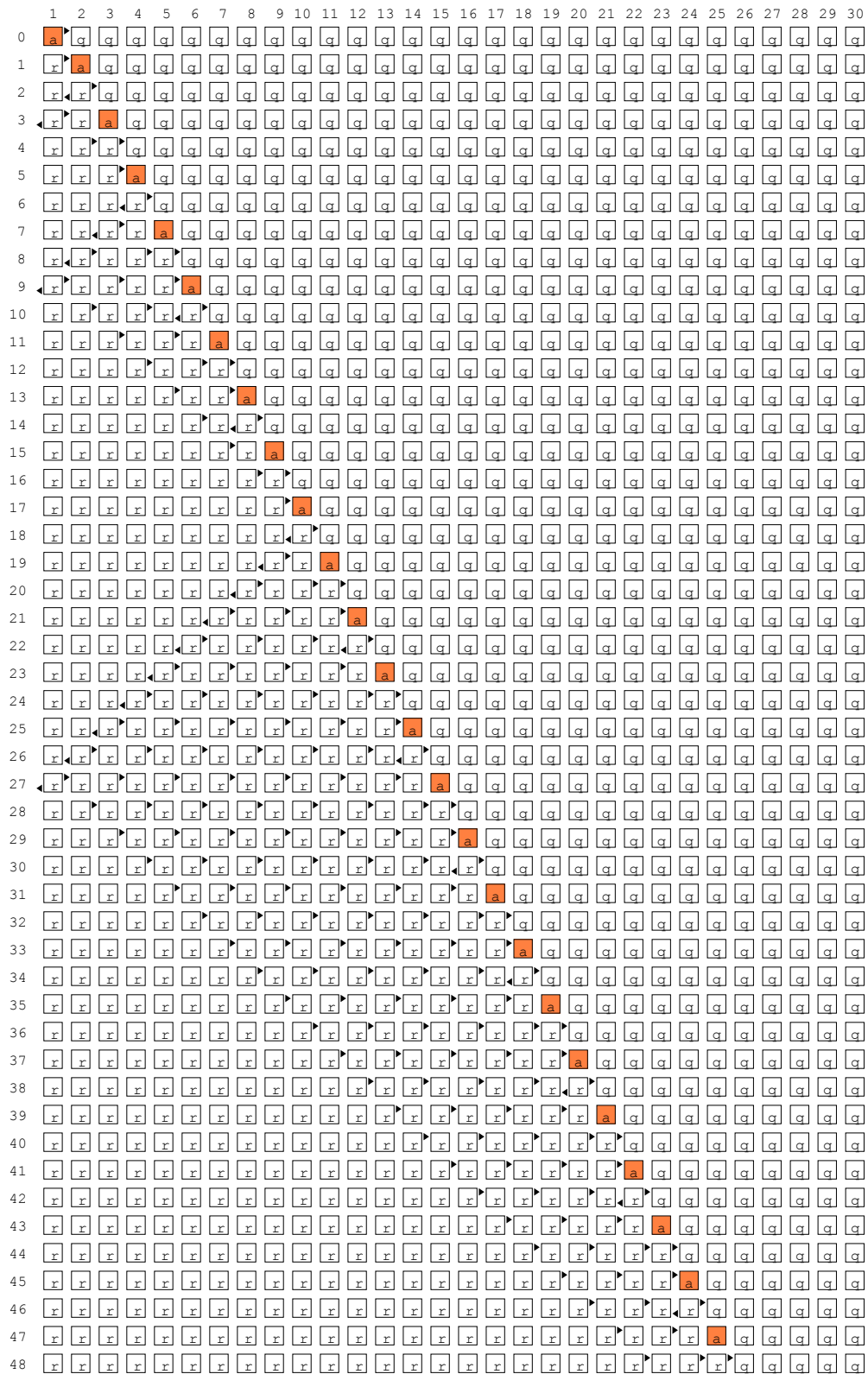


図 3.35 数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果

と考えられていたが、状態数が2以下であれば、CA_{1-bit} が CA より複雑な数列を生成可能であるという結果となり、その要因として、3.3.1.3 では CA_{1-bit} の”出力信号の非対称性”と CA_{1-bit} の”内部状態と出力信号の相違性”をあげた。

本節では能力の小さい CA として、CA_{1-bit} の内部状態と出力信号の相違性を制限したモデルを考える。CA_{1-bit} の内部状態と出力信号の相違性を制限、すなわち、内部状態と出力信号を一致させると、同時に出力信号の非対称性も制限され、セルが取りうる内部状態と出力信号の組み合わせは1状態の場合は $\{q, 0, 0\}$ のみ、2状態の場合は、 $\{q, 0, 0\}, \{a, 1, 1\}$ となり、同じ状態の CA と一致し、生成される数列も同一となる。

次に、出力信号の非対称性が数列生成に及ぼす影響を明らかにする。入力、出力信号ともに対称性を持つ CA_{1-bit} のモデルを提案し、2状態および3状態対称性 CA_{1-bit} で生成可能な数列を明らかにし、対称性 CA_{1-bit} 上での数列生成アルゴリズムについて言及する。

3.4.1 対称性 CA_{1-bit}

入力信号、出力信号ともに対称性を持つ CA_{1-bit} のモデル (対称性 CA_{1-bit}) を提案する。対称性 CA_{1-bit} は有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される。有限状態オートマトン A を定式化すると、 $A = (Q, \delta)$ となる。 Q は内部状態の有限集合である。 δ は状態遷移関数であり、次のように定義される。

$$\delta: Q \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$

この場合の状態遷移関数 δ は次の意味を持つ。

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{p}, x, y) &= (\mathbf{q}, z, z) \\ \mathbf{p}, \mathbf{q} &\in Q, x, y, z \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

あるステップ t 時に、セル C_i の内部状態が p であり、左側のセル C_{i-1} から1ビットの信号 x 、右側のセル C_{i+1} から1ビットの信号 y が入力されるとする。対称性 CA_{1-bit} は入力信号の方向を区別することが出来ない。よって、入力信号 x, y の組み合わせは3通り ($\{0, 0\}, \{0, 1\} = \{1, 0\}, \{1, 1\}$) となる。次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が q に遷移し、左側のセル C_{i-1} に1ビットの信号 z 、右側のセル C_{i+1} に1ビットの信号 z を出力する。対称性 CA_{1-bit} は入力、出力信号ともに対称性を持つので、CA に比べ単純なモデルである。

3.4.2 対称性 CA_{1-bit} の数列生成能力

対称性 CA_{1-bit} は CA_{1-bit} のサブクラスである。よって、対称性 CA_{1-bit} で生成可能な数列は、同じ内部状態数の CA_{1-bit} でも生成可能である。表 3.48 に2状態対称性 CA_{1-bit} で生成される数列のクラス、表 3.4.2 に3状態対称性 CA_{1-bit} で生成される数列のクラスの一部を示す。

CA_{1-bit} と対称性 CA_{1-bit} の数列生成能力を比較すると、当然ではあるが、対称性 CA_{1-bit} が数列能力が低いという結果となった。2状態 CA_{1-bit} で生成可能であった数列 $\{n^2 - n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は2状態対称性 CA_{1-bit} では生成できないが、3状態対称性 CA_{1-bit} であれば生成可能である。

3.4.3 対称性 CA_{1-bit} 上の数列生成アルゴリズム

次に、対称性 CA_{1-bit} 上の数列生成アルゴリズムについて考える。3.3.2.5 で数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ が3状態 CA_{1-bit} で生成可能である事を示したが、表 3.4.2 が示す様に、3状態対称性 CA_{1-bit} では数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成することが出来ない。本項では、3.3.2.5 で示したアルゴリズムを基に、 3^n の項を

表 3.46 2 状態対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ で生成される数列のクラス

クラス	形式	数列
1	有限数列	例) $\{1\}, \{1, 3\}$
2	$a \cdot n + b$	例) $\{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{4n + 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
3	$a \cdot 2^n + b$	$\{2^n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{2 \cdot 2^n - 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
4	その他	一般項で表すことが出来ない数列

表 3.47 3 状態対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ で生成される数列のクラス

クラス	形式	数列
1	有限数列	例) $\{1\}, \{1, 3\}$
2	$a \cdot n + b$	例) $\{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{4n + 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
3	$a \cdot 2^n + b$	$\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{2^n - 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ $\{2 \cdot 2^n - 2 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
4	$n^2 - n + 1$	$\{n^2 - n + 1 \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
5	その他	一般項で表すことが出来ない数列

持つ数列を生成する対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ 上のアルゴリズムを設計する.

最初に, 対称性 CA 上での波の伝播を考える. 対称性 CA のセルは, 同一の 1 ビット信号を左右のセルに出力する. 波が伝播する際, 波の伝播方向とは逆方向にも 1 ビット信号 '1' を出力する. すなわち, 波の伝播によって進行方向とは逆にも波が生成される. 進行方向と逆方向に出力される 1 ビット信号は, 伝播禁止の状態を用いることで, 波の伝播を実現する. 図 3.36 に伝播禁止の状態を用いた対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ 上の右方向への波の伝播を示す.

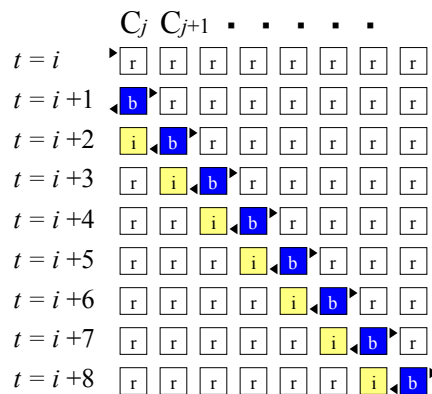


図 3.36 対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ 上での波の伝播 (右方向)

k, j を任意の自然数とし, すべてのセルの内部状態が r であるセル空間を考える. 時刻 $t = k$ にセル C_j に 1 ビット信号のペア '0', '1' が入力されると, 遷移規則 $\delta(r, 0, 1) = (b, 1, 1)$ が適用される. 次のステップ $t = k + 1$ 時にセル C_j の内部状態が b に遷移し, 両側のセルに 1 ビット信号 '1' を出力する. 時刻 $t = k + 2$ にセル C_j の

内部状態が i に遷移し、セル C_{j+1} の内部状態が b に遷移し両側のセルに 1 ビット信号 '1' を出力する。時刻 $t = k + 3$ にセル C_j の内部状態が r に遷移し、セル C_{j+1} の内部状態が i に遷移し、セル C_{j+2} の内部状態は b に遷移し内部状態が b に遷移し両側のセルに 1 ビット信号 '1' を出力する。内部状態が i のセルに 1 ビット信号 '1' が入力された場合、次のステップにそのセルは 1 ビット信号 '1' を出力しない。この様に、伝播禁止の状態 i を用いることで、右方向のみに 1 ビット信号 '1' を伝えることが出来る。図 3.37 に伝播禁止の状態 i を用いた対称性 CA_{1-bit} 上の左方向への波の伝播を示す。

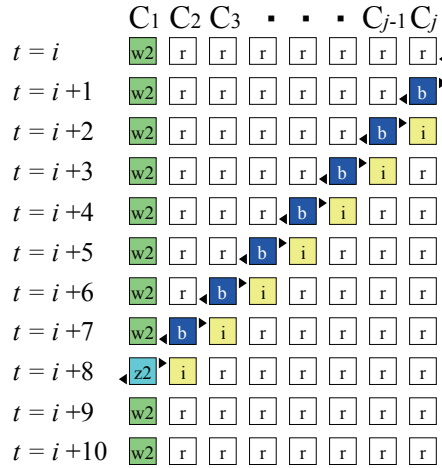


図 3.37 対称性 CA_{1-bit} 上での波の伝播 (左方向)

しかしながら、伝播禁止の状態 i を使用する事により 1 つの問題が発生する。図 3.37 に示す様に、時刻 $t = i + 8$ にセル C_1 は 1 ビット信号 '1' を左右両側に出し、セル C_2 の内部状態が i である。時刻 $t = i + 9$ に、セル C_2 の内部状態が r に遷移し、1 ビット信号 '0' を出力する。左方向に進む波がセル C_1 に達して反射する場合、伝播禁止の状態 i により遅延が発生する。伝播禁止の状態 i により遅延が発生する事で、対称性 CA_{1-bit} 上では 3.3.2.5 で示したアルゴリズムを再現する事が出来ない。遅延により、生成される数列は $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ となる。数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は内部状態が 12 の対称性 CA_{1-bit} で生成可能である。表 3.48 に数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する対称性 CA_{1-bit} の遷移規則表、図 3.39 に初期計算状況を示す。

表 3.48 数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する遷移規則表

q	Next State and Output	a1	Next State and Output	a2	Next State and Output	z1	Next State and Output
Input	00 (q, 0, 0)	Input	00 (a2, 1, 1)	Input	00 (z1, 0, 0)	Input	00 (z2, 0, 0)
	01 (a1, 0, 0)		01 (y, 1, 1)		01 (i, 1, 1)		01 (b, 1, 1)
	11		11		11		11
z2	Next State and Output	b	Next State and Output	i	Next State and Output	w0	Next State and Output
Input	00 (w1, 1, 1)	Input	00 (i, 0, 0)	Input	00 (r, 0, 0)	Input	00 (w0, 0, 0)
	01 (r, 0, 0)		01 (i, 0, 0)		01 (r, 0, 0)		01 (w1, 1, 1)
	11 (b, 1, 1)		11		11		11
w1	Next State and Output	w2	Next State and Output	r	Next State and Output	y	Next State and Output
Input	00 (w1, 0, 0)	Input	00 (w2, 0, 0)	Input	00 (r, 0, 0)	Input	00 (y, 0, 0)
	01 (w2, 0, 0)		01 (z2, 0, 0)		01 (b, 1, 1)		01 (i, 0, 0)
	11		11		11		11

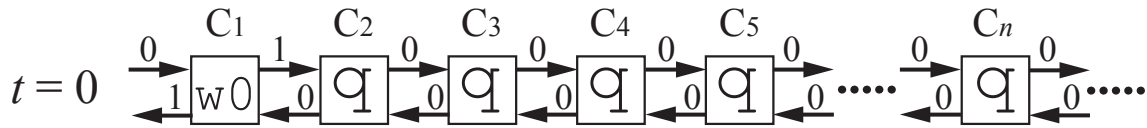


図 3.38 数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成の初期計算状況

対称性 CA_{1-bit} 上の数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムでは, CA_{1-bit} 上の数列 $\{3^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムと同様に, セル C₁ が右側に出力する 1 ビット信号'1' により計算が開始される. 実時間で数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成するには, a 波, b 波, c 波の 3 種類の波を用いる. 図 3.39 に数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する時間-空間図式を示す.

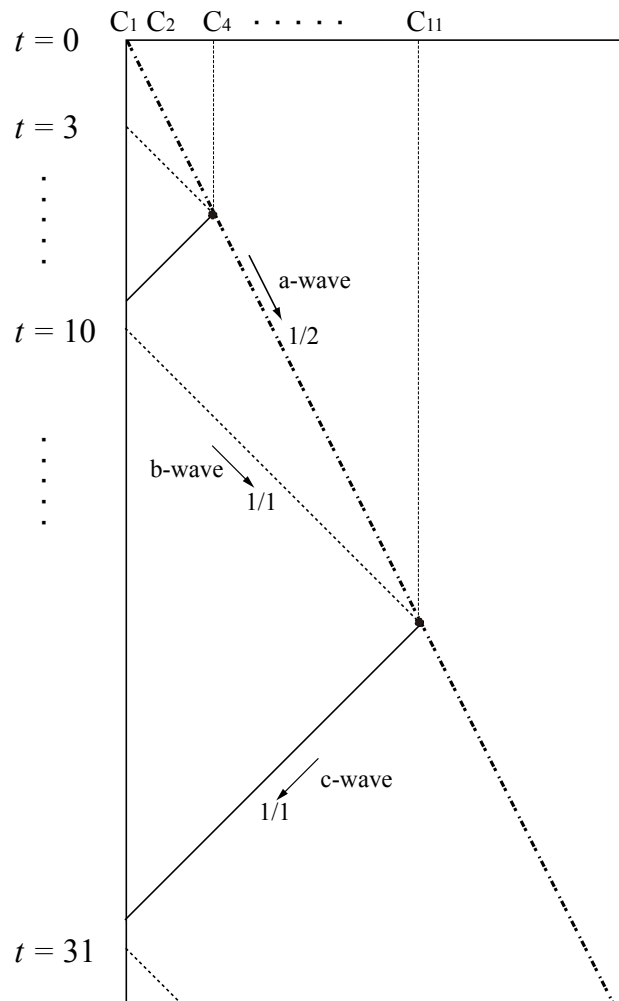


図 3.39 数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する時間-空間図式

$t = 0$ 時, セル C₁ 上で a 波は生成される. a 波は速さ 1/2 で右方向に進む. $t = 3$ 時, セル C₁ 上で b 波は生成される. b 波は速さ 1/1 で右方向に進む. a 波と b 波が衝突すると, b 波は消滅し, 左方向に 1/1 の速さで進む c 波が生成される. c 波がセル C₁ に達すると, c 波は消滅し, b 波が生成される. b 波, c 波はセル C₁ と a 波の間を往復し, c 波がセル C₁ に達した次のステップに, セル C₁ は左側に 1 ビット信号'1' を出力する.

以下に対称性 CA_{1-bit} 上の数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの正当性の証明を示す.

M を表 3.48 に示す遷移規則表を持つ 12 状態対称性 CA_{1-bit} とする. $t = 0 \sim 6$ の遷移は, 内部状態のみで実現する. $t = 0 \sim 6$ では表 3.49 に示す遷移規則の部分集合 $P_1 (P_1 \in \delta)$ が使用され, 図 3.40 に示す様に遷移を行う.

表 3.49 状態遷移規則の部分集合 P_1

$\delta(q, 0, 0) \rightarrow (q, 0, 0);$	$\delta(q, 0, 1) \rightarrow (a1, 0, 0);$
$\delta(i, 0, 0) \rightarrow (r, 0, 0);$	$\delta(i, 0, 1) \rightarrow (r, 0, 0);$
$\delta(b, 0, 1) \rightarrow (i, 0, 0);$	$\delta(a1, 0, 0) \rightarrow (a2, 1, 1);$
$\delta(a1, 0, 1) \rightarrow (y, 1, 1);$	$\delta(a2, 0, 0) \rightarrow (z1, 0, 0);$
$\delta(a2, 0, 1) \rightarrow (i, 1, 1);$	$\delta(w0, 0, 0) \rightarrow (w0, 0, 0);$
$\delta(w0, 0, 1) \rightarrow (w1, 1, 1);$	$\delta(w1, 0, 0) \rightarrow (w1, 0, 0);$
$\delta(w1, 0, 1) \rightarrow (w2, 0, 0);$	$\delta(w2, 0, 0) \rightarrow (w2, 0, 0);$
$\delta(z1, 0, 1) \rightarrow (b, 1, 1);$	

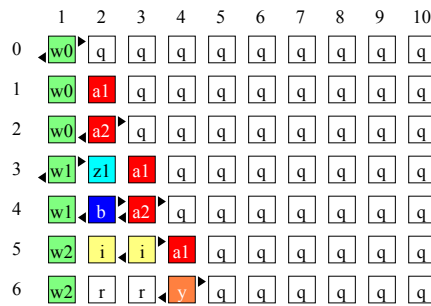


図 3.40 シミュレーション結果 ($t = 6$ まで)

図 3.40 より, 時刻 $t = 3$ 時にセル C_1 は左方向に '1' を出力し, 時刻 $t = 6$ の時, M は以下の状態をとる.

$$t = 6 : \overbrace{w2}^{[1]} \overbrace{rr}^{[2,3]} \overbrace{\leftarrow y \rightarrow}^{[4]} \overbrace{q, \dots}^{[5, \dots]}$$

以上より, 次の補題を得る.

補題 3.4.1 状態遷移規則の部分集合 $P_1 (P_1 \in \delta)$ により, セル C_1 は時刻 $t = 3$ 時に左方向に '1' を出力し, 時刻 $t = 3$ 時以外は左方向に '1' を出力しない. また, 時刻 $t = 6$ の時, M は以下の状態をとる.

$$t = 6 : \overbrace{w2}^{[1]} \overbrace{rr}^{[2,3]} \overbrace{\leftarrow y \rightarrow}^{[4]} \overbrace{q, \dots}^{[5, \dots]}$$

次に, 時刻 $t = 6$ 以降の数列生成を考える.

補題 3.4.2 i を任意の自然数とすると, 時刻 $t = 7 \cdot 3^{i-1} - 1$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 7 \cdot 3^{i-1} - 1 : \overbrace{w2}^{[1]} \overbrace{r, \dots, r}^{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{i-1} + \frac{1}{2} - 1]} \overbrace{\leftarrow y \rightarrow}^{[4]} \overbrace{q, \dots}^{[\frac{7}{2} \cdot 3^{i-1} + \frac{1}{2}]} \overbrace{q, \dots}^{[\frac{7}{2} \cdot 3^{i-1} + \frac{1}{2} + 1, \dots]}$$

証明

(I) 補題 3.4.1 より, $i = 1$ の場合, すなわち $t = 6$ 時に M は以下の状態をとる.

$$t = 6 : \overbrace{w2}^{[1]} \overbrace{rr}^{[2,3]} \overbrace{\leftarrow y \rightarrow}^{[4]} \overbrace{q, \dots}^{[5, \dots]}$$

(II) $j(j \geq 1)$ を任意の正整数としたとき, $i = j$ の場合, 時刻 $t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1$ 時に M は以下の状態をとるとする.

$$t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 : \underbrace{[1]}_{w2} \underbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1]}_{r, \dots, r} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}]}_{\leftarrow y \rightarrow} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots}$$

表 3.50 に示す状態遷移規則の部分集合 $P_2(P_2 \in \delta)$ により, M は次の様に遷移する.

表 3.50 状態遷移規則の部分集合 P_2

$\delta(q, 0, 0) \rightarrow (q, 0, 0);$	$\delta(q, 0, 1) \rightarrow (a1, 0, 0);$
$\delta(r, 0, 0) \rightarrow (r, 0, 0);$	$\delta(r, 0, 1) \rightarrow (b, 1, 1);$
$\delta(i, 0, 0) \rightarrow (r, 0, 0);$	$\delta(i, 0, 1) \rightarrow (r, 0, 0);$
$\delta(b, 0, 0) \rightarrow (i, 0, 0);$	$\delta(b, 0, 1) \rightarrow (i, 0, 0);$
$\delta(a1, 0, 0) \rightarrow (a2, 1, 1);$	$\delta(a1, 0, 1) \rightarrow (y, 1, 1);$
$\delta(a2, 0, 0) \rightarrow (z1, 0, 0);$	$\delta(a2, 0, 1) \rightarrow (i, 1, 1);$
$\delta(w0, 0, 0) \rightarrow (w0, 0, 0);$	$\delta(w0, 0, 1) \rightarrow (w1, 1, 1);$
$\delta(w1, 0, 0) \rightarrow (w1, 0, 0);$	$\delta(w1, 0, 1) \rightarrow (w2, 0, 0);$
$\delta(w2, 0, 0) \rightarrow (w2, 0, 0);$	$\delta(w2, 0, 1) \rightarrow (z2, 0, 0);$
$\delta(y, 0, 0) \rightarrow (y, 0, 0);$	$\delta(y, 0, 1) \rightarrow (i, 0, 0);$
$\delta(z1, 0, 0) \rightarrow (z2, 0, 0);$	$\delta(z1, 0, 1) \rightarrow (b, 1, 1);$
$\delta(z2, 0, 0) \rightarrow (w1, 1, 1);$	$\delta(z2, 0, 1) \rightarrow (r, 0, 0);$
$\delta(z2, 1, 1) \rightarrow (b, 1, 1);$	

$$\begin{aligned}
 t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 & : \underbrace{[1]}_{w2} \underbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1]}_{r, \dots, r} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}]}_{\leftarrow y \rightarrow} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + 1 & : \underbrace{[1]}_{w2} \underbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 2]}_{r, \dots, r} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1]}_{\leftarrow b \rightarrow} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}]}_y \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1]}_{a1} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 2, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + 2 & : \underbrace{[1]}_{w2} \underbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 3]}_{r, \dots, r} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 2]}_{\leftarrow b \rightarrow} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1]}_i \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}]}_i \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1]}_{a2} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 2, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + 3 & : \underbrace{[1]}_{w2} \underbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 4]}_{r, \dots, r} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 3]}_{\leftarrow b \rightarrow} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 2]}_i \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1]}_r \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}]}_r \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1]}_{z1} \\
 & \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 2]}_{a1} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 3, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow \\
 t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + 4 & : \underbrace{[1]}_{w2} \underbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 5]}_{r, \dots, r} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 4]}_{\leftarrow b \rightarrow} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 3]}_i \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}]}_r \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1]}_{z2} \\
 & \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 2]}_{a2} \underbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 3, \dots]}_{q, \dots}
 \end{aligned}$$

セル空間を左方向に速さ 1 セル/1 ステップで状態 b が伝える 1 ビット信号 '1' を c 波と呼ぶ. c 波が通過した後のセルは伝播禁止として動作する状態 i に遷移することで, c 波は左方向のみに進む. セル空間を右方向に速さ 1 セル/2 ステップで状態 $a1, a2$ が伝える 1 ビット信号 '1' を a 波と呼ぶ. a 波が通過した後のセルは伝播禁止として動作する状態 $z1, z2$ に遷移することで, a 波は右方向のみに進む. a 波は時刻 $t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + 1$ 時にセル $C_{\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + 1}$ で生成されるので, 時刻 t 時に a 波が存在するセルの位置を $P_a(t)$ とすると, $P_a(t) = \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} + \lceil \frac{t - (7 \cdot 3^{j-1} - 1)}{2} \rceil$ となる. また, その時のセルがとる内部状態を $S_a(t)$ とする

と以下の通りとなる.

$$S_a(t) = \begin{cases} \mathbf{a1} & \{t - (7 \cdot 3^{j-1} - 1)\} \bmod 2 = 1 \\ \mathbf{a2} & \{t - (7 \cdot 3^{j-1} - 1)\} \bmod 2 = 0 \end{cases}$$

c 波は左方向に進み, 時刻 $t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1$ 時にセル C_1 に到達する. 到達の際には M は以下の様に遷移する.

$$t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 - 1 : \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4, \dots, P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 - 1) - 1] \\ \underbrace{\leftarrow w2} \quad \underbrace{b \rightarrow} \quad \underbrace{i} \quad \underbrace{r, \dots, r} \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 - 1)] \end{array} \\ \hline S_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 - 1) \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 - 1) + 1, \dots] \\ \underbrace{q, \dots} \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 : \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1] \quad [2] \quad [3, \dots, P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1) - 1] \\ \underbrace{Z2} \quad \underbrace{i} \quad \underbrace{r, \dots, r} \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1)] \end{array} \\ \hline S_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1) \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1) + 1, \dots] \\ \underbrace{q, \dots} \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 : \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1] \quad [2, \dots, P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1) - 1] \\ \underbrace{\leftarrow w1} \quad \underbrace{r, \dots, r} \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1)] \end{array} \\ \hline S_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1) \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1) + 1, \dots] \\ \underbrace{q, \dots} \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 2 : \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1] \quad [2] \quad [3, \dots, P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 2) - 1] \\ \underbrace{w1} \quad \underbrace{\leftarrow b} \quad \underbrace{i} \quad \underbrace{r, \dots, r} \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 2)] \end{array} \\ \hline S_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 2) \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 2) + 1, \dots] \\ \underbrace{q, \dots} \quad \Rightarrow \end{array}$$

$$t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 3 : \begin{array}{c} \begin{array}{c} [1] \quad [2] \quad [3] \quad [4, \dots, P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 3) - 1] \\ \underbrace{w2} \quad \underbrace{i} \quad \underbrace{\leftarrow b} \quad \underbrace{r, \dots, r} \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 3)] \end{array} \\ \hline S_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 3) \\ [P_a(7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1 + 3) + 1, \dots] \\ \underbrace{q, \dots} \quad \Rightarrow \end{array}$$

セル空間を右方向に速さ 1 セル/1 ステップで状態 \mathbf{b} が伝える 1 ビット信号 '1' を \mathbf{b} 波と呼ぶ. \mathbf{b} 波が通過した後のセルは伝播禁止として動作する状態 \mathbf{i} に遷移することで, \mathbf{b} 波は右方向のみに進む. \mathbf{b} 波は右方

向に進み, a 波と衝突する. $p(p \leq 0)$ を任意の正整数とする. b 波と a 波はセル C_p で衝突するとする. 速さ $1/2$ の a 波が $C_{\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}}$ から C_p に到達するには $2 \cdot \{p - (\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2})\}$ ステップ必要である. また, 速さ $1/1$ の c 波が $C_{\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2}}$ から C_1 に到達するには $\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1$ ステップが必要であり, c 波が C_1 に到達後 1 ステップ遅れで生成された b 波が C_p に到達するには $p - 1$ ステップが必要である. よって, $(\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1) + 1 + (p - 1) = 2 \cdot \{p - (\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2})\}$ となる. $p = \frac{7}{2} \cdot 3^j + \frac{1}{2}$ であるので, a 波と b 波は時刻 $t = 7 \cdot 3^{j-1} - 1 + \{(\frac{7}{2} \cdot 3^{j-1} + \frac{1}{2} - 1) + 1 + (p - 1)\} = 7 \cdot 3^j - 1$ にセル $C_{\frac{7}{2} \cdot 3^j + \frac{1}{2}}$ で衝突する.

衝突時の M は以下の通りとなる.

$$t = 7 \cdot 3^j - 1 : \begin{array}{cccc} \overbrace{[1]}^{w2} & \overbrace{[2, \dots, \frac{7}{2} \cdot 3^j + \frac{1}{2} - 1]}^{r, \dots, r} & \overbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^j + \frac{1}{2}]}^{\leftarrow y \rightarrow} & \overbrace{[\frac{7}{2} \cdot 3^j + \frac{1}{2} + 1, \dots]}^{q, \dots} \end{array}$$

(I), (II) より, 全ての i の場合で補題 3.4.2 が成立する.

補題 3.4.1 より, $t = 3$ 時にセル C_1 が左側に 1 ビット信号 '1' を出力する. また, 補題 3.4.2 より, c 波がセル C_1 に到達した時刻の 1 ステップ後, すなわち, $t = 7 \cdot 3^{i-1} - 1 + \frac{7}{2} \cdot 3^{i-1} + \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{7}{2} \cdot 3^i - \frac{1}{2}$ 時にセル C_1 が左側に 1 ビット信号 '1' を出力する. 以上より以下の定理を得る.

定理 3.4.3 数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する対称性 $CA_{1\text{-bit}}$ M が存在する. M の内部状態数は 12 である.

数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムを計算機上に実装し, $t = 2000$ までシミュレーションを行ない, 数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成できることを確認した. $t = 32$ までの数列 $\{\frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2} | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果を図 3.41 に示す.

3.5 結言

本章では, CA 上で実時間数列生成問題について考察を行なった. 3.2.1 項では 1 状態, および 2 状態の CA で生成できる数列を明らかにし, 3.2.3 項では Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを設計し, その正当性を明らかにした. これらの実時間生成アルゴリズムは計算時間について最適であり, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムは内部状態数について最適となる.

3.3 節では, セル間通信量を 1 ビットに制限した $CA_{1\text{-bit}}$ 上の数列生成問題について述べた. 3.3.1 項では 1 状態, および 2 状態の $CA_{1\text{-bit}}$ で生成できる数列のクラスを明らかにし, 1 状態, および 2 状態の CA と $CA_{1\text{-bit}}$ の数列生成能力の比較を行った. 3.3.2 項では, CA 上で実現している Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成について, 同一時間で解決する $CA_{1\text{-bit}}$ 上の生成アルゴリズムが存在することを明らかにした.

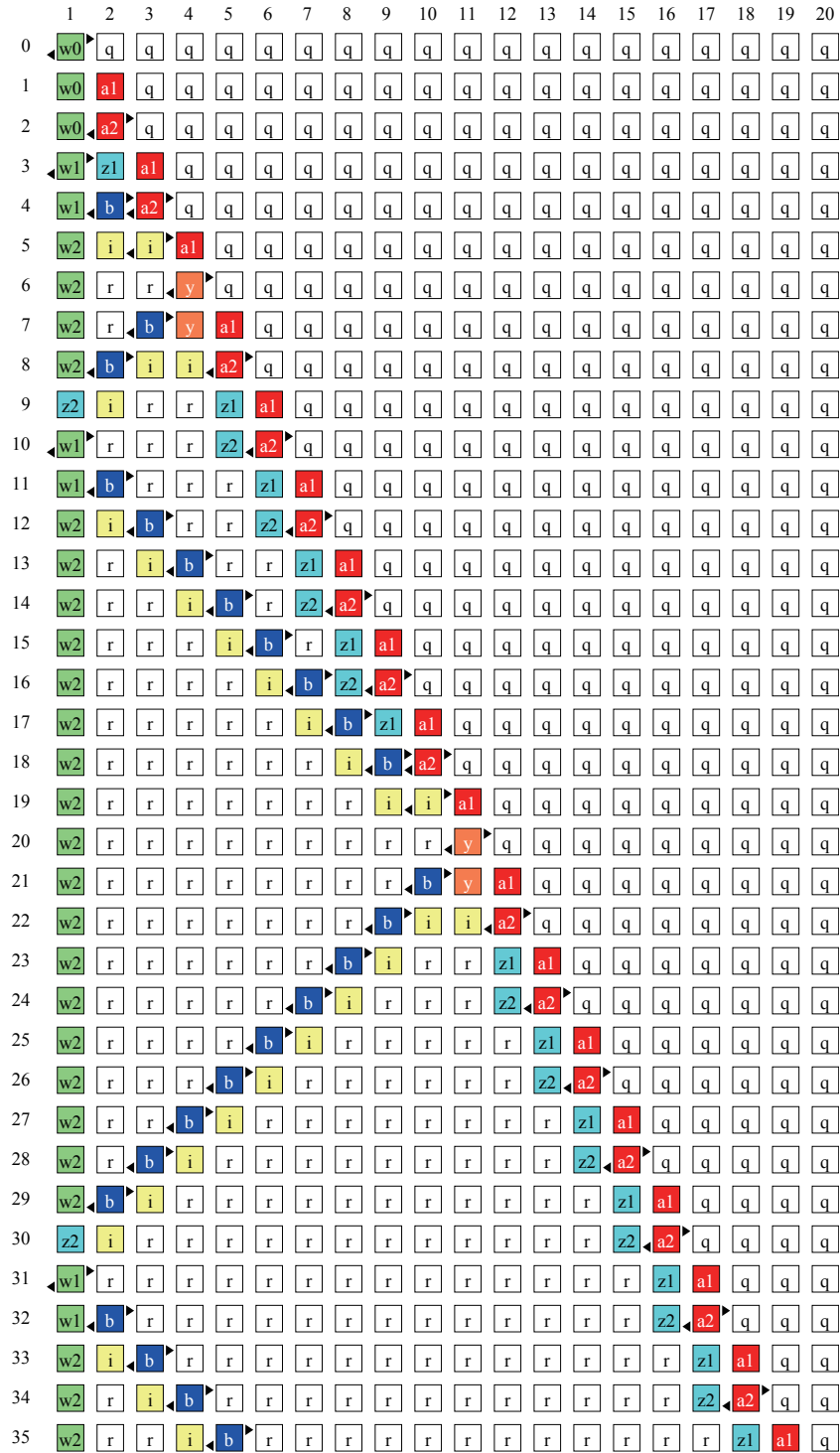


図 3.41 シミュレーション結果 ($t = 32$ まで)

第 4 章

一斉射撃問題

4.1 緒言

本章では, CA の研究課題の 1 つである, 一斉射撃問題について考察を行なう. 4.2 節では, 内部状態数が少ない 1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題について述べる. Berthiaume et al. [17] は 1 次元リング接続 CA 上で一斉射撃問題について考察し, 8 状態の 1 次元リング接続 CA を同期させる一斉射撃解を明らかにし, 3 状態の 1 次元リング接続 CA で同期を実現する完全解, 4 状態の対称性を持つ 1 次元リング接続 CA で同期を実現する完全解が存在しない事を明らかにした. 一方, H. Umeo, N. Kamikawa and J. B. Yunès [25] や Ng [26] は, セル数 n が $n = 2^k$ ($k \geq 1$) となる 4 状態の 1 次元リング接続 CA を同期させる一斉射撃解が多く存在する事を明らかにした. 4.2 節では, H. Umeo, N. Kamikawa and J. B. Yunès [25] 及び, Ng [26] の研究結果を発展させ, 4 状態の 1 次元リング接続 CA を同期させる部分解について考察を行なう.

4.3 節では, 故障セルが存在するセル空間を同期させる耐故障性一斉射撃問題について考察を行なう. Umeo [18], Yunès [19] らは故障セルを含む 1 次元 CA であっても一斉射撃に導く耐故障性一斉射撃アルゴリズムを設計した. しかしながら, CA 上で耐故障性一斉射撃アルゴリズムを実現する内部状態数, 遷移規則集合については言及されておらず, 耐故障性一斉射撃アルゴリズムを実現する遷移規則集合は存在しない. 本研究では, ML-CA シミュレータを設計し, ML-CA 上で耐故障性一斉射撃アルゴリズムの遷移規則を明らかにする. また, ML-CA シミュレータの持つ遷移規則変換機能を使用し, CA で動作する耐故障性一斉射撃アルゴリズムの遷移規則を明らかにする.

4.2 4 状態リング接続セルオートマトン上で動作する一斉射撃アルゴリズムの探索

4.2.1 1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題

図 4.1 に n 個のセルから構成される 1 次元リング接続 CA を示す.

i を任意の自然数とし, $1 \leq i \leq n$ とする. すべてのセルは同じ有限状態オートマトンであり, それぞれ, セル C_1 , セル C_2 , セル C_2 , ..., セル C_{i-1} , セル C_i と呼ぶ. 初期計算状況, すなわち時刻 $t = 0$ 時に, セル C_1 以外のセルは静止状態であり, セル C_1 は将軍状態と呼ばれる特殊な状態をとる.

1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題では, 時刻 $t = 0$ 時に図 4.1 示す n 個のセルから構成される 1 次元リング接続 CA が与えられた場合, **未来のある時刻**に, CA 上の全てのセルが**同時に**, **最初に射撃所状態**と呼ばれる特殊な状態をとる様に, CA の遷移規則集合を定義する. また, CA の内部状態数は, CA を構成するセルの個数 n に依存せずに一定である必要がある.

M を 1 次元リング接続 CA とし, $M = (Q, \delta)$ とすると, 1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題は以下の

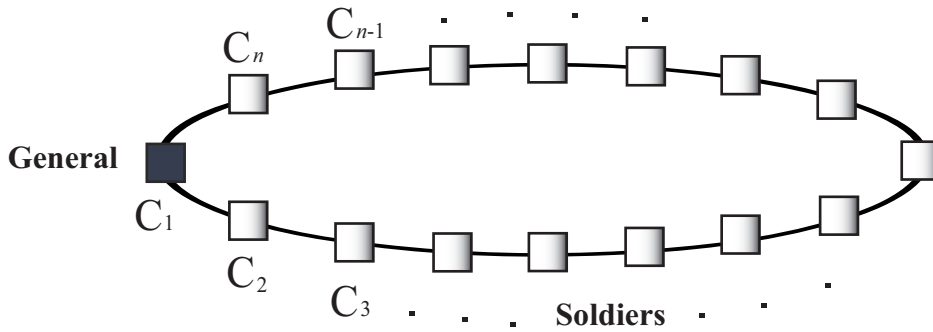


図 4.1 1次元リング接続 CA

通り定義される.

1. Q は有限の内部状態集合であり, G, Q, F という 3 つの特殊な内部状態を持つ. G は将軍状態, Q は静止状態, F は射撃状態と呼ぶ.
2. δ は状態遷移関数であり, 次のように定義される.

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

3. 静止状態 Q については, 遷移規則 $\delta(Q, Q, Q) = Q$ があらかじめ定義される.

M は n ($n \geq 2$) 個のセルで構成され, 1次元リング状に接続される. 各セルは, それぞれ, セル C_1 , セル C_2 , セル C_2, \dots , セル C_{i-1} , セル C_i ($1 \leq i \leq n$) と表され, 時刻 t 時のセル C_i の内部状態は S_i^t ($t \geq 0, 1 \leq i \leq n$) と表す. 時間 t 時の M の構成は, $C^t: [1, n] \rightarrow Q$ であり, $S_1^t S_2^t \dots S_n^t$ として示される. M の遷移は $C^0, C^1, C^2, \dots, C^t$ として表され, C^0 は初期計算状況を表す. 時刻 $t+1$ 時の C^{t+1} は $S_i^{t+1} = \delta(S_{i+(i-2+n) \bmod n}^t, S_i^t, S_{i+1 \bmod n}^t)$ が同時に, 全てのセルに適用されることで計算される. ある時刻 t 時に $1 \leq i \leq n$ となる全ての i について $C^t, S_i^t = F$ となると, M が同期された状況という.

$n \geq 2$ とすると, 一斉射撃とは以下の様な M を得ることである:

1. 初期計算状況として $C^0 = \underbrace{G, \dots, G}_{n-1}, \underbrace{F, \dots, F}_n$ をとると, 時刻 $t = T(n)$ 時に同期された状況として $C^{T(n)} = \underbrace{F, \dots, F}_n$ をとる.
2. $1 \leq t \leq T(n) - 1, 1 \leq i \leq n$ となる全ての t, i について, $S_i^t \neq F$ となる.

4.2.2 1次元リング接続 CA を同期に導く完全解と部分解

元来, 一斉射撃問題では, セル数 n ($n \geq 2$) の任意の CA が同期するように遷移規則集合を作成する. 1次元リング接続 CA の同期を実現する遷移規則集合を一斉射撃解と呼ぶとする. $n \geq 2$ となる全ての n で同期を可能とする一斉射撃解を完全解と呼ぶ. Berthiaume et al. [17] は 8 状態の 1次元リング接続 CA 上で同期を実現する完全解を示した. この完全解は計算時間について最適である. また, 3 状態の 1次元リング接続 CA で同期を実現する完全解, 4 状態の対称性を持つ 1次元リング接続 CA で同期を実現する完全解が存在しない事を明らかにした. 一方, H. Umeo, N. Kamikawa and J. B. Yunès [25] や Ng [26] は, セル数 n が $n = 2^k$ ($k \geq 1$) となる 4 状態の 1次元リング接続 CA を同期させる一斉射撃解が多く存在する事を明らかにした. この様な一

斉射撃解を**部分解**と呼ぶ。H. Umeo, N. Kamikawa and J. B. Yunès [25] はセル数 n が $n = 2^k$ ($k \geq 1$) となる 4 状態の 1 次元リング接続 CA を射撃に導く 17 個の対称性を持つ部分解を, Ng [26] は対称性を持たない 80 個の部分解を明らかにした。

4.2.3 部分解の探索

M を 4 状態 CA とし, $M = \{Q, \delta\}$, $Q = \{A, F, G, Q\}$, $\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$ とする。状態 Q は静止状態であり, $\delta(Q, Q, Q) = Q$ があらかじめ定義される。状態 G は将軍状態であり, F は射撃状態である。また, 状態 A は補助的に用いられる状態である。 n ($n \geq 2$) 個のセルから構成される 1 次元リング接続 CA の初期計算状況は $\overbrace{GQQ, \dots, Q}^{n-1}$ となる。1 次元リング接続 CA の同期を実現する一斉射撃解が全ての内部状態について $\delta(x, y, z) = \delta(z, y, x)$, $x, y, z \in Q$ を満たす場合, 一斉射撃解は対称性を持ち, **対称性解**と呼ぶ。もう一方は**非対称性解**と呼ぶ。

本研究では, コンピュータを用いて 4 状態 1 次元リング接続 CA の一斉射撃解の探索を行なう。

図 4.1 に 4 状態 1 次元リング接続 CA の状態遷移表を示す。状態遷移表内の \bullet は Q に含まれる内部状態, すなわち, A, F, G, Q をとることを表す。

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	●	●
	G	●	●	●
	A	●	●	●

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	●	●	●
	G	●	●	●
	A	●	●	●

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	●	●	●
	G	●	●	●
	A	●	●	●

表 4.1 4 状態 1 次元リング接続 CA の状態遷移表

4 状態 1 次元リング接続 CA の状態遷移集合は 4^{26} 通り存在する。コンピュータを使用し, 4^{26} 通りの遷移規則集合から一斉射撃解を探索する。本研究では, バックトラック法を用いて探索アルゴリズムを実現している。Ng [26] が用いた探索アルゴリズムも同様の手法を用いている。本研究で用いた探索アルゴリズムのフローチャートを図 4.2 に, アルゴリズムのコードを **Algorithm 2** に示す。

図 4.2 に示すアルゴリズムをコンピュータ上に実装し, セル数 n が $n = 2^k$ ($k \geq 1$) の場合, セル数 n が $n = 2^k - 1$ ($k \geq 2$) の 1 次元リング接続 CA を射撃に導く一斉射撃解を明らかにする。

4.2.4 セル数 $n = 2^k$ ($k \geq 1$) の 1 次元リング接続 CA を射撃に導く一斉射撃解

4.2.4.1 検出した 4 状態対称性解

本項では, コンピュータを使用して, 以下の次の定理を明らかにする。

定理 4.2.1 k を任意の正整数とし, $k \geq 1$ とすると, セル数 $n = 2^k$ となる 1 次元リング接続 CA には, 17 個の 4 状態対称性解が存在する。

i を任意の正整数, $1 \leq i \leq 17$ とし, 本研究で検出した対称性解の遷移規則表を U_{S_i} とすると, 検出した対称性解 i が i 番目の遷移規則表 U_{S_i} に対応する。表 4.2 に全ての U_{S_i} を示す。

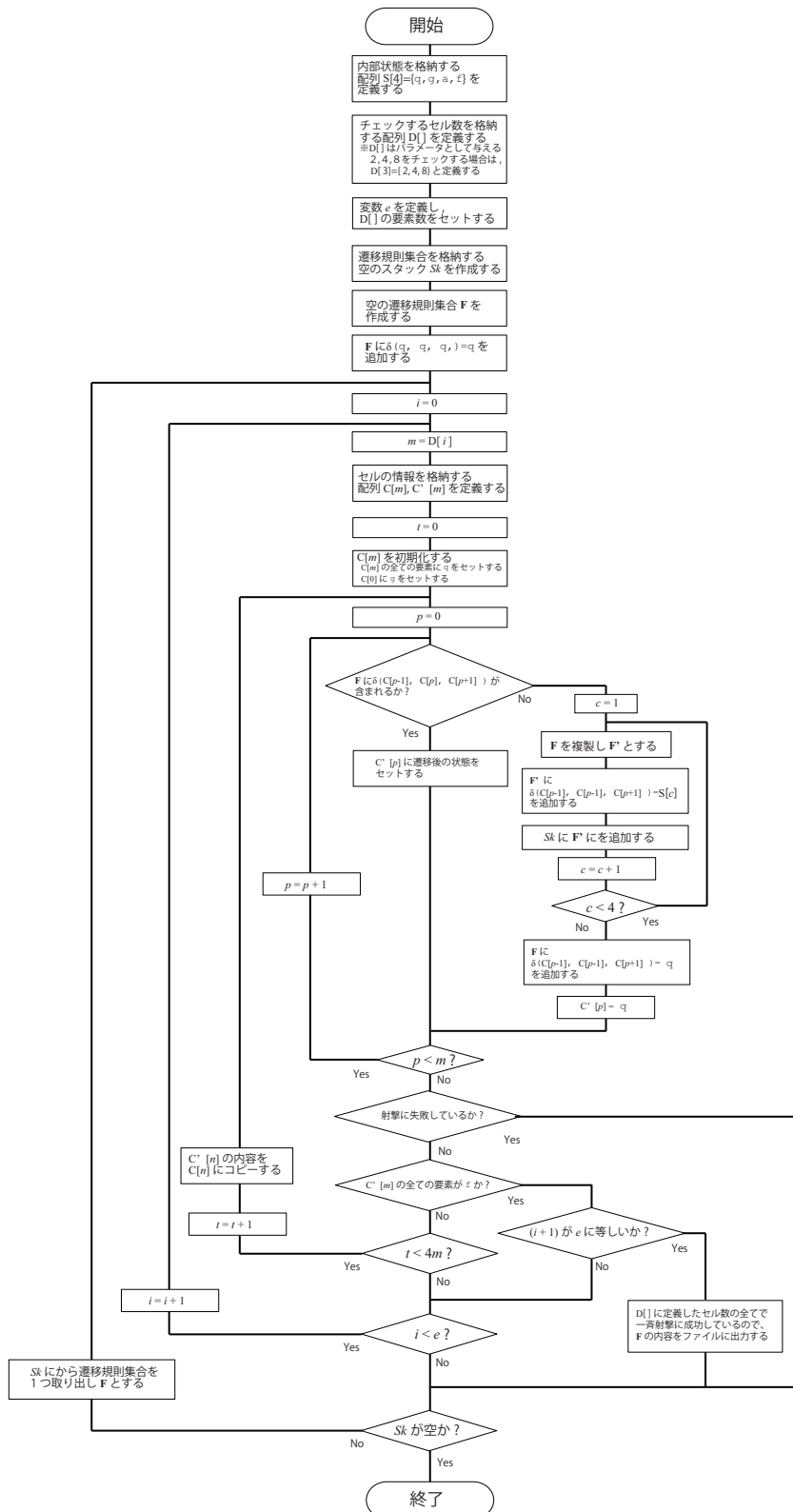


図 4.2 探索アルゴリズムのフローチャート

Algorithm 2: バックトラック法による 4 状態 FSSP アルゴリズムの検出

Input: チェックを行なうセル数を格納する配列 `incellnum[],incellnum[]` の要素数 `num`
Output: 検出した遷移規則集合を記載したファイル

```

1 chkcellnum[] ← incellnum[];
2 リング接続 CA の内部状態集合  $Q = \{q, g, a, f\}$  を作成;
3 リング接続 CA の遷移規則集合  $\delta_t = \{qqq \rightarrow q\}$  を作成;
4 リング接続 CA の未処理の遷移規則集合を格納するスタック  $S$  を作成;
5 スタック  $S$  に  $\delta_t$  を格納;
6 start:
7 while スタック  $S$  が空でない do
8   スタック  $S$  から遷移規則集合を取り出し  $\delta_t$  に格納;
9    $i \leftarrow 0$ ;
10  next:
11  while  $i < num$  do
12     $maxstep \leftarrow 4 \cdot chkcellnum[i]$ ;
13     $t \leftarrow 0$ ;
14    要素数  $chkcellnum[i] + 2$  の配列 cs[] を作成し CA の初期状態をセット;
    // cs[x] にはセル  $C_x$  の状態が格納される
    // cs[0] には cs[i], cs[i + 1] には cs[1] の状態がセットされる
15    while  $t \leq maxstep$  do
16       $p \leftarrow 1$ ;
17       $ls \leftarrow cs[0]$ ;
18       $ns$  // 次の時刻の状態をセットする変数
19      while  $p \leq maxstep$  do
20        if 入力が  $ls \ cs[p] \ cs[p + 1]$  となる遷移規則が存在する then
21          遷移規則を参照し, 次の時刻の状態を  $ns$  にセットする;
22        else
23           $q, g, a, f$ , それぞれに遷移する場合の遷移規則集合 (4 通り) を作成する;
24           $q$  に遷移する遷移規則集合を採用し, 残りはスタック  $S$  に積む;
25           $ns \leftarrow q$ ;
26        end
27         $ls \leftarrow cs[p]$ ;
28         $cs[p] \leftarrow ns$ ;
29         $p \leftarrow p + 1$ ;
30      end
31       $cs[0] \leftarrow cs[i]$ ;
32       $cs[i + 1] \leftarrow cs[1]$ ;
33       $t \leftarrow t + 1$ ;
34      if 一斉射撃に失敗 then
35        go to start::;
36      else if 一斉射撃に成功 then
37         $i \leftarrow i + 1$ ;
38        go to next::;
39      end
40      if 一斉射撃に失敗 then
41        go to start::;
42      end
43    end
44    ファイル出力 ( $\delta_t$ );
45 end

```

表 4.2: 検出した 17 個の対称性解の遷移規則表

Transition Table U_S_001

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	A	Q	-		Q	Q	G	-	Q
	G	A	G	Q		G	Q	G	-		G	-	F	-	A
A	G	Q	A	A	-	-	F	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_002

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	-	Q		Q	G	Q	-	Q
	G	G	A	Q		G	Q	G	-		G	-	F	-	A
A	A	Q	G	A	Q	-	G	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_003

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
	Q	Q	G	A		Q	G	Q	-		Q	A	-	Q
	G	G	A	Q		G	Q	A	-		G	-	F	-
A	A	Q	G	A	Q	-	F	A	Q	-	G			

Transition Table U_S_004

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	G	-	Q		Q	A	Q	-	Q
	G	A	G	Q		G	Q	A	-		G	-	F	-	A
A	G	Q	A	A	Q	-	A	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_005

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	-	Q		Q	G	Q	-	Q
	G	G	A	Q		G	-	F	-		G	Q	A	-	A
A	A	Q	G	A	Q	-	G	A	Q	-	G				

Transition Table U_S_006

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	G	-	Q		Q	A	Q	-	Q
	G	A	G	Q		G	-	A	-		G	Q	G	-	A
A	G	Q	A	A	Q	-	A	A	Q	-	F				

Transition Table U_S_007

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	G	-	Q		Q	A	Q	-	Q
	G	A	G	Q		G	Q	G	-		G	-	F	-	A
A	G	Q	A	A	Q	-	A	A	Q	-	G				

Transition Table U_S_008

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	-	Q		Q	G	Q	-	Q
	G	G	A	Q		G	-	A	-		G	Q	A	-	A
A	A	Q	G	A	Q	-	G	A	Q	-	F				

Transition Table U_S_009

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	A	Q	-		Q	A	Q	-	Q
	G	A	Q	Q		G	Q	G	-		G	-	F	-	A
A	G	Q	A	A	-	-	F	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_010

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	-	Q		Q	G	Q	-	Q
	G	G	A	Q		G	-	-	-		G	Q	A	-	A
A	A	Q	G	A	Q	-	G	A	Q	-	F				

Transition Table U_S_011

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	-	Q		Q	G	A	-	Q
	G	G	A	Q		G	-	F	-		G	Q	A	-	A
A	A	Q	Q	A	Q	-	G	A	Q	-	G				

Transition Table U_S_012

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	Q	G		Q	G	A	-	Q
	G	G	Q	A		G	Q	A	G		G	A	Q	Q	A
A	A	A	G	A	G	G	Q	A	-	Q	F				

Transition Table U_S_013

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	A	Q	-		Q	Q	G	-	Q
	G	A	G	Q		G	Q	G	-		G	-	F	-	A
A	G	Q	Q	A	Q	-	A	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_014

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	A	Q	-		Q	Q	G	-	Q
	G	A	G	Q		G	Q	G	-		G	-	F	-	A
A	G	Q	Q	A	Q	-	F	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_015

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	A	G		Q	G	-	Q		Q	A	Q	-	Q
	G	A	G	Q		G	-	A	-		G	Q	G	-	A
A	G	Q	Q	A	Q	-	A	A	Q	-	F				

Transition Table U_S_016

Left State	Q	Right State			Left State	G	Right State			Left State	A	Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
	Q	Q	G	A		Q	A	-	Q		Q	G	Q	-	Q
	G	G	Q	Q		G	-	F	-		G	Q	A	-	A
A	A	Q	G	A	Q	-	G	A	Q	-	A				

Transition Table U_S_017

Q		Right State			G		Right State			A		Right State			
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A	
Left State	Q	Q	G	A	Left State	Q	A	-	Q	Left State	Q	G	Q	-	
	G	G	Q	Q		G	-	A	-		G	G	Q	A	-
	A	A	Q	G		A	Q	-	G		A	-	-	F	

● 対称性, 最適時間解:

射撃時間が最適である $T(n) = n$ となる, 4 個の対称性部分解を検出した. $U_{S,i}, 1 \leq i \leq 4$ については表 4.2 を参照のこと.

● 対称性, ほぼ最適時間解:

射撃時間がほぼ最適である $T(n) = n + O(1)$ となる, 4 個の対称性部分解を検出した. $U_{S,i}, 5 \leq i \leq 8$ については表 4.2 を参照のこと.

● 対称性, 非最適時間解:

非最適時間解となる 9 個の対称性部分解を検出した. $U_{S,i}, 9 \leq i \leq 17$ については表 4.2 を参照のこと.

表 4.3 に $U_{S,i}, 1 \leq i \leq 17$, それぞれの射撃時間, 遷移規則数を示す.

表 4.3 17 個の対称性部分解の射撃時間と遷移規則数

Symmetric Partial Solutions	Time Complexity	# of Transition Rules	Notes
$U_{S,i}, 1 \leq i \leq 4$	$T(n) = n$	19	
$U_{S,i}, 5 \leq i \leq 8$	$T(n) = n + O(1)$	19	
$U_{S,i}, 9 \leq i \leq 12$	$T(n) = 3n/2 \pm O(1)$	18 - 25	
$U_{S,i}, 13 \leq i \leq 17$	$T(n) = 2n \pm O(1)$	18 - 19	

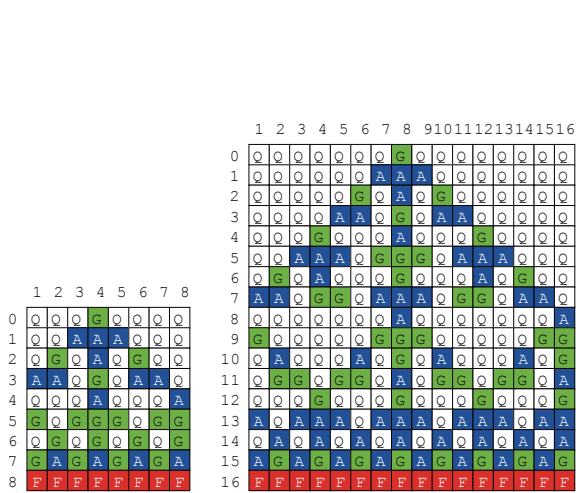
図 4.3 に射撃時間が最適となる $U_{S,1}$, 射撃時間がほぼ最適となる $U_{S,3}$, 射撃時間が最適でない $U_{S,9}, U_{S,13}$, それぞれの $n = 8, 16$ の場合のシミュレーション結果を示す.

4.2.4.2 検出した 4 状態非対称性解

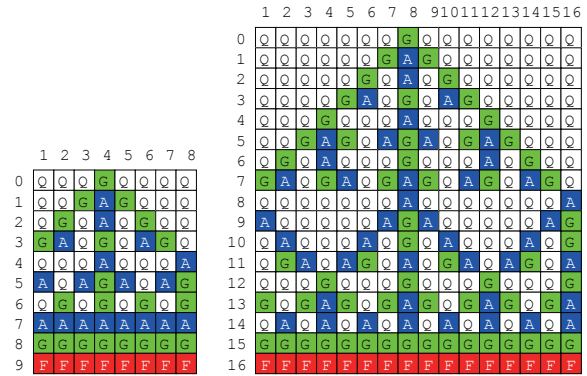
本項では, コンピュータを使用して, 以下の次の定理を明らかにする.

定理 4.2.2 k を任意の正整数とし, $k \geq 1$ とすると, セル数 $n = 2^k$ となる 1 次元リング接続 CA には, 80 個の 4 状態非対称性解が存在する.

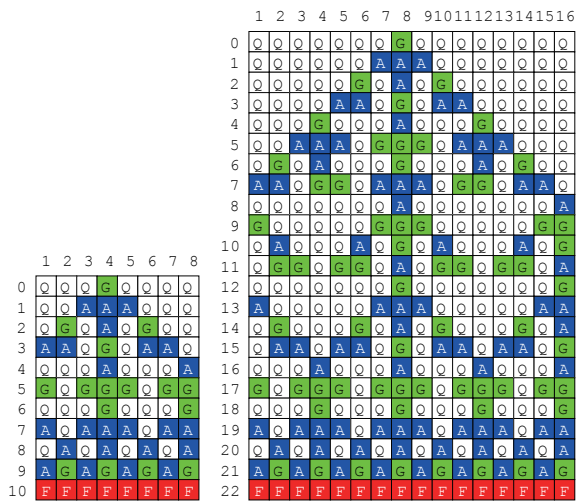
i を任意の正整数, $1 \leq i \leq 80$ とし, 本研究で検出した非対称性解の遷移規則表を $U_{AS,i}$ とすると, 検出した非対称性解 i が i 番目の遷移規則表 $U_{AS,i}$ に対応する. 表 4.4 に全ての $U_{AS,i}$ を示す.



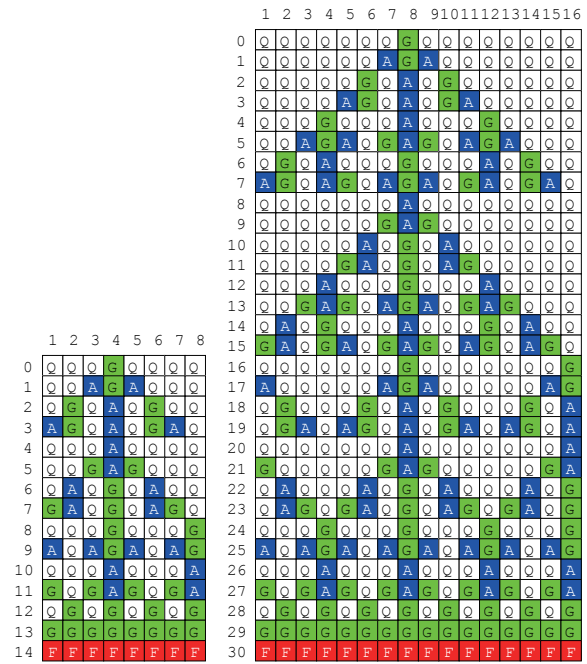
Solution 1



Solution 3



Solution 9



Solution 13

図 4.3 $U_{S,1}$, $U_{S,3}$, $U_{S,9}$, $U_{S,13}$ のシミュレーション結果

表 4.4: 検出した 80 個の非対称性解の遷移規則表

Transition Table U_AS_001

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	A	Q	A	Q	G	Q	A	Q	A	
	G	Q	Q	A	A	G	A	F	-	G	A	Q	G	
	A	G	A	Q	Q	A	G	-	Q	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_002

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	A	Q	A	G	Q	Q	A	G	Q	
	G	Q	Q	A	A	G	A	F	-	G	A	-	Q	
	A	G	A	Q	Q	A	G	-	Q	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_003

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	A	Q	A	-	Q	Q	A	-	Q	
	G	Q	Q	A	A	G	A	F	-	G	A	G	Q	
	A	G	A	Q	Q	A	G	-	Q	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_004

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	Q	-	Q	G	-	Q	
	G	Q	Q	A	-	G	A	F	-	G	-	-	-	
	A	G	-	-	-	A	-	-	-	A	Q	-	G	

Transition Table U_AS_005

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	G	Q	Q	A	G	Q	
	G	Q	Q	A	A	G	A	F	-	G	A	-	Q	
	A	G	A	Q	Q	A	G	-	Q	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_006

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	G	G	Q	A	G	Q	
	G	Q	Q	A	A	G	A	F	-	G	A	G	Q	
	A	G	A	Q	Q	A	G	-	Q	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_007

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	-	G	Q	Q	-	G	Q	
	G	Q	Q	A	-	G	G	-	Q	G	-	Q	Q	
	A	G	-	Q	Q	A	Q	Q	G	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_008

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	G	-	Q	-	G	Q	
	G	Q	Q	A	Q	G	G	F	Q	G	-	Q	G	
	A	G	-	Q	-	A	-	Q	-	A	Q	Q	G	

Transition Table U_AS_009

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	Q	-	Q	G	Q	Q	
	G	Q	Q	G	Q	G	A	F	-	G	Q	G	-	
	A	G	-	Q	-	A	Q	-	G	A	Q	-	G	

Transition Table U_AS_010

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	Q	A	Q	G	A	Q	
	G	Q	Q	G	Q	G	A	F	-	G	Q	G	-	
	A	G	A	Q	Q	A	A	-	G	A	Q	G	-	

Transition Table U_AS_011

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	Q	-	A	Q	Q	-	A	
	G	Q	Q	A	-	G	-	Q	A	G	Q	A	A	
	A	G	-	Q	-	A	A	Q	Q	A	Q	G	G	

Transition Table U_AS_012

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	A	Q	Q	Q	Q	-	A	
	G	Q	Q	G	-	G	-	-	Q	G	Q	A	A	
	A	G	Q	Q	Q	A	A	Q	A	A	Q	Q	F	

Transition Table U_AS_013

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A	G	Q	Q	-	A	Q	Q	Q	Q	
	G	Q	Q	G	-	G	Q	A	-	G	A	-	G	
	A	G	Q	Q	Q	A	G	Q	F	A	A	Q	F	

Transition Table U_AS_014

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	Q	G	Q	A	A	Q	Q	G	Q	Q	
	G	Q	Q	A	Q	G	Q	F	A	G	A	-	G	
	A	G	G	Q	Q	A	Q	-	G	A	Q	G	G	

Transition Table U_AS_015

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	Q	G	Q	A	A	G	Q	G	Q	Q	
	G	Q	G	A	Q	G	Q	F	A	G	A	G	-	
	A	G	G	Q	Q	A	Q	-	G	A	Q	G	G	

Transition Table U_AS_016

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	Q	G	Q	A	A	Q	Q	G	Q	Q	
	G	Q	G	A	Q	G	Q	F	G	G	A	G	-	
	A	G	G	Q	Q	A	Q	-	G	A	Q	G	G	

Transition Table U_AS_017

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	G	Q	G
	A	G	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	Q	F	Q
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	Q	Q	Q
	A	A	Q	-

Transition Table U_AS_019

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	A	F	-
	A	G	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	Q	Q	G
	A	Q	G	G

Transition Table U_AS_021

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	A
	A	A	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	Q	F	-
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	-	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_023

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	A
	A	A	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	G	F	-
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	-	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_025

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	-
	G	Q	F	-
	A	-	-	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	-	-	-
	A	Q	-	G

Transition Table U_AS_027

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	A
	A	G	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	G	F	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	G	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_029

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	-
	G	-	F	Q
	A	Q	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	-	A
	G	-	Q	Q
	A	A	A	G

Transition Table U_AS_031

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	-
	G	G	F	-
	A	-	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	-	G	Q
	G	G	-	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_018

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	-
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table U_AS_020

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	-
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	-	G

Transition Table U_AS_022

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	A
	A	A	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	Q	F	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	-	G	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_024

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	A
	A	A	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	G	F	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	-	G	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_026

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	A
	A	G	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	G
	G	G	F	-
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	-	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_028

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	G	Q
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	-
	G	Q	-	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A
	G	-	A	Q
	A	A	A	F

Transition Table U_AS_030

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	G	A
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	A
	G	Q	F	-
	A	A	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	Q
	G	A	G	G
	A	Q	-	-

Transition Table U_AS_032

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	-
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	-
	G	G	F	Q
	A	-	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	-	-	Q
	G	G	Q	Q
	A	Q	G	G

Transition Table U_AS_033

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	G	-
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	-
	A	-	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	-	-

Transition Table U_AS_034

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	Q	A	A
	A	G	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	A	-	Q
	A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_035

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	A	Q	A
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	-	A
	G	Q	F	Q
	A	A	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	G
	G	-	Q	-
	A	A	-	Q

Transition Table U_AS_036

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	A	Q	Q
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	-
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	-	-	G
	A	Q	G	Q

Transition Table U_AS_037

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	A	Q	A
	A	G	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	-	A
	G	G	F	Q
	A	A	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	G
	G	-	Q	G
	A	A	A	Q

Transition Table U_AS_038

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	A	Q	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	F	-
	A	-	-	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	G
	G	-	-	-
	A	Q	-	Q

Transition Table U_AS_039

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	-	-
	A	-	-	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	-	Q
	G	-	F	-
	A	G	-	Q

Transition Table U_AS_040

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	G	Q
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	Q	Q	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	-	A	Q
	A	A	-	F

Transition Table U_AS_041

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	F	-
	A	-	-	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	-	-	-
	A	G	-	Q

Transition Table U_AS_042

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	A	F	-
	A	-	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	Q	-	G
	A	G	G	Q

Transition Table U_AS_043

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	-	F	Q
	A	A	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	A
	G	A	Q	-
	A	G	-	Q

Transition Table U_AS_044

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	G
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	A
	G	-	F	Q
	A	A	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	A
	G	A	Q	A
	A	G	G	Q

Transition Table U_AS_045

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	F	-
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	A
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	-

Transition Table U_AS_046

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	A	Q	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	-	-
	A	-	-	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	-
	G	-	F	-
	A	Q	-	Q

Transition Table U_AS_047

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	F	-
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	G	Q	A
	A	G	Q	-

Transition Table U_AS_048

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	G	Q	G
	A	-	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	G
	G	Q	F	Q
	A	Q	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	G
	G	A	Q	-
	A	A	A	-

Transition Table U_AS_049

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	G	Q	G
	A	G	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	G
	G	Q	F	Q
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	G
	G	A	Q	Q
	A	Q	A	-

Transition Table U_AS_051

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	Q	A	A
	A	A	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	A
	G	G	-	G
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	Q	Q	Q
	A	Q	Q	F

Transition Table U_AS_053

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	A	Q	Q
	A	Q	G	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	G
	G	G	A	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	F	Q	G
	G	G	Q	G
	A	Q	G	Q

Transition Table U_AS_055

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	G	Q	G
	A	-	Q	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	A	A	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	F	G	Q
	G	Q	Q	G
	A	G	G	Q

Transition Table U_AS_057

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	G	-
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	A	-
	A	-	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	-	F

Transition Table U_AS_059

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	F	-
	A	-	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	-	Q
	G	-	G	-
	A	G	-	Q

Transition Table U_AS_061

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	A	-
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	G	Q	A
	A	G	Q	F

Transition Table U_AS_063

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	G	Q	G
	A	G	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	A	Q
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	G
	G	Q	Q	Q
	A	A	Q	F

Transition Table U_AS_050

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	A	Q	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	F	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	G	Q	A
	A	G	-	-

Transition Table U_AS_052

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A
	G	Q	A	A
	A	G	A	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	-	-
	A	A	G	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	A	Q	Q
	A	Q	Q	F

Transition Table U_AS_054

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	A	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	G
	G	Q	Q	-
	A	-	-	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	G	F	-
	A	Q	-	-

Transition Table U_AS_056

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	Q	A	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	-
	G	A	Q	-
	A	G	-	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	-	F	-
	A	Q	-	-

Transition Table U_AS_058

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	A	G	A
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	A
	G	Q	A	-
	A	A	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	A	G	G
	A	Q	-	F

Transition Table U_AS_060

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	A	-
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	A
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	F

Transition Table U_AS_062

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	A	Q	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	A	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	G	Q	A
	A	G	-	F

Transition Table U_AS_064

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	Q
	G	G	Q	G
	A	G	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	Q	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	G
	G	A	Q	Q
	A	Q	A	F

Transition Table U_AS_065

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	Q
G	A	Q	-
A	G	-	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	-
G	Q	F	-
A	-	-	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	-	G
G	-	G	-
A	Q	-	Q

Transition Table U_AS_066

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	G
G	A	G	Q
A	G	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	-	A
G	Q	F	Q
A	Q	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	A
G	-	A	Q
A	A	A	G

Transition Table U_AS_067

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	Q
G	G	Q	G
A	-	G	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	G
G	Q	A	Q
A	Q	Q	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	G	G
G	A	Q	-
A	A	A	F

Transition Table U_AS_068

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	Q	G	-
A	G	Q	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	-	F	Q
A	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	-	A
G	Q	A	A
A	A	Q	G

Transition Table U_AS_069

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	Q	G	Q
A	G	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	-
G	A	A	-
A	Q	-	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	Q
G	Q	G	-
A	Q	G	F

Transition Table U_AS_070

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	Q	G	Q
A	G	A	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	A
G	A	A	-
A	A	-	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	Q
G	Q	G	-
A	Q	G	F

Transition Table U_AS_071

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	Q	A	-
A	G	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	-
G	A	Q	-
A	G	-	A

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	G	Q
G	-	A	-
A	Q	-	F

Transition Table U_AS_072

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	G
G	A	A	-
A	G	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	G
G	Q	Q	-
A	-	-	A

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	-	Q
G	G	A	-
A	Q	-	F

Transition Table U_AS_073

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	G
G	Q	A	A
A	A	A	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	A	A
G	G	F	G
A	G	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	Q
G	Q	Q	Q
A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_074

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	A
G	Q	A	A
A	G	A	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	-
A	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	Q
G	A	Q	Q
A	Q	Q	G

Transition Table U_AS_075

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	Q	A	Q
A	G	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	G
G	A	Q	A
A	Q	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	Q
G	G	A	-
A	Q	-	F

Transition Table U_AS_076

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	G
G	A	A	-
A	G	Q	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	Q
G	Q	Q	Q
A	G	A	A

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	Q
G	A	A	-
A	Q	-	F

Transition Table U_AS_077

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	Q	A	A
A	Q	A	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	-
G	G	F	-
A	A	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	Q
G	-	A	Q
A	G	Q	Q

Transition Table U_AS_078

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	Q
G	A	A	A
A	A	A	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	G	G	A
G	A	F	-
A	-	-	Q

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	-	G
G	A	A	Q
A	Q	Q	Q

Transition Table U_AS_079

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	Q	A	G
A	Q	G	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	G
G	A	Q	Q
A	-	Q	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	-	G
G	G	Q	-
A	A	-	F

Transition Table U_AS_080

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	Q	Q
G	G	A	G
A	G	G	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	A	-
G	Q	Q	Q
A	G	Q	G

	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	A
G	-	Q	-
A	G	-	F

- **非対称性, 非最適時間解:**

非最適時間解となる 80 個の非対称性部分解を検出した. $U_{AS,i}$, $1 \leq i \leq 80$ については表 4.4 を参照のこと.

表 4.5 に $U_{AS,i}$, $1 \leq i \leq 50$, それぞれの射撃時間, 遷移規則数を示す.

表 4.5 80 個の非対称性部分解の射撃時間と遷移規則数

Asymmetric Partial Solutions	Time Complexity	# of Transition Rules	Notes
$U_{AS,i}$, $1 \leq i \leq 76$	$T(n) = 2n \pm O(1)$	15 - 26	
$U_{AS,i}$, $77 \leq i \leq 80$	$T(n) = 3n \pm O(1)$	23	

図 4.4 に $U_{AS,1}$, $U_{AS,58}$, $U_{AS,77}$, $U_{AS,80}$, それぞれの $n = 8, 16$ の場合のシミュレーション結果を示す.

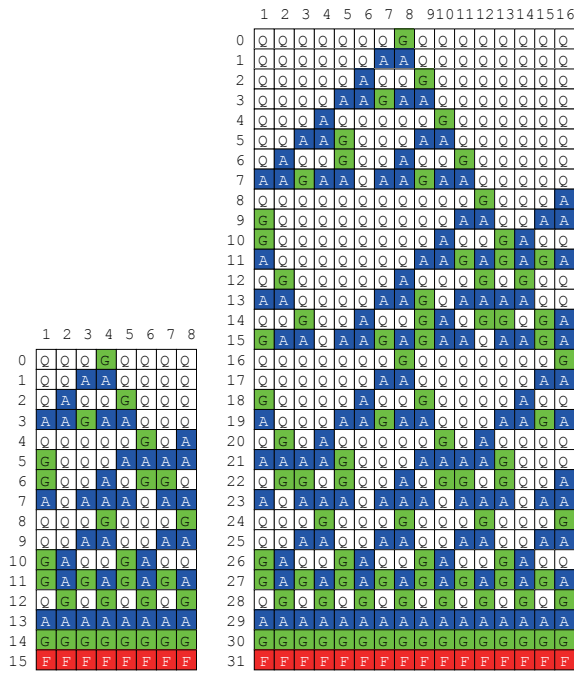
4.2.5 セル数 $n = 2^k - 1 (k \geq 2)$ の 1 次元リング接続 CA を射撃に導く一斉射撃解

4.2.5.1 検出した 4 状態対称性解

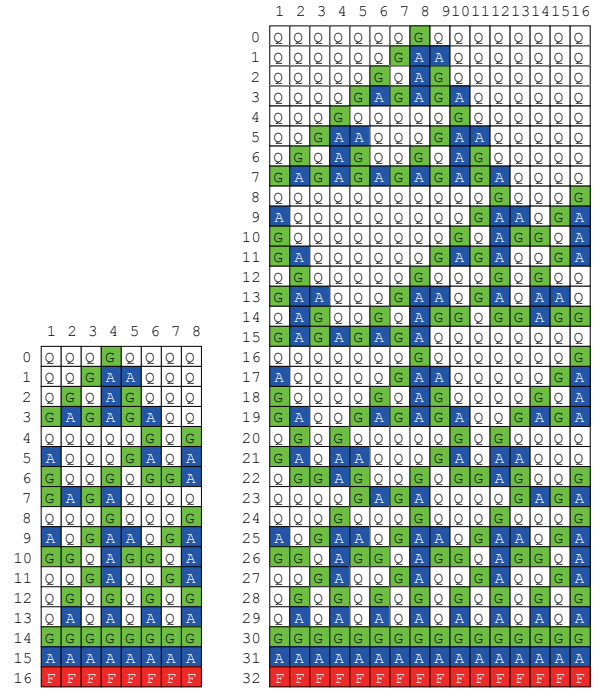
本項では, コンピュータを使用して, 以下の次の定理を明らかにする.

定理 4.2.3 k を任意の正整数とし, $k \geq 2$ とすると, セル数 $n = 2^k - 1$ となる 1 次元リング接続 CA には, 39 個の 4 状態対称性解が存在する.

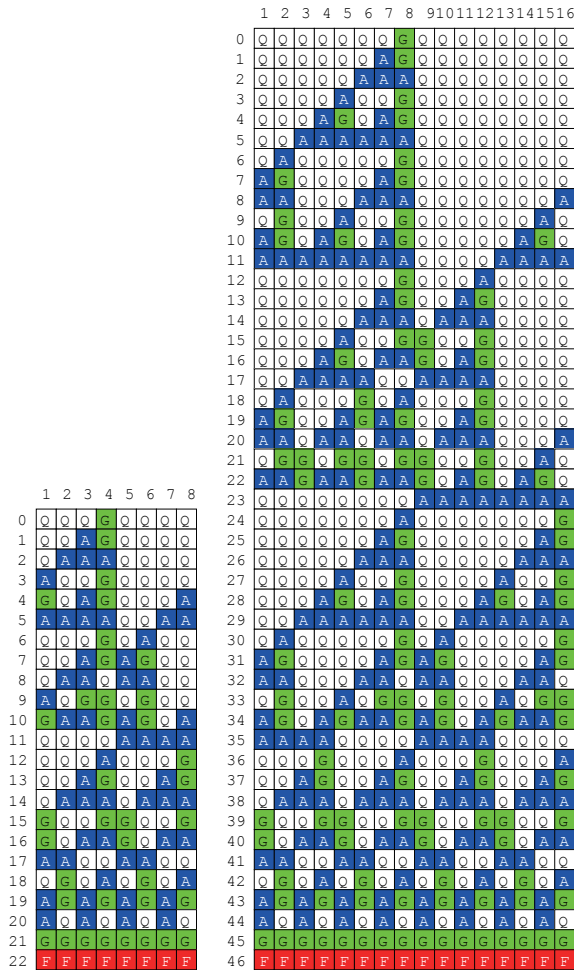
i を任意の正整数, $1 \leq i \leq 39$ とし, 本研究で検出した対称性解の遷移規則表を $R_{S,i}$ とすると, 検出した対称性解 i が i 番目の遷移規則表 $R_{S,i}$ に対応する. 表 4.6 に全ての $R_{S,i}$ を示す.



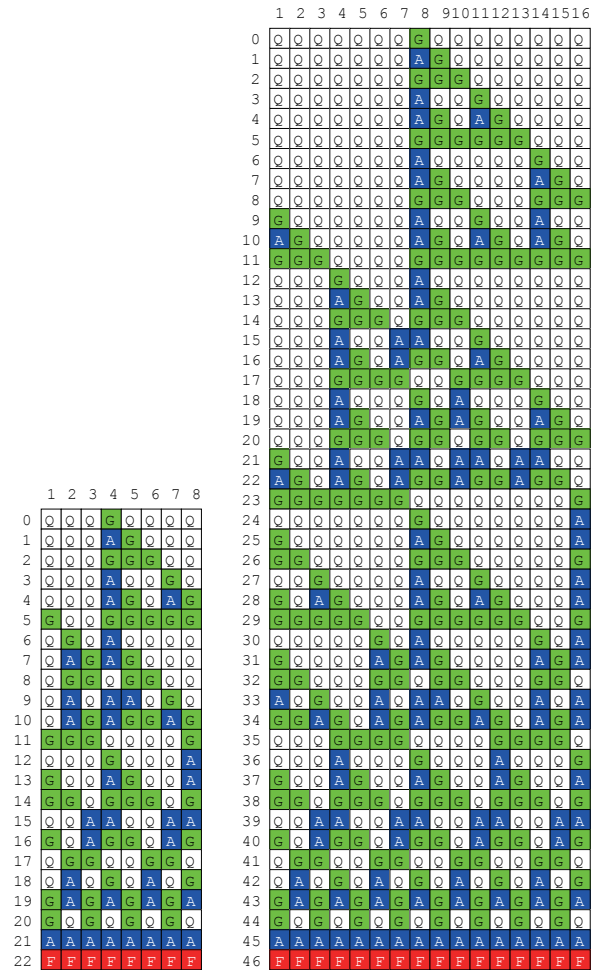
Asymmetric Solution 1



Asymmetric Solution 58



Asymmetric Solution 77



Asymmetric Solution 80

図 4.4 $U_{AS.1}$, $U_{AS.58}$, $U_{AS.77}$, $U_{AS.80}$ のシミュレーション結果

表 4.6: 検出した 39 個の対称性解の遷移規則表

Transition Table R_S_001

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G	Q	A	A	Q	Q	A	Q	A	Q	A
	G	G	Q	-	G	F	G	G	Q	G	G	A	A	G
	A	G	-	Q	A	Q	G	-	A	A	G	-	A	A

Transition Table R_S_002

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G	Q	A	A	Q	Q	A	Q	A	Q	G
	G	G	Q	-	G	F	G	G	Q	G	G	A	A	G
	A	G	-	Q	A	Q	G	-	A	A	G	-	A	A

Transition Table R_S_003

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	A	G	-	Q	G	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	Q	G	F	G	-	G	Q	-	G	A	Q
	A	G	Q	Q	A	-	G	-	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_004

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	G	Q	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	-	G	F	G	-	G	Q	-	G	A	Q
	A	G	-	Q	A	Q	G	G	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_005

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	A	Q	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	A	G	F	G	-	G	Q	A	G	A	Q
	A	G	A	Q	A	Q	G	G	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_006

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	A	Q	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	-	G	F	G	-	G	Q	A	G	A	Q
	A	G	-	Q	A	Q	G	G	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_007

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G	Q	A	A	Q	Q	A	Q	A	Q	A
	G	G	Q	-	G	F	G	-	G	Q	G	G	A	Q
	A	G	-	Q	A	Q	G	-	A	A	G	-	A	A

Transition Table R_S_008

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A	Q	G	G	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	Q	G	F	G	-	G	Q	-	G	A	Q
	A	A	Q	Q	A	Q	G	G	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_009

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A	Q	G	G	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	-	Q	G	F	G	-	G	Q	-	G	A	Q
	A	A	Q	Q	A	Q	G	G	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_010

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	G	Q	Q	Q	A	Q	A	Q	A
	G	A	Q	Q	G	F	G	-	G	Q	A	A	Q	A
	A	A	Q	Q	A	Q	A	A	A	Q	A	A	A	F

Transition Table R_S_011

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	A	Q	A	Q	A	Q	A	Q	A
	G	A	Q	Q	-	-	A	-	G	Q	A	A	A	A
	A	G	Q	Q	A	Q	A	A	A	A	A	F	A	F

Transition Table R_S_012

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-	Q	A	A	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	G	Q	-	G	F	G	-	G	Q	G	G	A	Q
	A	-	-	Q	A	Q	G	-	A	G	G	-	A	G

Transition Table R_S_013

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A	Q	G	A	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	-	G	-	A	-	G	Q	-	A	A	Q
	A	A	-	Q	A	Q	A	A	A	G	A	F	A	F

Transition Table R_S_014

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A	Q	G	G	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	-	G	-	A	-	G	Q	-	A	A	Q
	A	A	-	Q	A	Q	A	A	A	G	A	F	A	F

Transition Table R_S_015

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G	Q	A	Q	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	G	Q	Q	G	F	G	-	G	Q	A	A	Q	A
	A	G	Q	Q	A	Q	A	-	A	Q	A	-	A	Q

Transition Table R_S_016

		Right State					Right State					Right State		
		Q	G	A			Q	G	A			Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G	Q	A	Q	Q	Q	A	Q	Q	Q	Q
	G	A	Q	Q	G	F	G	-	G	Q	G	G	A	Q
	A	A	Q	Q	A	Q	G	G	A	Q	G	G	A	Q

Transition Table R_S_017

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	-	Q
	G	-	-	A
	A	Q	A	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	A	A
	A	A	A	F

Transition Table R_S_018

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	A
	A	Q	A	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	A
	G	-	-	A
	A	A	A	F

Transition Table R_S_019

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	-	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	-
	G	G	F	G
	A	-	G	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_S_020

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	G	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_S_021

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	A
	A	Q	A	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	A	A
	A	A	A	F

Transition Table R_S_022

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_S_023

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	-	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	A
	A	G	A	F

Transition Table R_S_024

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	G
	A	A	G	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_S_025

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	A
	A	G	A	G

Transition Table R_S_026

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	G
	A	Q	G	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	G
	A	A	G	F

Transition Table R_S_027

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	G
	A	Q	G	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	G
	G	Q	G	G
	A	G	G	F

Transition Table R_S_028

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	-	Q	-
	G	Q	-	G
	A	-	G	F

Transition Table R_S_029

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A
	G	Q	Q	-
	A	A	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	-	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	-	A
	A	G	A	F

Transition Table R_S_030

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	G	F

Transition Table R_S_031

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	-
	G	Q	-	G
	A	-	G	F

Transition Table R_S_032

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	-	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	A	A
	A	A	A	G

Transition Table R_S_033

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	-
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	G
	A	Q	G	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	A
	G	Q	G	G
	A	A	G	F

Transition Table R_S_034

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	G	Q	-
	A	-	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	G
	A	Q	G	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	G	G
	A	G	G	F

Transition Table R_S_035

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	-	Q
	G	-	F	A
	A	Q	A	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	A	A
	A	A	A	G

Transition Table R_S_036

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	-
	A	A	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	-	A
	A	G	A	G

Transition Table R_S_037

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	-
	A	A	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	-	A
	A	G	A	G

Transition Table R_S_038

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	A
	G	Q	Q	-
	A	A	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	-	A
	A	G	A	G

Transition Table R_S_039

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	-
	A	A	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	G	A
	A	G	A	G

• 対称性, 最適時間解:

射撃時間が最適である $T(n) = n$ となる, 24 個の対称性部分解を検出した. $R_{S,i}, 1 \leq i \leq 24$ については表 4.6 を参照のこと.

• 対称性, ほぼ最適時間解:

射撃時間がほぼ最適である $T(n) = n + O(1)$ となる, 14 個の対称性部分解を検出した. $R_{S,i}, 25 \leq i \leq 38$ については表 4.6 を参照のこと. $R_{S,25} \sim R_{S,37}$ の射撃時間は $T(n) = n + 1$ であり, $R_{S,38}$ の射撃時間は $T(n) = n + 2$ となる.

• 対称性, 非最適時間解:

$R_{S,39}$ のみが非最適時間解となる. $R_{S,39}$ の射撃時間は $T(n) = (3n + 1)/2$ となる. $R_{S,39}$ については表 4.6 を参照のこと.

表 4.7 に $R_{S,i}, 1 \leq i \leq 39$, それぞれの射撃時間, 遷移規則数を示す.

表 4.7 39 個の対称性部分解の射撃時間と遷移規則数

Symmetric Partial Solutions	Time Complexity	# of Transition Rules	Notes
$R_{S,i}, 1 \leq i \leq 24$	$T(n) = n$	21 - 27	
$R_{S,i}, 25 \leq i \leq 37$	$T(n) = n + 1$	22 - 27	
$R_{S,38}$	$T(n) = n + 2$	24	
$R_{S,39}$	$T(n) = (3n + 1)/2$	25	

図 4.5 に射撃時間が最適となる $R_{S,2}$, 射撃時間がほぼ最適となる $R_{S,25}$, $R_{S,38}$, 射撃時間が最適でない $R_{S,39}$, それぞれの $n = 7, 15$ の場合のシミュレーション結果を示す.

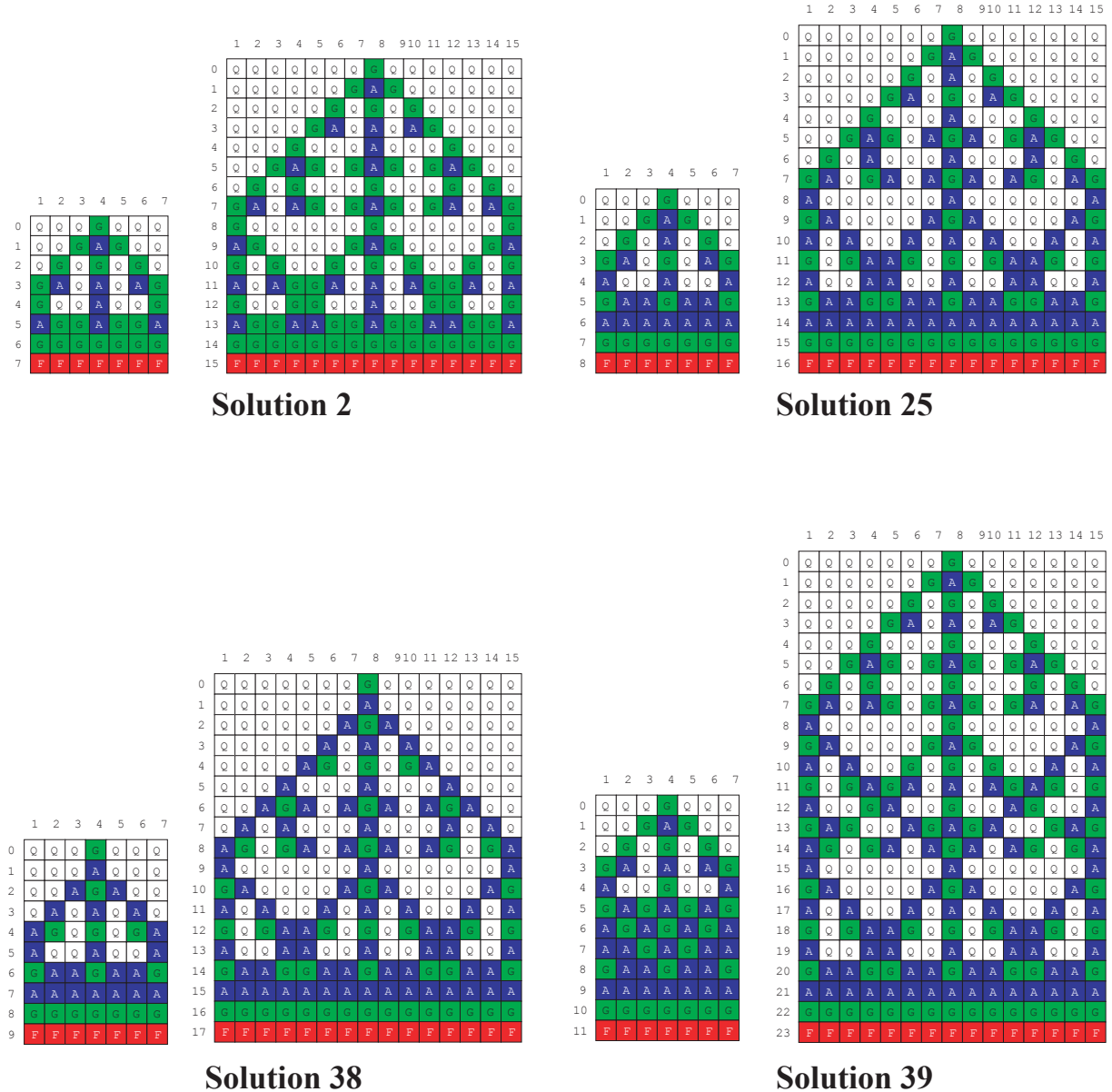


図 4.5 $R_{S,2}$, $R_{S,25}$, $R_{S,38}$, $R_{S,39}$ のシミュレーション結果

4.2.5.2 検出した 4 状態非対称性解

本項では、コンピュータを使用して、以下の次の定理を明らかにする.

定理 4.2.4 k を任意の正整数とし、 $k \geq 2$ とすると、セル数 $n = 2^k - 1$ となる 1 次元リング接続 CA には、132 個の 4 状態非対称性解が存在する.

i を任意の正整数、 $1 \leq i \leq 132$ とし、本研究で検出した非対称性解の遷移規則表を $R_{AS,i}$ とすると、検出した非対称性解 i が i 番目の遷移規則表 $R_{AS,i}$ に対応する. 表 4.8 に全ての $R_{AS,i}$ を示す.

表 4.8: 検出した 132 個の非対称性解の遷移規則表

Transition Table R_AS_001

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_002

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_003

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_004

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	Q	G
	G	Q	-	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	A	A	-
	A	A	-	F

Transition Table R_AS_005

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	A
	G	Q	-	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	A	A	-
	A	A	-	F

Transition Table R_AS_006

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	A
	A	G	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	Q	A	-
	A	G	-	F

Transition Table R_AS_007

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	A
	A	A	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	Q	A	-
	A	G	-	F

Transition Table R_AS_008

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	A
	G	Q	A	A
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_009

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	A
	A	Q	A	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	A	A
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_010

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	-	A
	A	G	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	Q	A	-
	A	G	-	F

Transition Table R_AS_011

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	-	A
	A	A	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	Q	A	-
	A	G	-	F

Transition Table R_AS_012

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_013

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	G	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_014

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	G	G	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_015

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	Q	A	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	G
	G	A	A	F
	A	A	F	F

Transition Table R_AS_016

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	-

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	A
	A	Q	G	F

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	G
	G	A	A	F
	A	A	F	F

Transition Table R_AS_017

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	G	Q	Q
A	G	Q	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	A
G	Q	A	A
A	Q	G	F

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	-	G
G	A	A	F
A	A	F	F

Transition Table R_AS_018

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	G	Q	Q
A	G	Q	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	G
G	Q	A	A
A	Q	A	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	-	G
G	A	A	-
A	A	-	F

Transition Table R_AS_019

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	G	Q	Q
A	G	Q	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	A
G	Q	A	A
A	Q	A	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	-	G
G	A	A	-
A	A	-	F

Transition Table R_AS_020

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	G	Q	Q
A	G	Q	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	Q
G	Q	A	G
A	G	A	F

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	A
G	-	A	F
A	G	F	F

Transition Table R_AS_021

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	G	Q	Q
A	G	Q	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	Q
G	Q	A	G
A	A	A	F

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	A
G	-	A	F
A	G	F	F

Transition Table R_AS_022

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
G	G	Q	Q
A	G	Q	-

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	Q	Q
G	Q	A	A
A	G	G	F

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	G	A	A
G	-	A	F
A	G	F	F

Transition Table R_AS_023

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	Q	Q
A	G	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	-
A	Q	-	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	A	G	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_024

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	A	Q	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	Q
G	G	F	G
A	-	G	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	Q	G	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_025

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	A	Q	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	A	Q
G	G	F	-
A	G	-	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	Q
G	Q	G	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_026

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
G	A	Q	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	A	Q
G	G	F	-
A	G	-	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	A	Q
G	Q	G	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_027

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	-	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	-
A	-	-	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	G	-	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_028

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	-	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	-
A	-	-	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	A	-	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_029

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	-	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	F
A	-	F	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	A	F	A
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_030

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	-	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	F
A	-	F	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	G	F	G
A	Q	A	G

Transition Table R_AS_031

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	-	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	G
G	A	F	F
A	-	F	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	Q	Q
G	A	F	G
A	Q	A	G

Transition Table R_AS_032

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
G	A	-	Q
A	A	Q	Q

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	A	-
G	G	F	-
A	G	-	G

Left State	Right State		
	Q	G	A
Q	A	G	Q
G	Q	-	G
A	Q	G	G

Transition Table R_AS_033

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	-	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_035

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	-	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	F
	A	G	F	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	A
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_037

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	G	Q	Q
	A	-	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	G	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_039

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	G	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_041

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	G	G	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_043

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_045

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_047

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	Q	-	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_034

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	-	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	F
	A	G	F	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	Q	F	A
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_036

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	A	-	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	F
	A	G	F	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	G
	A	Q	A	G

Transition Table R_AS_038

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	A	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_040

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_042

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	G	G
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_044

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	F	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	-

Transition Table R_AS_046

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	-
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	F	F
	A	-	F	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	G	F	G
	A	Q	A	G

Transition Table R_AS_048

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	-	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	-
	G	G	F	F
	A	G	F	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	Q	F	A
	A	Q	G	G

Transition Table R_AS_049

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	A	-
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	A	G	G
Left State	Q	A	G
	G	A	F
	A	-	G

	Right State		
	Q	G	A
A	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	-	G
	A	Q	G

Transition Table R_AS_051

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	Q	A
Left State	Q	A	A
	G	Q	A
	A	A	F

Transition Table R_AS_053

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	A
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	Q
	G	A	A
	A	A	-

Transition Table R_AS_055

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	G
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	Q
	G	A	A
	A	A	-

Transition Table R_AS_057

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	A
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	Q
	G	A	A
	A	A	-

Transition Table R_AS_059

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
Left State	Q	G	G
	G	Q	Q
	A	A	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	G	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	A
	G	Q	A
	A	G	-

Transition Table R_AS_061

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	A	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	A	Q
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	Q	F
Left State	Q	A	A
	G	Q	G
	A	A	Q

Transition Table R_AS_063

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	A	Q
	A	G	A

	Right State		
	Q	G	A
G	G	G	Q
Left State	Q	G	Q
	G	F	G
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	Q	F
Left State	Q	A	A
	G	Q	A
	A	A	Q

Transition Table R_AS_050

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
Left State	Q	A	A
	G	A	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	A	G	-
Left State	Q	A	G
	G	F	G
	A	Q	G

	Right State		
	Q	G	A
A	A	Q	Q
Left State	Q	A	Q
	G	Q	G
	A	Q	G

Transition Table R_AS_052

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	F
Left State	Q	G	A
	G	-	A
	A	A	F

Transition Table R_AS_054

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
Left State	Q	G	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	G	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	A
	G	-	A
	A	G	-

Transition Table R_AS_056

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
Left State	Q	G	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	A	-

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	A
	G	-	A
	A	G	-

Transition Table R_AS_058

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	G
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	Q	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	Q
	G	A	A
	A	A	-

Transition Table R_AS_060

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	G	G
Left State	Q	G	G
	G	Q	Q
	A	A	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	G	Q	Q
Left State	Q	G	Q
	G	Q	A
	A	A	A

	Right State		
	Q	G	A
A	A	A	-
Left State	Q	G	A
	G	Q	A
	A	G	-

Transition Table R_AS_062

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	G
Left State	Q	A	G
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	A	A	-
Left State	Q	A	G
	G	A	A
	A	Q	-

	Right State		
	Q	G	A
A	A	Q	F
Left State	Q	G	Q
	G	A	G
	A	Q	G

Transition Table R_AS_064

	Right State		
	Q	G	A
Q	Q	A	A
Left State	Q	A	A
	G	Q	Q
	A	G	Q

	Right State		
	Q	G	A
G	A	A	-
Left State	Q	A	G
	G	A	A
	A	Q	-

	Right State		
	Q	G	A
A	A	Q	F
Left State	Q	A	Q
	G	G	G
	A	Q	G

Transition Table R_AS_065

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	A	-
	A	Q	-	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	G	G
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_067

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	G

Transition Table R_AS_069

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	-
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	A	-
	A	G	-	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_071

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_073

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	Q
	A	Q	G	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_075

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	G
	A	Q	Q	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_077

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	Q	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_079

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_066

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	G
	A	Q	Q	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	F

Transition Table R_AS_068

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	G

Transition Table R_AS_070

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_072

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	Q
	A	Q	G	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_074

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	Q	Q	Q
	A	Q	G	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_076

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	G

Transition Table R_AS_078

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	A	Q	G
	A	Q	Q	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_080

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_081

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	Q	Q	Q
	A	Q	G	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	F

Transition Table R_AS_082

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	Q
	A	Q	G	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	F

Transition Table R_AS_083

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	Q
	A	Q	G	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	F

Transition Table R_AS_084

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	G	Q	Q
	A	-	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	G
	G	A	A	-
	A	Q	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	G	G	G
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_085

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_086

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	F	A
	A	A	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	Q	A	-
	A	G	-	G

Transition Table R_AS_087

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	F	A
	A	G	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	A
	G	Q	A	-
	A	G	-	G

Transition Table R_AS_088

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_089

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_090

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_091

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	A
	G	Q	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	A	A	-
	A	A	-	G

Transition Table R_AS_092

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	A
	G	G	Q	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	F	A
	A	Q	A	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	A	A	-
	A	A	-	G

Transition Table R_AS_093

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_094

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	G

Transition Table R_AS_095

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_096

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	A	-
	A	G	-	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_097

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	A	Q	Q

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	A	-
	A	G	-	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	G	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_099

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	G

Transition Table R_AS_101

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_103

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_105

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	Q
	A	Q	G	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	G

Transition Table R_AS_107

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_109

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	G
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_111

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_098

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	Q	F	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	G

Transition Table R_AS_100

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	Q

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	G	A	-
	A	G	-	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	A	Q
	G	Q	G	G
	A	Q	G	F

Transition Table R_AS_102

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_104

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	G
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_106

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	A
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	Q	Q	F

Transition Table R_AS_108

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	Q	Q	F

Transition Table R_AS_110

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_112

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	A	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	Q
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

Transition Table R_AS_113

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	A
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_114

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	G

Transition Table R_AS_115

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	Q
	A	Q	G	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	G

Transition Table R_AS_116

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	G

Transition Table R_AS_117

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	-	-	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	F

Transition Table R_AS_118

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	-	-	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	F

Transition Table R_AS_119

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	-	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_120

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	-	A
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_121

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	-	F	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	A
	A	A	Q	G

Transition Table R_AS_122

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	Q	Q
	A	G	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	-	Q
	G	-	F	Q
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	A
	G	Q	G	Q
	A	A	A	G

Transition Table R_AS_123

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	A	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_124

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	A	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	A
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	Q	G

Transition Table R_AS_125

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	Q

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	Q
	A	Q	G	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	G	Q
	A	-	Q	-

Transition Table R_AS_126

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	F	G
	A	Q	Q	A

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	G	Q
	A	-	Q	-

Transition Table R_AS_127

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	-

Transition Table R_AS_128

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	F	Q
	A	Q	Q	G

		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	A	G	-

Transition Table R_AS_129

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	Q

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	G
	A	Q	Q	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	G	Q
	A	-	Q	F

Transition Table R_AS_130

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	A	G
	G	A	G	Q
	A	G	Q	Q

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	G	Q
	G	G	A	Q
	A	Q	G	A

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	Q	-
	G	Q	G	Q
	A	-	Q	F

Transition Table R_AS_131

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	G
	A	G	Q	F

Transition Table R_AS_132

Q		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	Q	G	A
	G	G	Q	Q
	A	A	Q	G

G		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	A	A	Q
	G	A	A	Q
	A	Q	Q	G

A		Right State		
		Q	G	A
Left State	Q	G	Q	G
	G	Q	A	Q
	A	G	G	F

● 非対称性, 最適時間解:

射撃時間が最適である $T(n) = n$ となる, 60 個の非対称性部分解を検出した. $R_{AS,i}, 1 \leq i \leq 60$ については表 4.8 を参照のこと.

● 非対称性, ほぼ最適時間解:

射撃時間がほぼ最適である $T(n) = n + O(1)$ となる, 56 個の非対称性部分解を検出した. $R_{AS,i}, 61 \leq i \leq 116$ については表 4.8 を参照のこと.

● 非対称性, 非最適時間解:

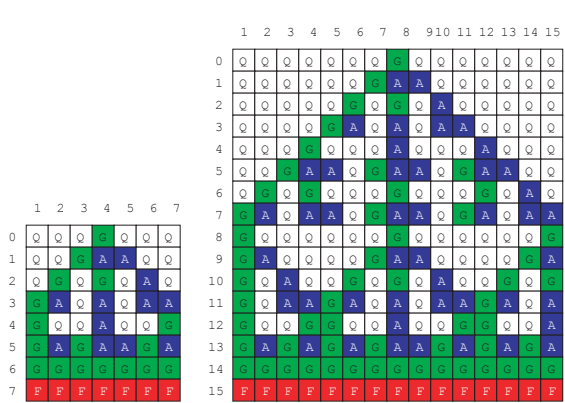
非最適時間解となる 16 個の非対称性部分解を検出した. $R_{AS,i}, 117 \leq i \leq 132$ については表 4.8 を参照のこと.

表 4.9 に $R_{AS,i}, 1 \leq i \leq 132$, それぞれの射撃時間, 遷移規則数を示す.

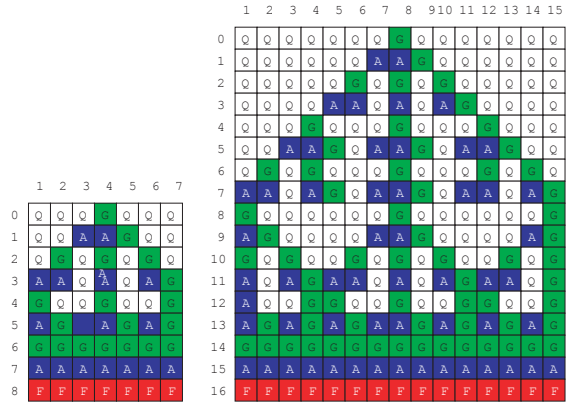
表 4.9 132 個の非対称性部分解の射撃時間と遷移規則数

Asymmetric Partial Solutions	Time Complexity	# of Transition Rules	Notes
$R_{AS,i}, 1 \leq i \leq 60$	$T(n) = n$	22 - 26	
$R_{AS,i}, 61 \leq i \leq 116$	$T(n) = n + O(1)$	25 - 27	
$R_{AS,i}, 117 \leq i \leq 124$	$T(n) = 3n/2 \pm O(1)$	24 - 27	
$R_{AS,i}, 125 \leq i \leq 132$	$T(n) = 2n + O(1)$	24 - 27	

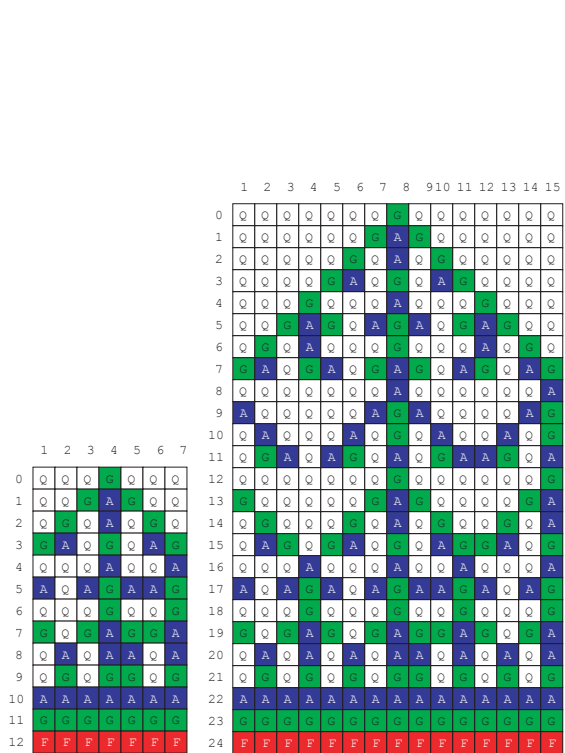
図 4.6 に $R_{AS,1}, R_{AS,62}, R_{AS,123}, R_{AS,132}$, それぞれの $n = 7, 15$ の場合のシミュレーション結果を示す.



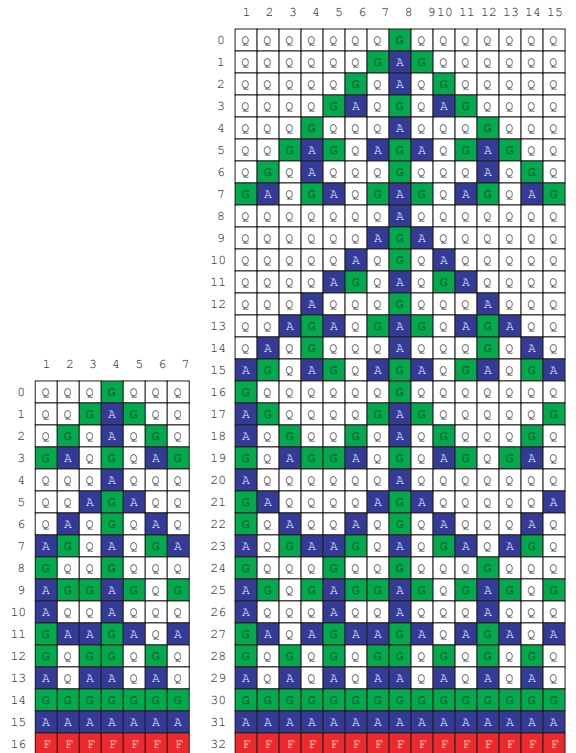
Asymmetric Solution 1



Asymmetric Solution 62



Asymmetric Solution 123



Asymmetric Solution 132

図 4.6 $R_{AS.1}$, $R_{AS.62}$, $R_{AS.123}$, $R_{AS.132}$ のシミュレーション結果

4.3 マルチレイヤーセルオートマトンを用いた耐故障性一斉射撃アルゴリズムの実装

4.3.1 耐故障性一斉射撃アルゴリズム

一斉射撃問題とは、時刻 $t = 0$ の際に、左端のセルのみ将軍状態と呼ばれる特殊な状態をとり、その他のセルは静止状態をとる 1 次元 CA を未来のある時刻 $t = \alpha$ 時に同時に射撃状態に導くように遷移規則集合を作成する問題である。Umeo [18] は故障セルを含む 1 次元 CA であっても一斉射撃に導く耐故障性一斉射撃アルゴリズムを設計したが、CA で動作する遷移規則集合については言及されていない。本項では、Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムの実装を行ない、ML-CA \Rightarrow CA 遷移規則変換機能を使用して、CA 上で動作する遷移規則集合についても明らかにする。

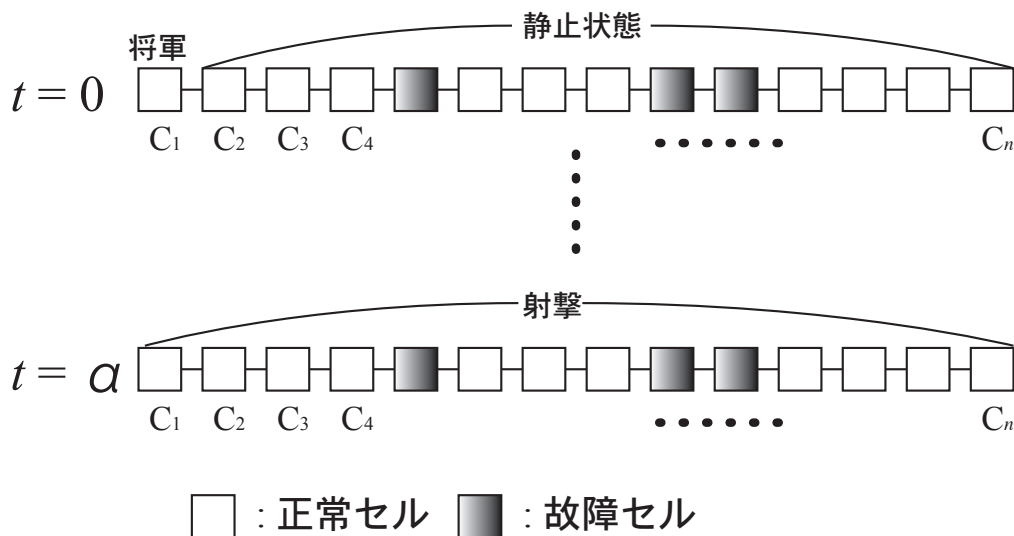


図 4.7 故障セルを含むセルオートマトン

4.3.2 故障セルについて

Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムで想定している故障セルについて説明を行なう。故障セルは、 $t = 0$ 時、すなわち初期計算状況時に配置され、以降は故障セルであり続ける。故障セルは遷移規則を適用し内部状態の遷移を行なうことは出来ず、隣接するセルの内部状態を伝える事しか出来ない。故障領域内の状態の伝播速度は、1 ステップにつき 1 セル、すなわち、速さ $1/1$ である。図 4.8 参照。

4.3.3 耐故障性一斉射撃アルゴリズムについて

Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムは Balzer [13] の一斉射撃アルゴリズムを内包しており、故障セルが存在しない場合は Balzer のアルゴリズムにより最適時間でセル空間を射撃に導く。故障セルが存在する場合の故障空間が 2 つの場合の Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムの時間-空間図式を図 4.9 に示す。

n をセル数、 p を連続した故障セルの領域数とする。Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムは射撃時間 $2n - 2 + p$ でセル空間を射撃に導く。セル C_0 に配置された将軍より、右方向に進む速さ $1/1$ の波が生成される。速さ $1/1$ の波が故障セル領域に達すると、左方向に進む速さ $1/1$ の f 波を生成し、セル空間を凍結させる。

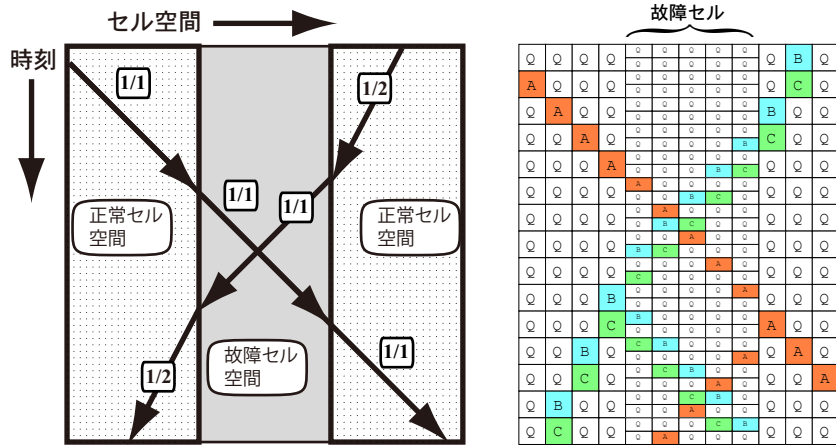


図 4.8 故障セルの動作

また、 f 波が将軍が生成した $1/3$ の速さの波と衝突すると、右方向に進む速さ $1/3$ の o 波を生成する。将軍が生成した速さ $1/1$ の波が故障空間を通過しすると、セル空間を解冻させる働きを持つ a 波、 b 波を生成し、左方向に $1/1$ の速さで進む y 波を生成する。 y 波がセル空間を左方向に進み o 波と衝突すると、 y 波、 o 波の双方が消滅し、右方向に速さ $1/1$ で進む j 波が生成される。 j 波は右方向に進み、故障セル領域を通過すると、1 ステップ後に故障セル領域に接するセルに新たな将軍を生成し、一斉射撃を開始する。さらに右方向に故障領域が存在した場合は、先ほど述べた方法でセル空間を凍結し、故障セル領域の右側に新しい将軍を作成しする。

凍結したセル空間を解冻するには a 波、 b 波を使用する。 a 波は右方向に速さ $1/1$ で伝播する。 b 波は右方向に速さ $1/1$ で伝播する。しかしながら、 b 波は故障セル領域を通過するごとに 1 ステップ遅延する。 a 波、 b 波はセル C_n に達すると、反射し、進行方向が左方向に変化する。 a 波は左方向に速さ $1/1$ で伝播する。しかしながら、 a 波は故障セル領域を通過するごとに 1 ステップ遅延する。 b 波は左方向に速さ $1/1$ で伝播する。左方向に進む a 波と b 波が故障セル領域を通過する際に双方の波が重なった場合、 a 波と b 波は消滅し、セル空間を解冻させる t 波を生成する。 t 波は左方向に速さ $1/1$ で伝播し、凍結しているセルの領域に達することで、凍結が解冻され、一斉射撃アルゴリズムが再開される。左方向に進む a 波、右方向に進む b 波を遅延させるのは、故障セル空間が複数個存在した場合に、解冻を行なう領域を指定するためである。

4.3.4 ML-CA 上での実装について

Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムは、Balzer の一斉射撃アルゴリズムに加え、セル空間を凍結させる f 波、セル空間を解冻させる a 波、 b 波、 t 波、新しい将軍を生成するために使用する y 波、 o 波、 j 波がセル空間を伝播している。これらの波が複雑に重なり合う事が、CA 上でのアルゴリズムの実装を困難にしている。ML-CA を利用し、これらの波を異なるレイヤーで動作させることで、波を干渉させずに伝播させることが可能となる。

Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムを 3 レイヤーを持つ ML-CA 上で実装を行う。それぞれのレイヤーで使用する内部状態集合 Q_1, Q_2, Q_3 、アフェクト状態集合 $P_{(1,2)}, P_{(1,3)}, P_{(2,1)}, P_{(2,3)}, P_{(3,1)}$ は以下の通りとなる。

$$Q_1 = \{ A, B, C, F, L, M, Q, R, a, b, g, i, j, S, h, c, p, l, r, t, e, f, u, v, w, s, k, x, o, z, q, y \}$$

$$Q_2 = \{ m, E, W, G, H, I, J, K, N, T, X, >,], /,), Y, Z \}$$

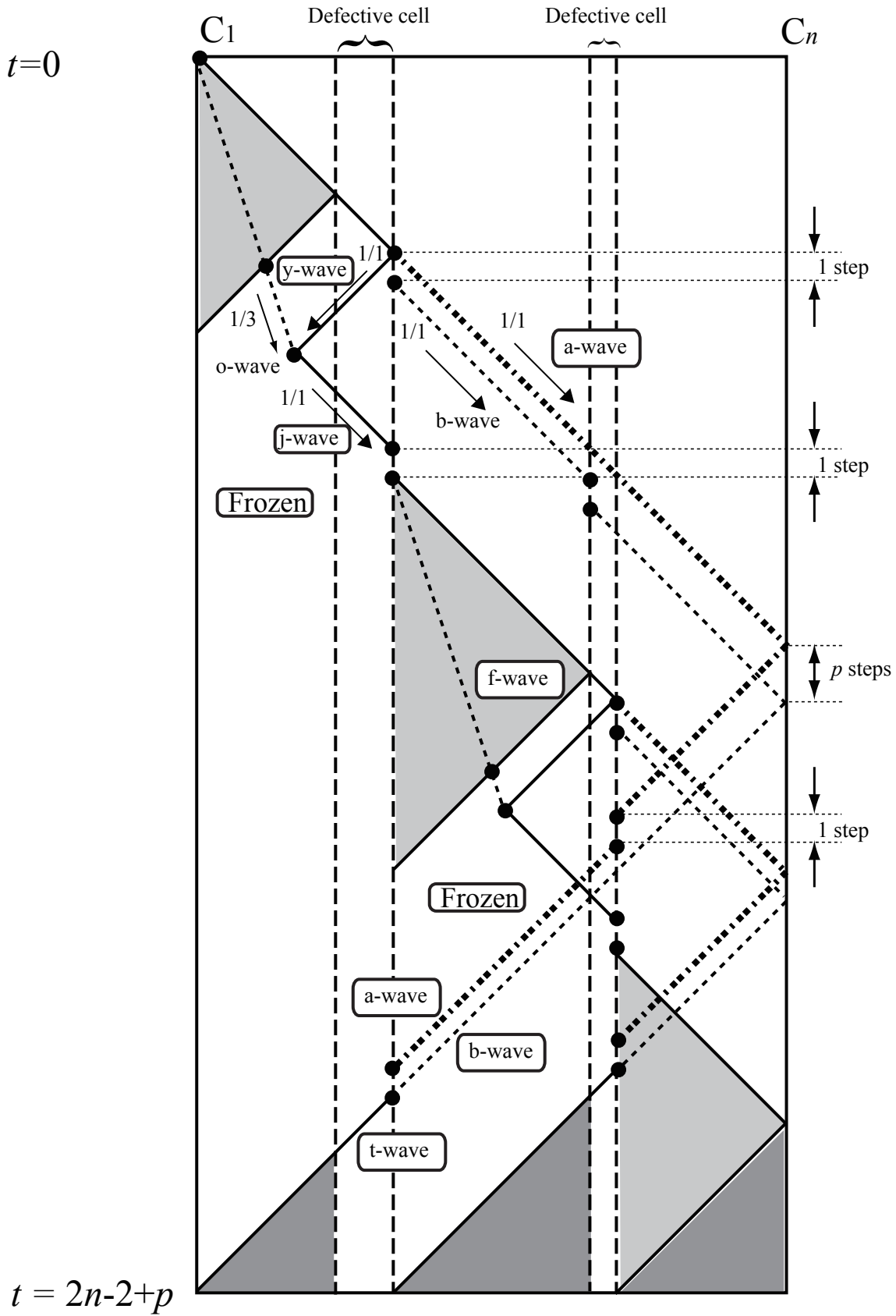


図 4.9 耐故障性一斉射撃アルゴリズムの時間-空間図式

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \{ n, <, \text{C}, \text{L}, \{\} \} \\
P_{(1,2)} &= \{ -, \text{C}, \text{a}, \text{j}, \text{h}, \text{r}, \text{t}, \text{u}, \text{x}, \text{z}, \text{q}, \text{y} \} \\
P_{(1,3)} &= \{ -, \text{i}, \text{p}, \text{l}, \text{t}, \text{q}, \text{y} \} \\
P_{(2,1)} &= \{ -, \text{N} \} \\
P_{(2,3)} &= \{ -, \text{W}, \text{X}, \text{J}, \text{I}, \text{Y}, \text{Z} \} \\
P_{(3,1)} &= \{ -, \text{L} \}
\end{aligned}$$

また、各レイヤーで使用する遷移規則集合 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ の要素数はそれぞれ $|\delta_1| = 488, |\delta_2| = 345, |\delta_3| = 332$ となる。

Balzer の一斉射撃アルゴリズムの波の伝播を L_1 , 右方向に進む a 波, b 波を L_2 , 左方向に進む a 波, b 波, t 波を L_3 , f 波, y 波, o 波, j 波を L_4 で伝播させる事で、波の干渉を発生させず、実装を行うことが可能となる。レイヤーごとの時間-空間図式を図 4.10 に示す。

実装を行った内部状態集合 Q_1, Q_2, Q_3 , アフェクト状態集合 $P_{(1,2)}, P_{(1,3)}, P_{(2,1)}, P_{(2,3)}, P_{(3,1)}$, 遷移規則集合 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ について、ML-CA シミュレータを使用して、セル数が 2 から 50 の範囲で正当性を確認した。図 4.11 にレイヤーごとのシミュレーション状況を示す。

また、ML-CA シミュレータを使用して CA の内部状態集合 Q_s , 遷移規則集合 δ_s を得た。図 4.12 に CA 上で動作させた耐故障性一斉射撃アルゴリズムのシミュレーション状況を示す。内部状態数, 遷移規則数はそれぞれ, $|Q_s| = 158, |\delta_s| = 4612$ となり、ML-CA 上で定義した内部状態数, 遷移規則数よりも増加した。これにより、Umeo [18] の耐故障性一斉射撃アルゴリズムの場合、ML-CA を用いた方が設計の効率が良いことが明らかになった。

4.4 結言

本章では、CA 上の一斉射撃問題について述べた。4.2 節では、内部状態数が少ない 1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題について考察し、4.3 節では、故障セルが存在するセル空間を同期させる耐故障性一斉射撃問題について言及し、CA で動作する耐故障性一斉射撃アルゴリズムの遷移規則を明らかにした。

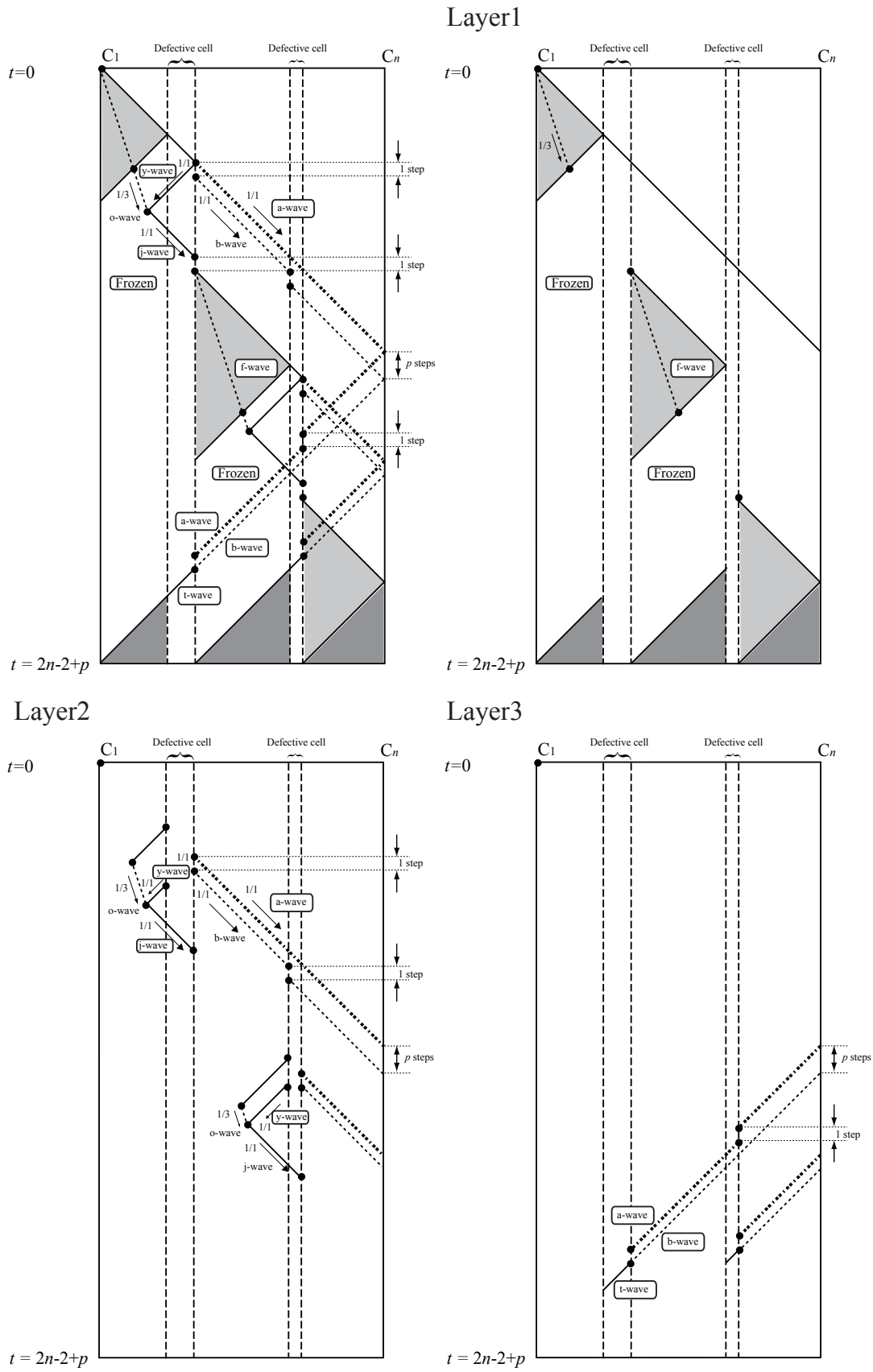


図 4.10 レイヤーごとの時間-空間図式

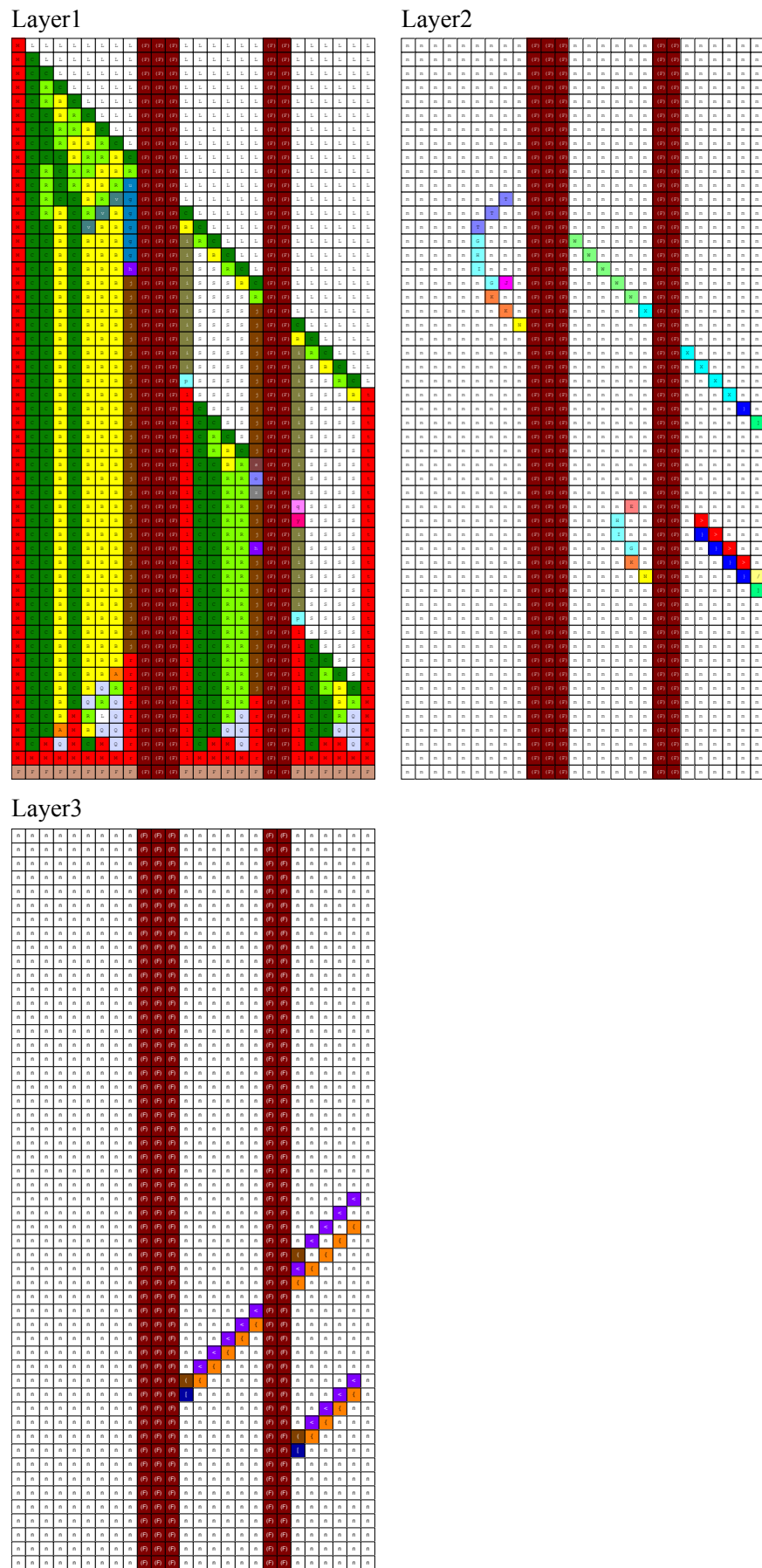


図 4.11 ML-CA 上でのシミュレーション状況

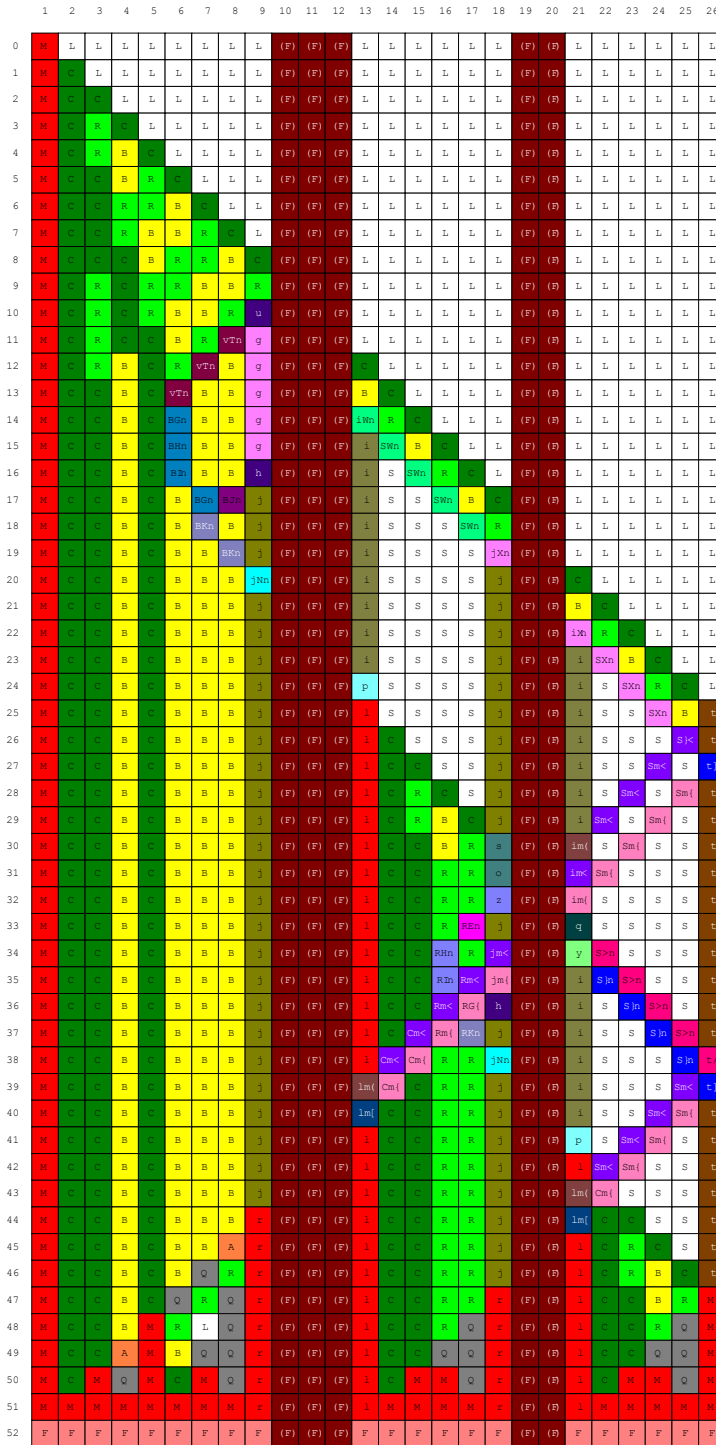


図 4.12 CA 上でのシミュレーション状況

第 5 章

結論

本論文では、並列計算モデルであるセルオートマトンの内部状態数に着目し、内部状態の少ないセルオートマトンの能力、セルアルゴリズムについて述べた。以下に本研究で得られた成果を示す。

第 2 章ではセルオートマトン (CA) の定義について述べ、CA を記述するための記法を導入した。また、セル間通信量を 1 ビットに制限した CA のモデルであり、最も能力が低いと考えられている 1 ビットセルオートマトン (CA_{1-bit}) についての記法も導入した。階層構造を持つセルで構成されるマルチレイヤーセルオートマトン (ML-CA) の新しいモデルを提案し、ML-CA → CA の変換方法を明らかにした。

第 3 章では CA 上の考察されている問題の一つである実時間数列生成問題について述べた。まず、1 状態および 2 状態 CA で生成可能な数列を明らかにし、CA 上の数列生成アルゴリズムについて考察し、Fibonacci 数列、数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成できることを明らかにした。また、数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムは内部状態数について最適である。また、CA_{1-bit} 上の数列生成問題についても考察を行ない、1 状態、および 2 状態の CA_{1-bit} で生成できる数列のクラスを明らかにし、1 状態、および 2 状態の CA と CA_{1-bit} の数列生成能力の比較を行った。数列生成能力の比較により、内部状態数が 2 以下であれば、最も能力が低いと考えられてきた CA_{1-bit} の方が複雑な数列を生成可能であるという結果を得た。CA_{1-bit} 上でも数列生成アルゴリズムについて考察し、Fibonacci 数列、数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成について、同一時間で解決する CA_{1-bit} 上の生成アルゴリズムが存在することを明らかにした。

第 4 章では CA の同期問題である、一斉射撃問題について考察を行なった。内部状態数が少ない 1 次元リング接続 CA 上の一斉射撃問題について考察し、4 状態の 1 次元リング接続 CA を同期させる部分解が多数存在することを明らかにした。また、故障セルが存在するセル空間を同期させる耐故障性一斉射撃問題について考察を行ない、ML-CA シミュレータを使用して、耐故障性一斉射撃アルゴリズムを実装し、ML-CA シミュレータの機能である遷移規則変換機能により、CA で動作する耐故障性一斉射撃アルゴリズムの遷移規則を明らかにした。

参考文献

- [1] J. v. Neumann. *Theory of self-reproducing automata*. A. W. Burks (Ed.), Univ. of Illinois Press, 1968.
- [2] S. Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 55, No. 3, pp. 601–644, 1983.
- [3] C. G. Langton. Computation at the edge of chaos: phase transition and emergent computation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 42, pp. 12–37, June 1990.
- [4] P. C. Fischer. Generation of primes by a one-dimensional real-time iterative array. *J. of ACM*, Vol. 12, No. 3, pp. 388–394, 1965.
- [5] 有沢. 有限状態機械の一次元繰り返し形配列による数列の生成方式について. 電子通信学会論文誌 C, Vol. 54, No. 8, pp. 759–766, 1971.
- [6] 梅尾博司. セルラ計算機. 超並列計算機アーキテクチャとそのアルゴリズム, pp. 61–71. 共立出版, 1991.
- [7] I. Korec. Real-time generation of primes by a one-dimensional cellular automaton with 11 states. *Proc. of 22nd Intern. Symp. on MFCS '97, Lecture Notes in Computer Science, 1295*, pp. 385–367, 1997.
- [8] I. Korec. Real-time generation of primes by a one-dimensional cellular automaton with 9 states. *Proc. of the 2nd International Colloquium on Universal Machines and Computations*, Vol. 42, pp. 12–37, June 1990.
- [9] H. Umeo, K. Miyamoto, and Y. Abe. A construction of smallest real-time prime generators on cellular automata. *The 2nd International Conference on Computer Technology and Development (ICCTD Japan)*, pp. 338–342, 2012.
- [10] E. F. Moore. The firing squad synchronization problem. In *Sequential Machines, Selected Papers*, pp. 213–214. Addison-Wesley, 1964.
- [11] E. Goto. A minimal time solution of the firing squad problem. *Dittoed course notes for Applied Mathematics 298*, pp. 52–59, 1987.
- [12] A. Waksman. An optimum solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, Vol. 9, No. 1, pp. 66–78, 1966.
- [13] R. Balzer. An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Information and Control*, Vol. 10, pp. 22–42, 1967.
- [14] H. Szwerinski. Time-optimum solution of the firing-squad synchronization-problem for n-dimensional rectangles with the general at an arbitrary position. *Theoretical Computer Science*, Vol. 19, pp. 305–320, 1982.
- [15] H. D. Gerken. Über synchronisationsprobleme bei zellularautomaten. *Diplomarbeit, Institut für Theoretische Informatik, Technische Universität Braunschweig*, pp. 1–50, 1987.
- [16] J. Mazoyer. A six-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem. *Theo-*

- retical Computer Science*, Vol. 50, No. 2, pp. 183–238, 1987.
- [17] A. Berthiaume, T. Bittner, L. Perković, A. Settle, and J. Simon. Bounding the firing synchronization problem on a ring. *Theoretical Computer Science*, Vol. 320, No. 2-3, pp. 213–228, 2004.
- [18] H. Umeo. A simple design of time-efficient firing squad synchronization algorithms with faulttolerance. *IEICE Trans. on Information and Systems*, Vol. E87-D, No. 3, pp. 733–739, 2004.
- [19] J. B. Yunès. Fault tolerant solutions to the firing squad synchronization problem in linear cellular automata. *Journal of Cellular Automata*, Vol. 1, No. 3, pp. 258–268, 2006.
- [20] S. Wolfram. Random sequence generation by cellular automata. *Advances in Applied Mathematics*, Vol. 7, No. 2, pp. 123–169, 1986.
- [21] B. Shackelford, M. Tanaka, R. J. Carter, and G. Snider. Fpga implementation of neighborhood-of-four cellular automata random number generators. *Proc. 2002 ACM/SIGDA Tenth International Symposium on Field-Programmable Gate Arrays*, pp. 106–112, 2002.
- [22] M. E. Pazo-Roblesa and A. Fuster-Sabaterb. Modeling pseudorandom sequence generators using cellular automata : The alternating step generator. *Computation in Modern Science and Engineering : Proc. International Conference on Computational Methods in Science and Engineering 2007*, Vol. 963, pp. 969–972, 2007.
- [23] H. Umeo and N. Kamikawa. A design of real-time non-regular sequence generation algorithms and their implementations on cellular automata with 1-bit inter-cell communications. *Fundamenta Informaticae*, Vol. 52, No. 1-3, pp. 257–275, 2002.
- [24] H. Umeo and N. Kamikawa. Real-time generation of primes by a 1-bit-communication cellular automaton. *Fundamenta Informaticae*, Vol. 58, No. 3-4, pp. 421–435, 2003.
- [25] H. Umeo, N. Kamikawa, and J. B. Yunès. A family of smallest symmetrical four-state firing squad synchronization protocols for ring arrays. *Parallel Processing Letters*, Vol. 19, No. 2, pp. 299–313, 2009.
- [26] W. L. Ng. *Partial solutions for the firing squad synchronization problem on rings*. ProQuest publications, 2011.

謝辞

本論文を結ぶにあたり、長年に渡る多大なご指導、ご助言ならびにご鞭撻を賜りました、大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻 梅尾 博司教授に謹んで感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり、本学大学院 工学研究科 先端理工学専攻 浅倉 史興教授、工学研究科 情報工学専攻 越後 富夫教授、来海 暁教授には多くの貴重かつ有益なご助言を頂きました。心より御礼申し上げます。

また、研究ツールの使用をご快諾頂いた、本学大学院 工学研究科 先端理工学専攻 阿久津 典子教授に感謝の意を表します。

最後に、亡き両親と、研究活動に理解を示し様々な面で支え続けてくれた妻に心から感謝致します。

研究業績目録

論文誌

1. 上川, 梅尾: セルオートマトン上の実時間数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの正当性について. 情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用. (採録決定)
2. 上川, 梅尾: 能力の小さい1ビットセルオートマトンで生成可能な数列についての考察. 情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用 (TOM), Vol. 10, No. 1, pp.1-13, 2017.
3. N. Kamikawa and H. Umeo: A construction of five-state real-time Fibonacci sequence generator. *Artificial Life and Robotics*, Vol. 21, No. 4, pp. 531-539, DOI: 10.1007/s10015-016-0309-2, 2016.
4. N. Kamikawa and H. Umeo: A study on sequence generation powers of small cellular automata. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 5, No. 4, pp. 191-199, DOI: 10.9746/jcmsi.5.191, 2012.
5. H. Umeo, N. Kamikawa, K. Nishioka, and S. Akiguchi: Generalized firing squad synchronization protocols for one-dimensional cellular automata - A survey. *Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement*. Vol.3, pp.267-289, 2010.
6. H. Umeo, N. Kamikawa and J.-B. Yunès: A family of smallest symmetrical four-state firing squad synchronization protocols for ring arrays. *Parallel Processing Letters*, Vol. 19, No. 2, pp. 299-313, DOI: 10.1142/S0129626409000237, 2009.
7. H. Umeo, K. Michisaka, N. Kamikawa and M. Kanazawa: State-efficient one-bit-communication solutions for some classical cellular automata problems. *Fundamenta Informaticae*, Vol. 78(2007), pp.449-465.
8. H. Umeo and N. Kamikawa: Real-time generation of primes by a 1-bit-communication cellular automaton. *Fundamenta Informaticae*, Vol. 58, No. 3-4, pp. 421-435, 2003.
9. H. Umeo and N. Kamikawa: A design of real-time non-regular sequence generation algorithms and their implementations on cellular automata with 1-bit inter-cell communications. *Fundamenta Informaticae*, Vol. 52, No. 1-3, pp. 257-275, 2002.

国際会議議事録 (査読有り)

1. H. Umeo and N. Kamikawa: A new class of the smallest four-state partial FSSP solutions for one-dimensional ring cellular automata. *14th International Conference on Parallel Computing Technologies (V. Malyshekin (Ed.)), PaCT 2017*, LNCS 10421, Springer International Publishing, Switzerland, pp.232-245, (2017), DOI: 10.1007/978-3-319-62932-2-22.
2. H. Umeo and N. Kamikawa: A quest for the smallest partial FSSP Solutions -Recent developments-. *Automata 2017 Exploratory paper, Proc. of Automata 2017*, pp.1 (abstract), 2017.

3. N. Kamikawa and H. Umeo: An implementation of fault-tolerant FSSP algorithms. *2016 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications*, pp. 218-221, 2016.
4. N. Kamikawa and H. Umeo: A note on five-states Fibonacci sequence generator. *The Twentieth International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.132-137, 2015.
5. N. Kamikawa and H. Umeo: A comparison of sequence generation power in cellular automata. *ICROS-SICE International Joint Conference 2009*, pp.3315-3320, 2009.
6. H. Umeo, J.-B. Yunès, N. Kamikawa , and J. Kurashiki: Small non-optimum-time firing squad synchronization protocols for one-dimensional rings. *Proc. of the 2009 Intern. Symp. on Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA '09*, pp. 479-482, (2009).
7. H. Umeo, K. Ishida, K. Tachibana and N. Kamikawa: A construction of real-coded transition rule set for Shinahr's optimum-time synchronization algorithm on two-dimensional cellular arrays. *Proc. of the 24th Intern. technical Conf. on Circuits/Systems, Computers and Communications, ITC-CSCC 2009*, pp.251-254, (2009).
8. N. Kamikawa and H. Umeo : A design of algorithms for real-time generation of linear-recursive sequences on cellular automata. *The Fourteenth International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.281-286, 2009.
9. H. Umeo, J.-B. Yunès and N. Kamikawa: About 4-states solutions to the firing squad synchronization problem. *Eighth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, pp.108-113, 2008.
10. H. Umeo, N. Kamikawa and J.-B. Yunès: A family of smallest symmetrical four-state firing squad synchronization protocols for one-dimensional ring cellular automata. *Automata 2008*, pp. 174-186, 2008.
11. N. Kamikawa and H. Umeo: A note on sequence generation power of two-states cellular automata. *SICE Annual Conference 2008*, pp.3315-3320, 2008.
12. N. Kamikawa and H. Umeo: A note on sequence generation power of communication-restricted cellular automata with small number of states. *The 2008 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications*, pp.764-770, 2008.
13. N. Kamikawa and H. Umeo: Some state-efficient algorithms for real-time generation of non-regular sequences on cellular automata. *The Thirteenth International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.47-50, 2008.
14. N. Kamikawa and H. Umeo: Some algorithms for real-time generation of non-regular sequences on one-bit inter-cell-communication cellular automata. *SICE Annual Conference 2007*, pp.953-958, 2007.
15. N. Kamikawa and H. Umeo: Real-time sequence generation problem on one-bit inter-cell-communication cellular automata. *The 15th IEEE International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*, pp.86-89, 2007.
16. N. Kamikawa and H. Umeo: Sequence generation problem on communication-restricted cellular automata. *The 5th WSEAS International Conference on Non-Linear Analysis, Non-Linear System and Chaos*, pp.143-148, 2006.
17. H. Umeo, K. Michisaka, N. Kamikawa and Y. Kinugasa: Efficient 1-bit-communication cellular algorithms. In *Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes (Eds. H. G. Bock, E. Kostina, H. X. Phu and R. Rannacher)*, Springer, pp.509-522 (2003).

18. H. Umeo, K. Michisaka and N. Kamikawa: A synchronization problem on 1-bit communication cellular automata. *Proc. of the International Conference on Computational Science*, LNCS 2657, pp.492-500, 2003.
19. H. Umeo and N. Kamikawa: An infinite prime sequence can be generated in real-time by a 1-bit inter-cell communication cellular automata. *Proc. of the International Conference on Developments of Language Theory*, LNCS 2450, pp.339-348, 2002.

国内研究会等

1. 上川, 梅尾: セルオートマトン上の実時間数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの正当性について. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 2017-MPS-115 (8), pp. 1-6, 2017.
2. 上川, 梅尾: セルオートマトン上の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの設計. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 2017-MPS-113 (15), pp. 1-6, 2017.
3. 上川, 梅尾: マルチレイヤー・セルオートマトン・シミュレータの設計と応用. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 116, No. 425, MSS2016-69, pp. 71-76, 2017.
4. 上川, 梅尾: マルチレイヤー・セルオートマトンを用いた耐故障性一斉射撃アルゴリズムの実装. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 116, No. 272, NLP2016-72, pp. 43-47, 2016.
5. 上川, 梅尾: 能力の小さい1ビットセルオートマトンで生成可能な数列についての考察. 情報処理学会研究報告 数理モデルと問題解決研究会 2016-MPS-110 (1), pp. 1-6, 2016.
6. 上川, 梅尾: 内部状態数の少ないセルオートマトンで生成される数列についての考察. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 115, No. 77, NLP2015-56, pp. 103-108, 2015.
7. 上川, 梅尾: セルオートマトンで生成可能な非正則数列について. 計測自動制御学会 システム・情報部門学術講演会 2014, pp. 1208-1213, 2014.
8. 上川, 梅尾: 5状態セルオートマトン上でのフィボナッチ数列の実時間生成アルゴリズム. 情報処理学会研究報告 アルゴリズム研究会 (AL) 2014-AL-149(7), pp. 1-7, 2014.
9. 今井, 上川, 梅尾: 1次元最適時間一般化同期アルゴリズムについて. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 113, No. 427, CAS2013-75, pp. 15-18, 2014.
10. 上川, 植田, 西木, 兼宗: アンプラグドを利用したオープンキャンパスイベントの試み. 情報処理学会研究報告 研究報告コンピュータと教育 (CE) 2009-CE-101(6), pp. 1-4, 2009.
11. 谷邨, 金澤, 上川, 梅尾: Early Bird 問題に関する一考察. 電子情報通信学会技術研究報告. Vol. 108, No. 240, NLP2008-46, pp. 1-6, 2008.
12. 橋, 石田, 上川, 梅尾: 2次元セルオートマトンのための遷移関数の実現手法について. 第18回インターネット・システム・シンポジウム (FAN 2008), pp.31-36, 2008.
13. H. Umeo, N. Kamikawa and J.-B. Yunès: A class of smallest four-state firing squad synchronization protocols for one-dimensional ring cellular automata. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 108, No. 237, COMP2008-37, pp. 25-31, 2008.
14. 上川, 梅尾: 1状態および2状態1ビット通信セルラ・オートマトンの数列生成能力について. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 2008-MPS-070(5), pp. 17-20, 2008.
15. 上川, 梅尾: Balzer による最適時間一斉射撃アルゴリズムの正当性について. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 2007-MPS-67(1), pp. 1-4, 2007.
16. 上川, 梅尾: 1状態1ビット通信セルラ・オートマトンの数列生成能力について. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 107, No. 185, NLP2007-56, pp. 19-24, 2007.

17. 上川, 梅尾: 2 状態 1 ビット通信セルラ・オートマトンで生成可能な 2 次多項式数列について. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 107, No. 86, NLP2007-11, pp. 1-5, 2007.
18. 上川, 梅尾: 1 ビット通信セルラ・オートマトン上での非正則数列生成アルゴリズムについて. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 2007-MPS-64(8), pp. 37-40, 2007.
19. 上川, 梅尾: セル間通信量を制限したセルラ・オートマトン上での一般化一斉射撃アルゴリズムの設計. 情報処理学会 数理モデル化と問題解決シンポジウム -複雑系の科学とその応用-, pp. 71-76, 2006.
20. 柳原, 上川, 梅尾: 2 次元 1 ビット通信セルラオートマトン上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. 106, No. 365, CAS2006-42, pp. 1-6, 2006.
21. 道坂, 矢原, 上川, 梅尾: 1 ビット通信セルラオートマトン上での一斉射撃アルゴリズム. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会 2002-16, pp.9-15, 2002.
22. 道坂, 矢原, 上川, 梅尾: 1 ビット通信セルラオートマトン上での一斉射撃アルゴリズムの一般化について. 第 15 回人工知能学会全国大会 2C3-06, pp.1-4, 2001.
23. 上川, 梅尾: 1 ビットセルオートマトン上での数列生成問題. 日本機械学会 [No.01-63] セルオートマトンシンポジウム講演論文集, pp.96-101, 2001.
24. 上川, 梅尾: 1 ビット通信セルラオートマトン上での素数列生成アルゴリズム. 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会 2000-74, pp.9-16, 2001.
25. 上川, 梅尾: 実時間数列生成アルゴリズムの 1 ビット通信セルラ・オートマトン上での実装について. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 32-11, pp.37-40, 2000.

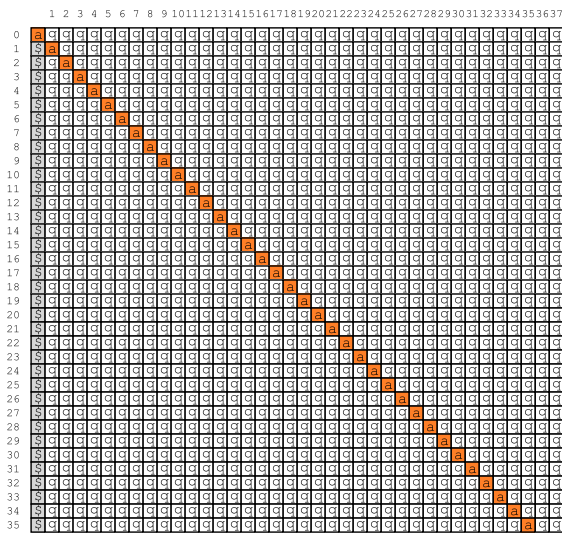
その他

1. 上川, 西木, 早野, 新川: ニンテンドー DS を用いた教育プロジェクトの展開. ヒューマンインタフェース学会誌, Vol.12, No.4, pp.243-248, 2010 (解説論文)
2. N. Kamikawa and H. Umeo : A sequence generation problem on CA_{1-bit} . 大阪電気通信大学 2007 年度 ISC テクニカルレポート, pp. 77-96, 2008.

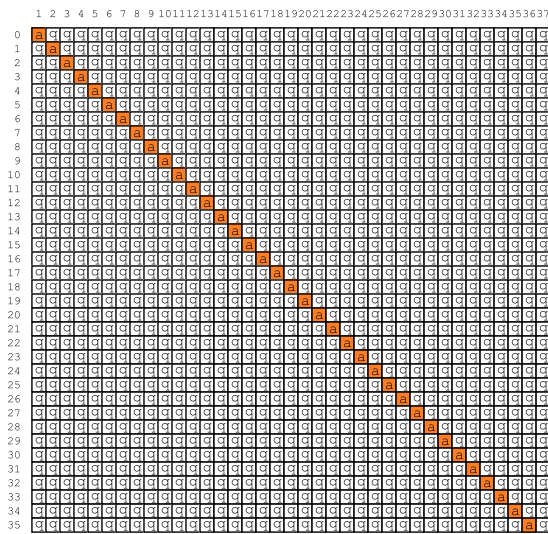
付録

A 数列を生成する 2 状態 CA の 146 個の遷移規則集合のシミュレーション結果

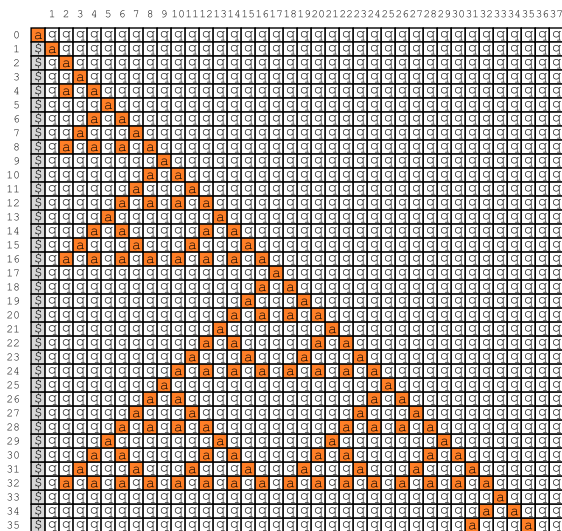
Transition Rule No. 001, Initial Configuration 1



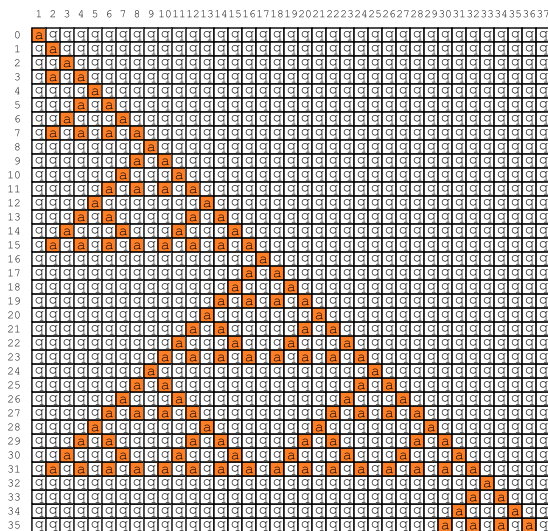
Transition Rule No. 001, Initial Configuration 2



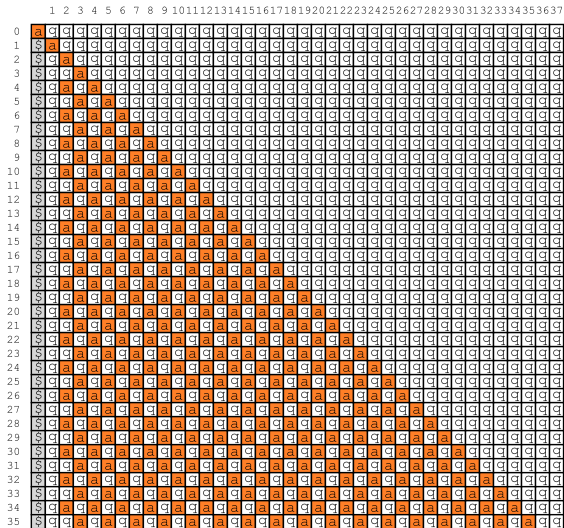
Transition Rule No. 002, Initial Configuration 1



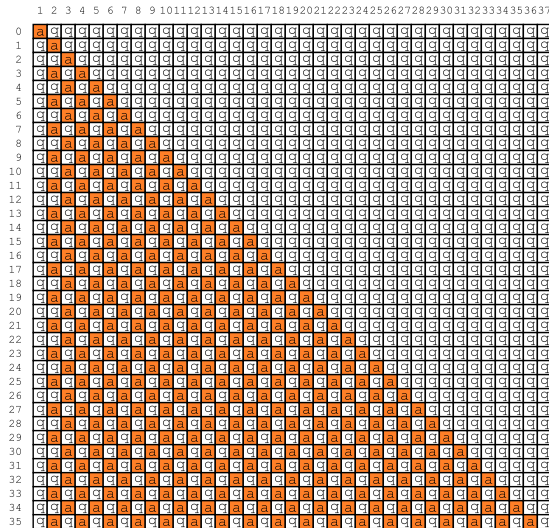
Transition Rule No. 002, Initial Configuration 2



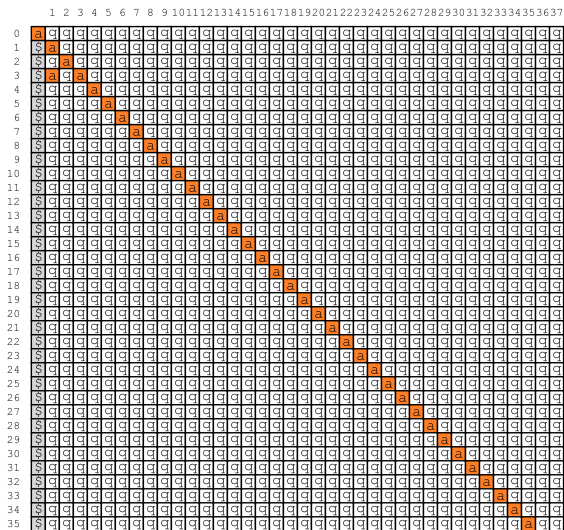
Transition Rule No. 003, Initial Configuration 1



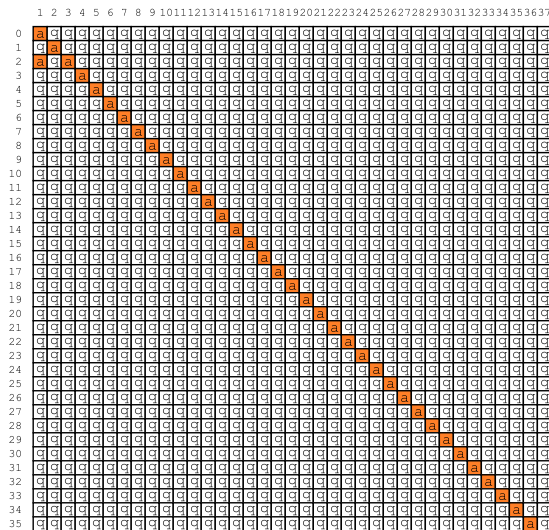
Transition Rule No. 003, Initial Configuration 2



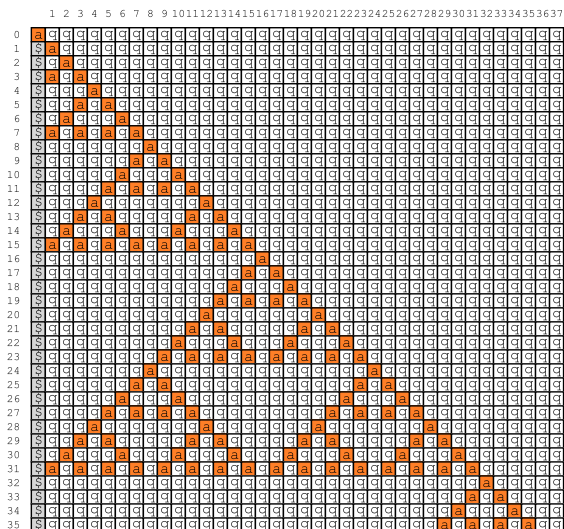
Transition Rule No. 004, Initial Configuration 1



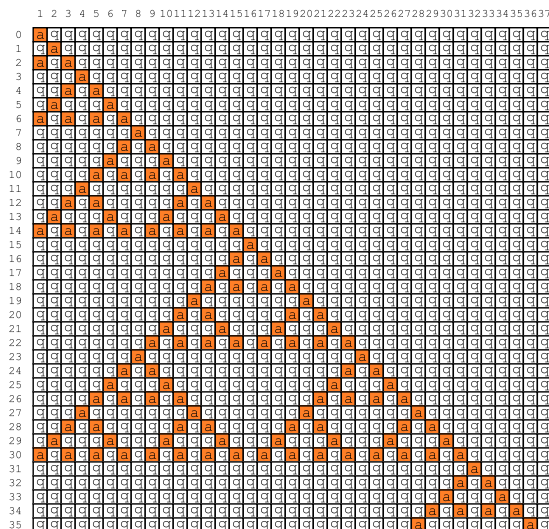
Transition Rule No. 004, Initial Configuration 2



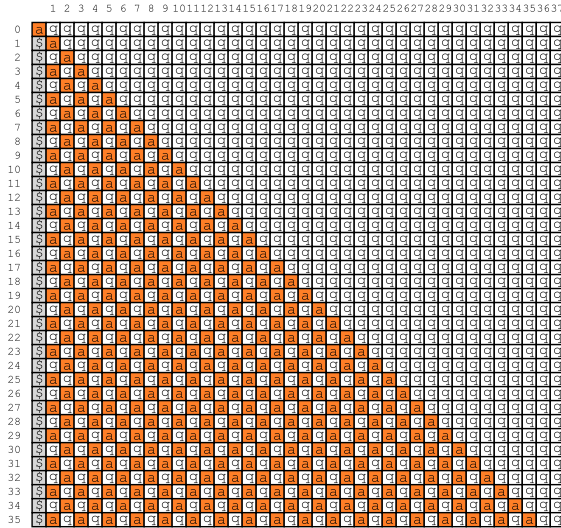
Transition Rule No. 005, Initial Configuration 1



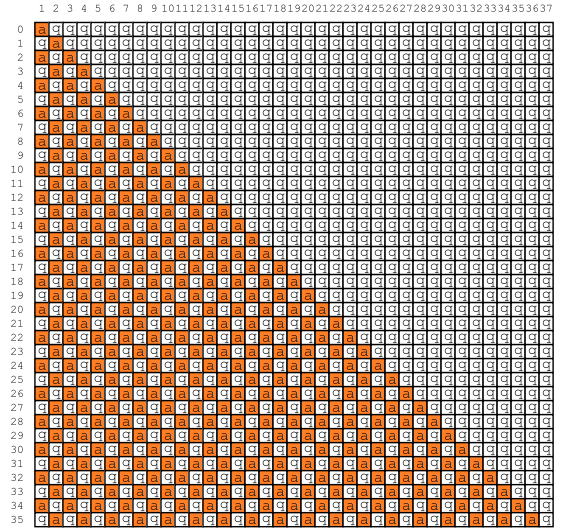
Transition Rule No. 005, Initial Configuration 2



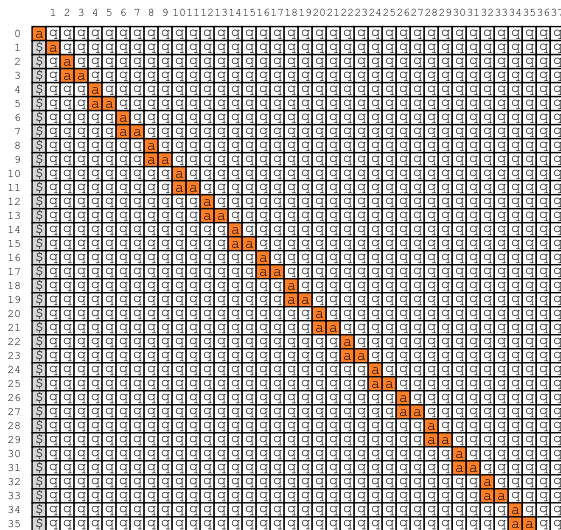
Transition Rule No. 006, Initial Configuration 1



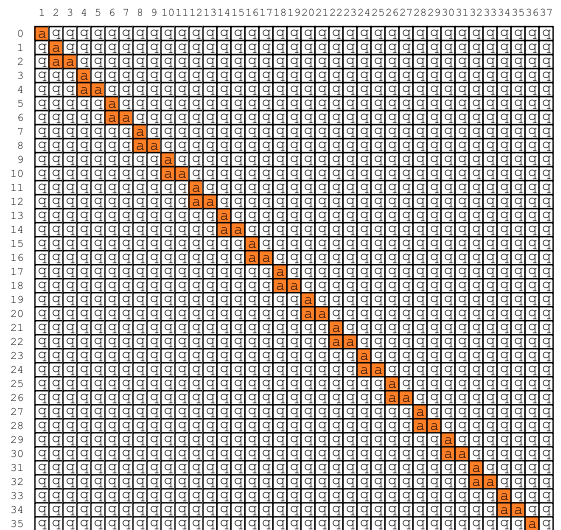
Transition Rule No. 006, Initial Configuration 2



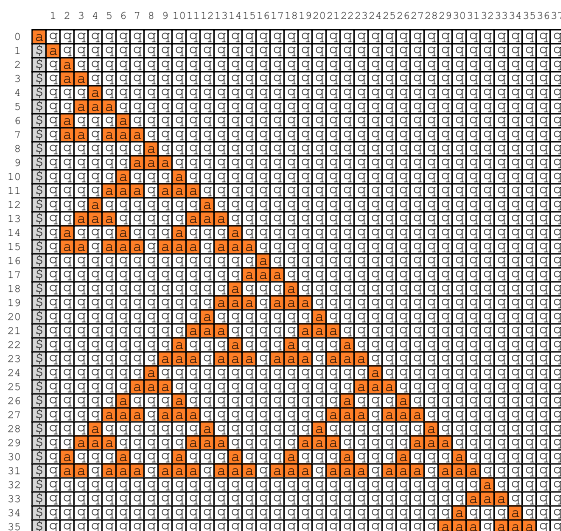
Transition Rule No. 007, Initial Configuration 1



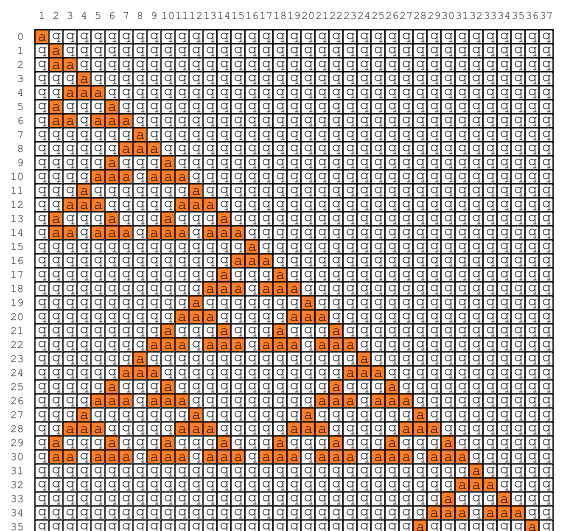
Transition Rule No. 007, Initial Configuration 2



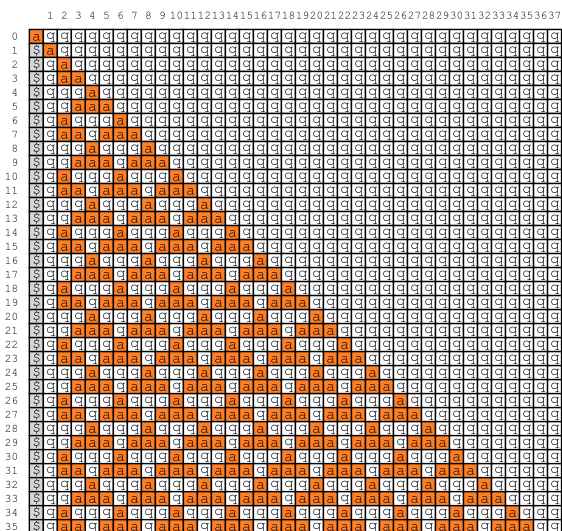
Transition Rule No. 008, Initial Configuration 1



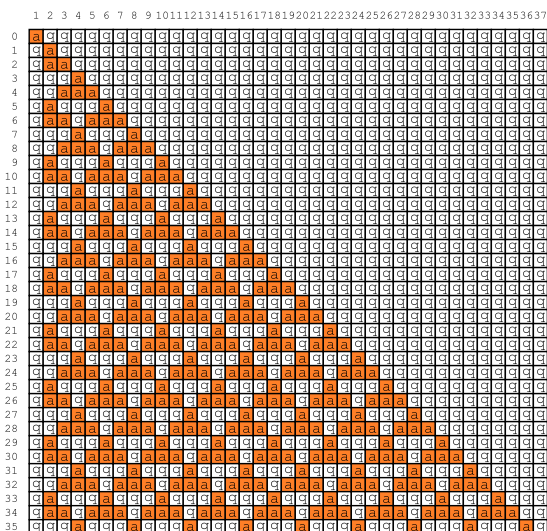
Transition Rule No. 008, Initial Configuration 2



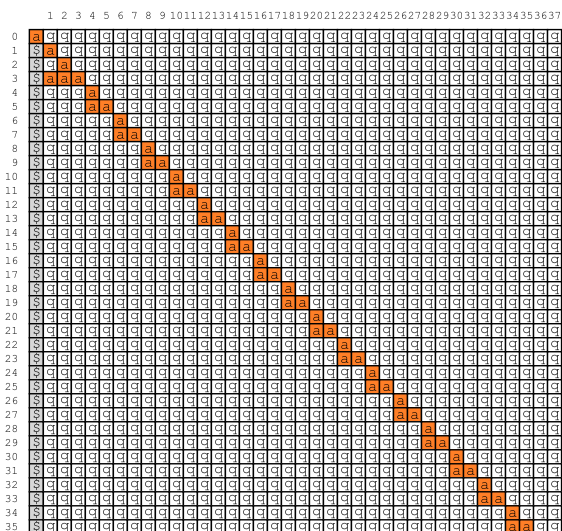
Transition Rule No. 009, Initial Configuration 1



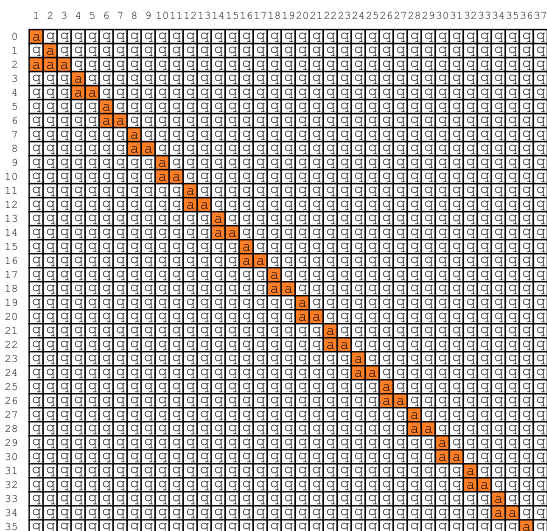
Transition Rule No. 009, Initial Configuration 2



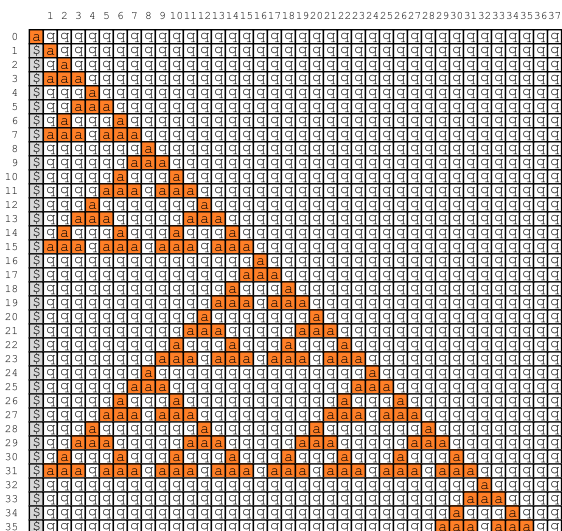
Transition Rule No. 010, Initial Configuration 1



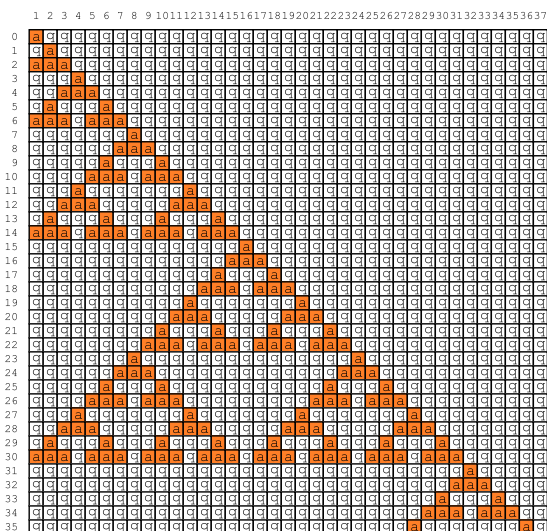
Transition Rule No. 010, Initial Configuration 2



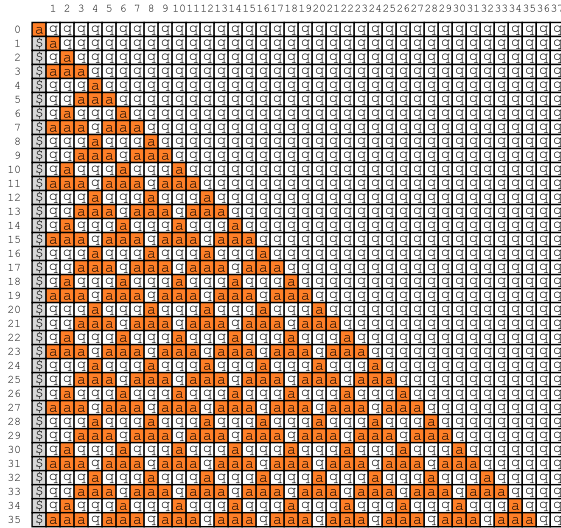
Transition Rule No. 011, Initial Configuration 1



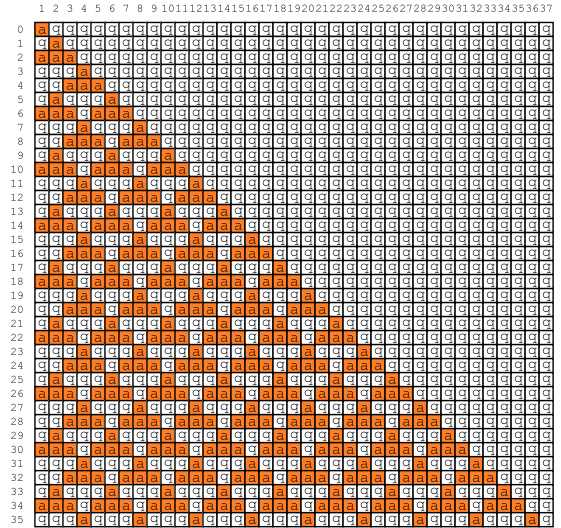
Transition Rule No. 011, Initial Configuration 2



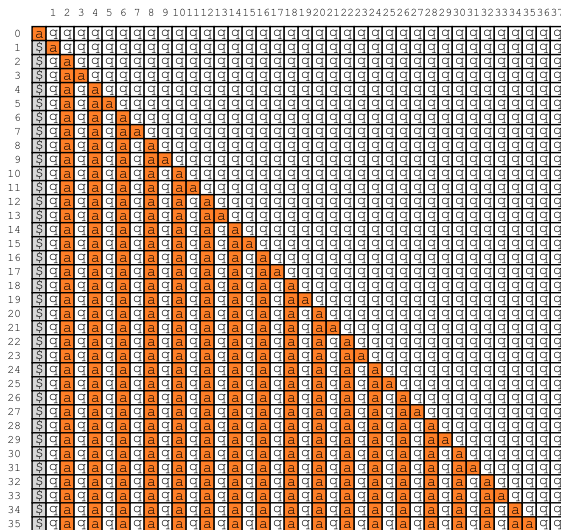
Transition Rule No. 012, Initial Configuration 1



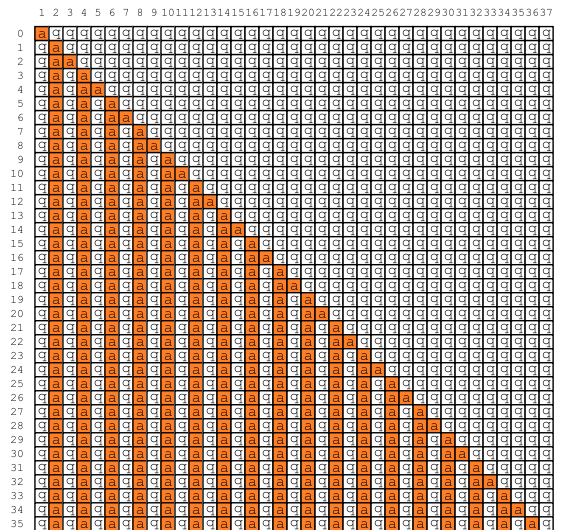
Transition Rule No. 012, Initial Configuration 2



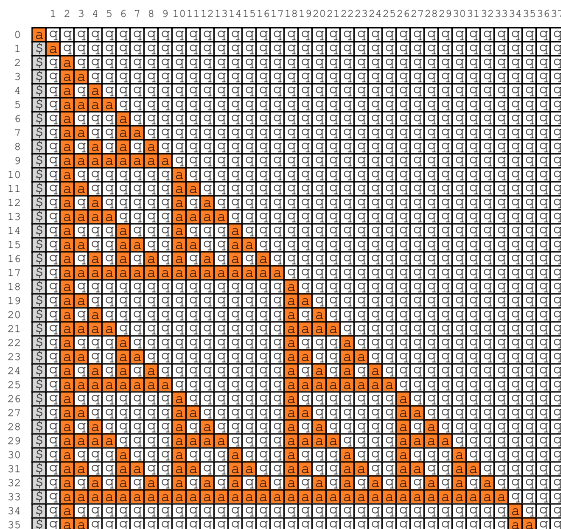
Transition Rule No. 013, Initial Configuration 1



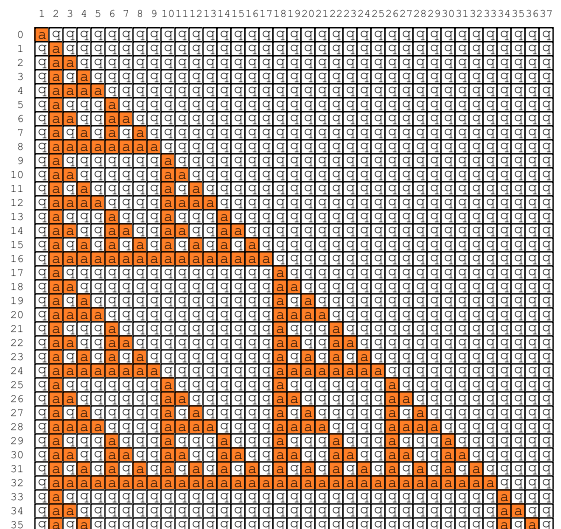
Transition Rule No. 013, Initial Configuration 2



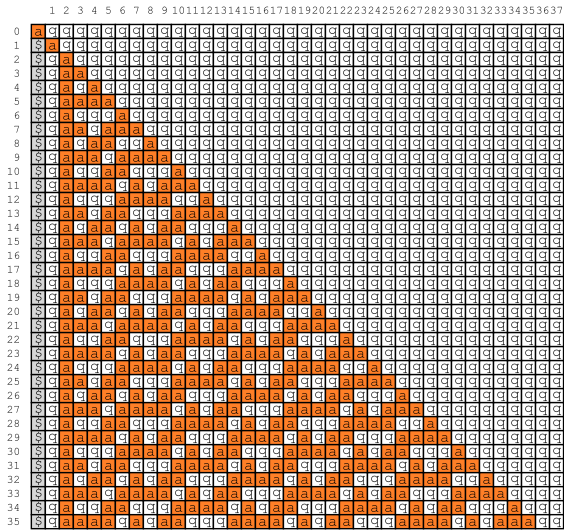
Transition Rule No. 014, Initial Configuration 1



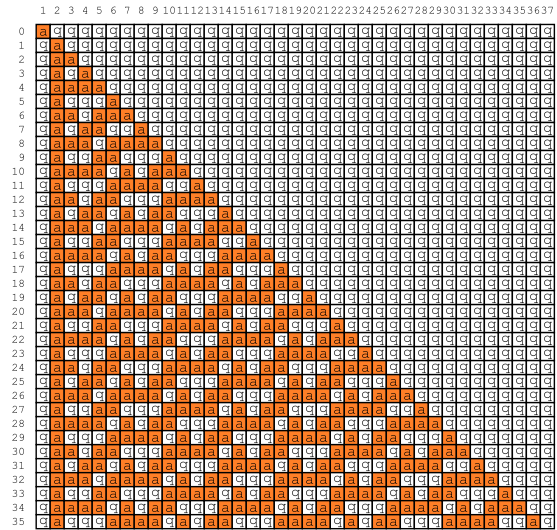
Transition Rule No. 014, Initial Configuration 2



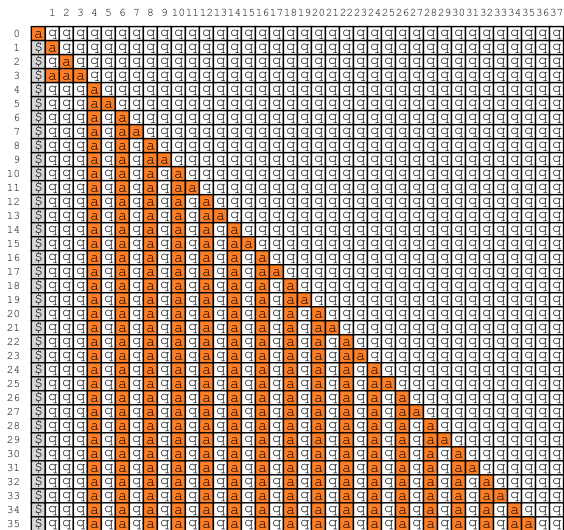
Transition Rule No. 015, Initial Configuration 1



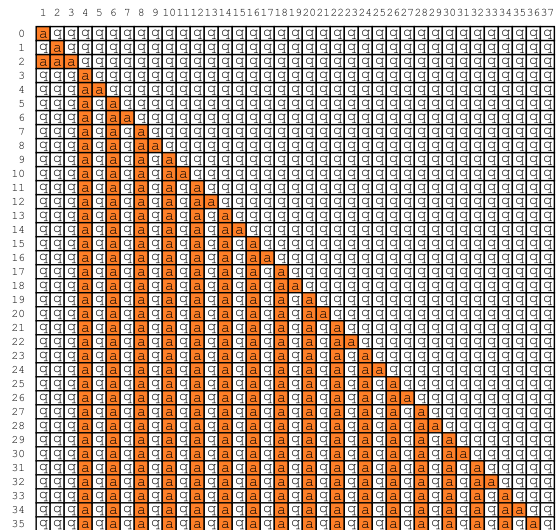
Transition Rule No. 015, Initial Configuration 2



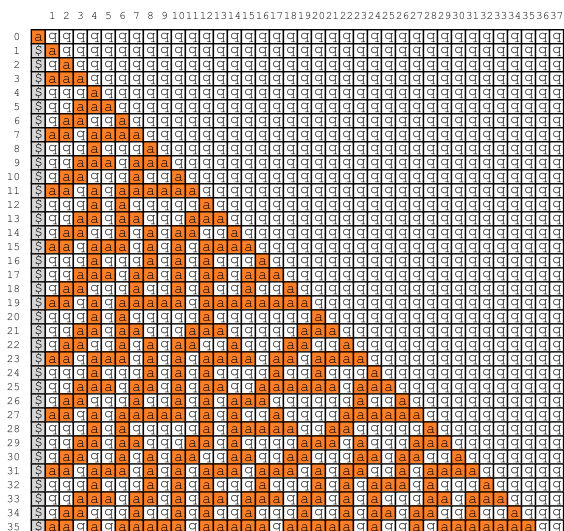
Transition Rule No. 016, Initial Configuration 1



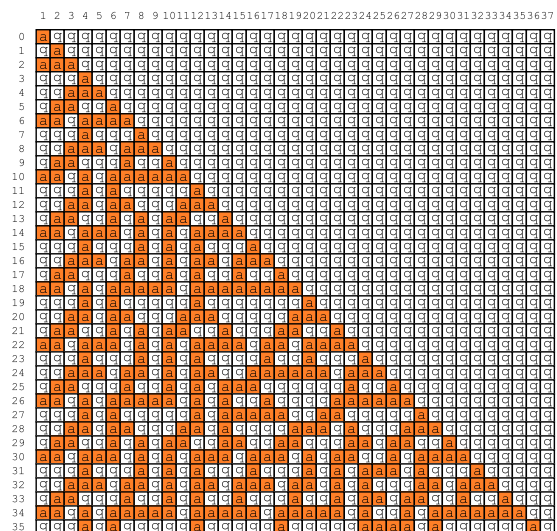
Transition Rule No. 016, Initial Configuration 2



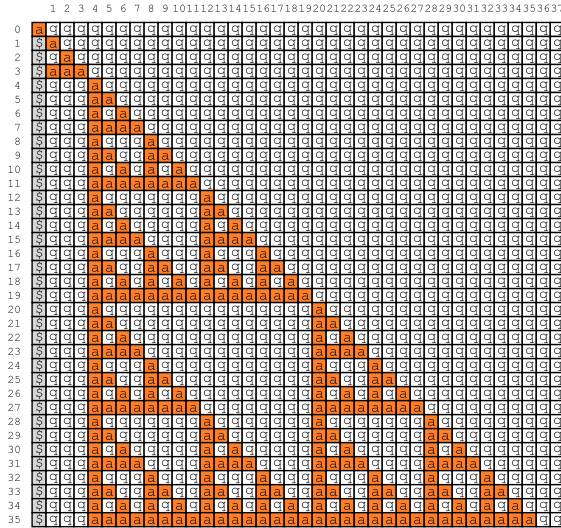
Transition Rule No. 017, Initial Configuration 1



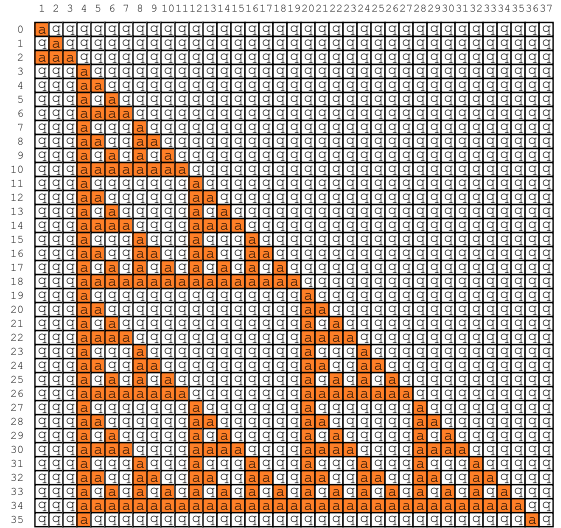
Transition Rule No. 017, Initial Configuration 2



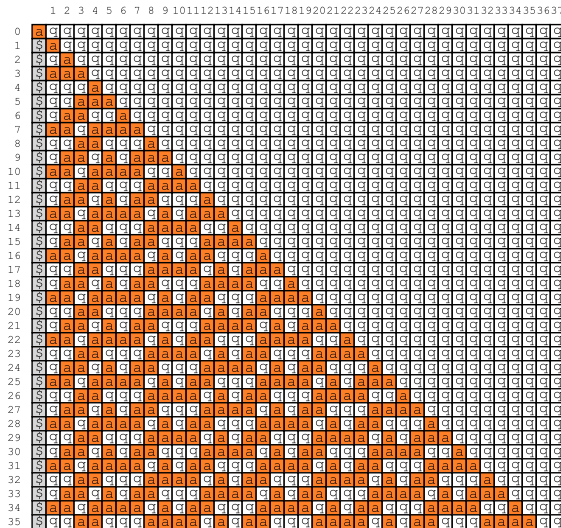
Transition Rule No. 018, Initial Configuration 1



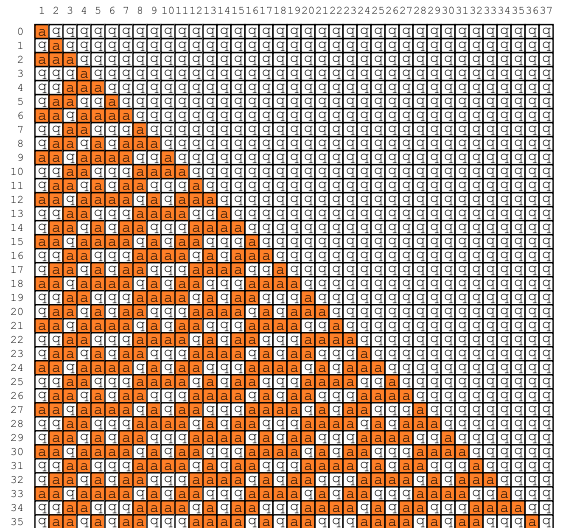
Transition Rule No. 018, Initial Configuration 2



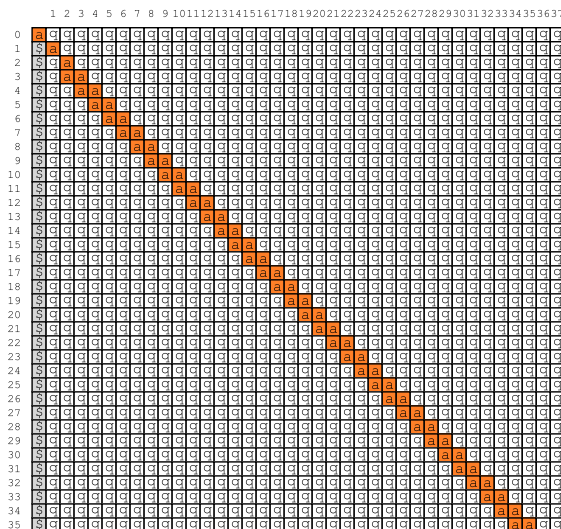
Transition Rule No. 019, Initial Configuration 1



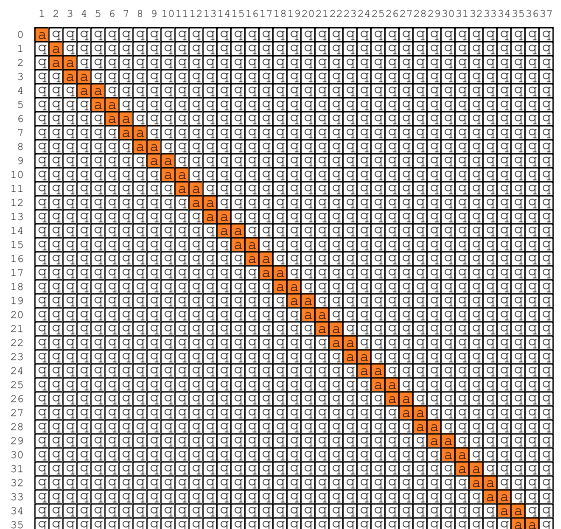
Transition Rule No. 019, Initial Configuration 2



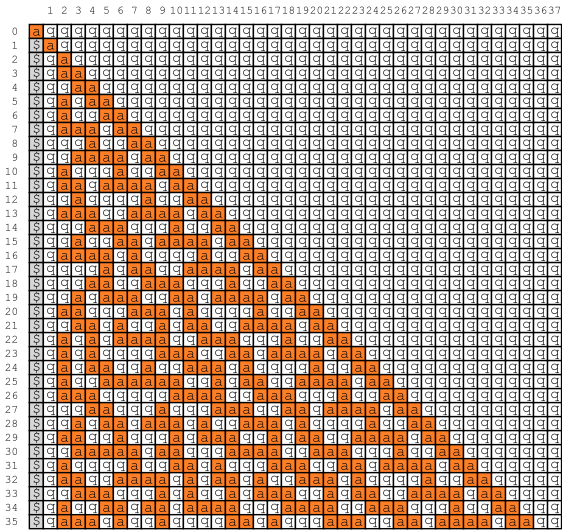
Transition Rule No. 020, Initial Configuration 1



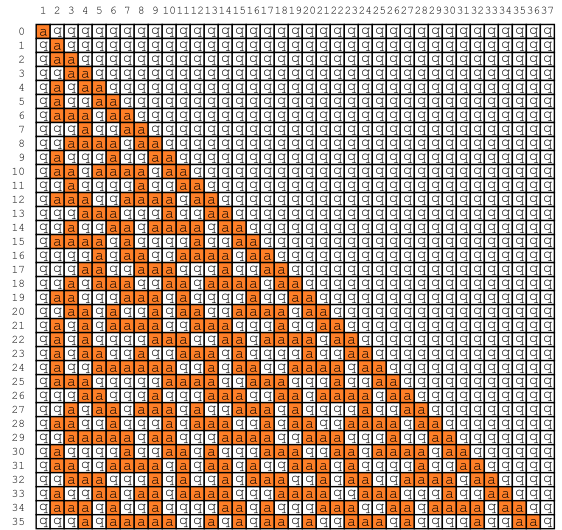
Transition Rule No. 020, Initial Configuration 2



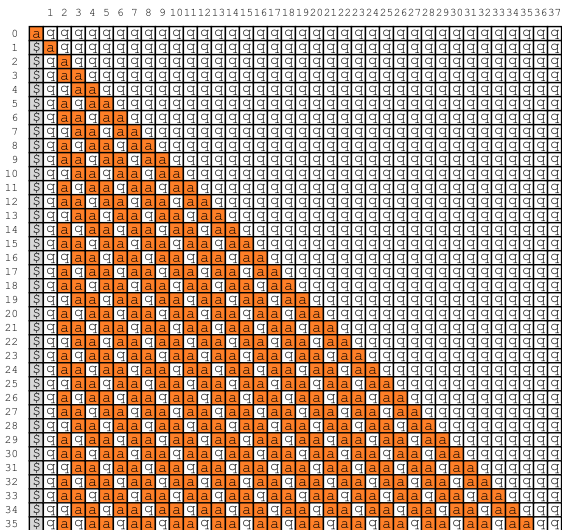
Transition Rule No. 021, Initial Configuration 1



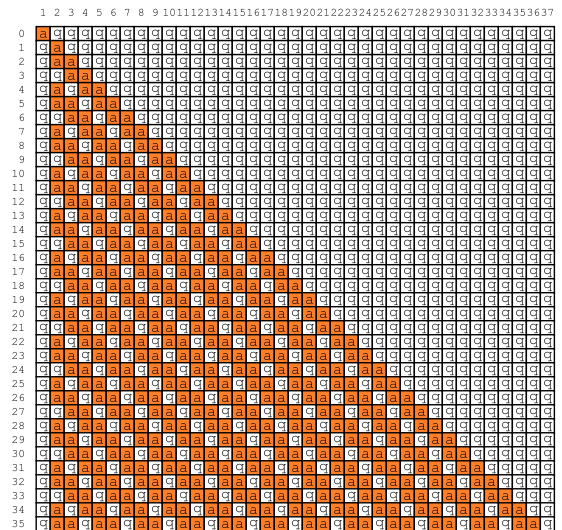
Transition Rule No. 021, Initial Configuration 2



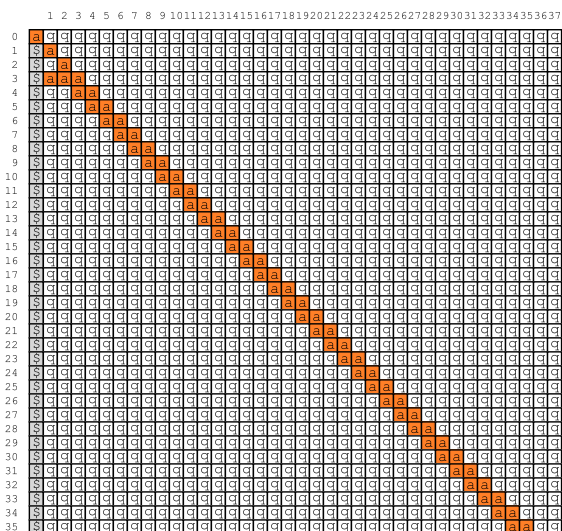
Transition Rule No. 022, Initial Configuration 1



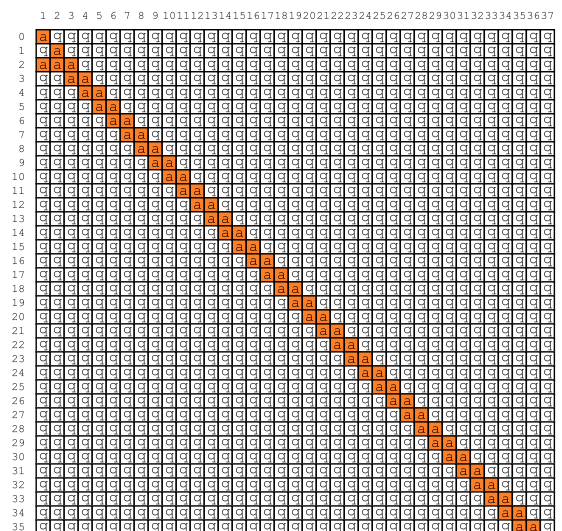
Transition Rule No. 022, Initial Configuration 2



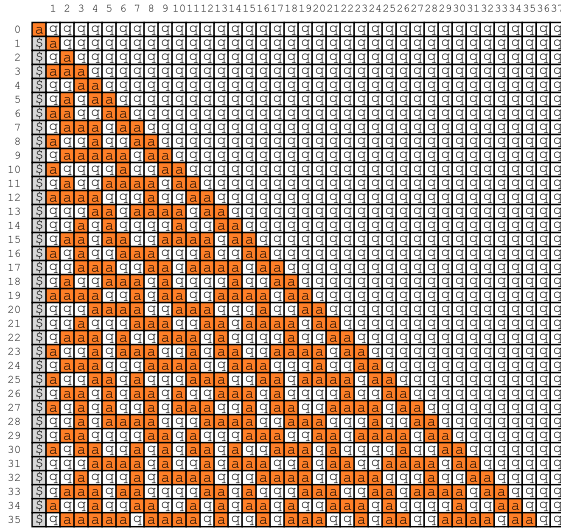
Transition Rule No. 023, Initial Configuration 1



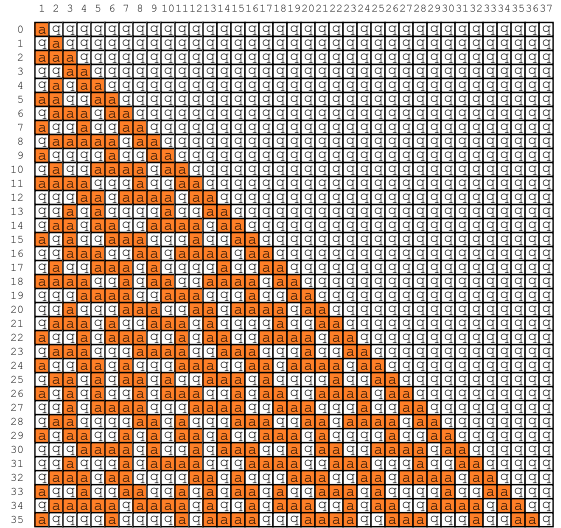
Transition Rule No. 023, Initial Configuration 2



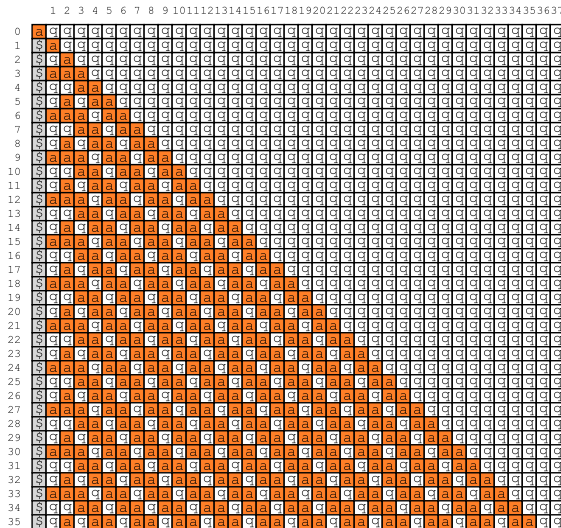
Transition Rule No. 024, Initial Configuration 1



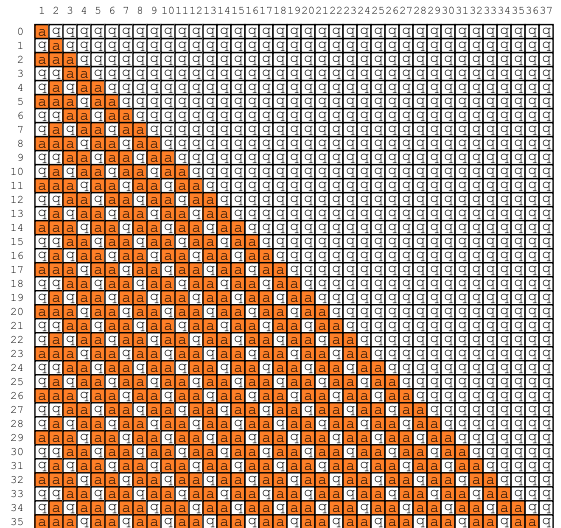
Transition Rule No. 024, Initial Configuration 2



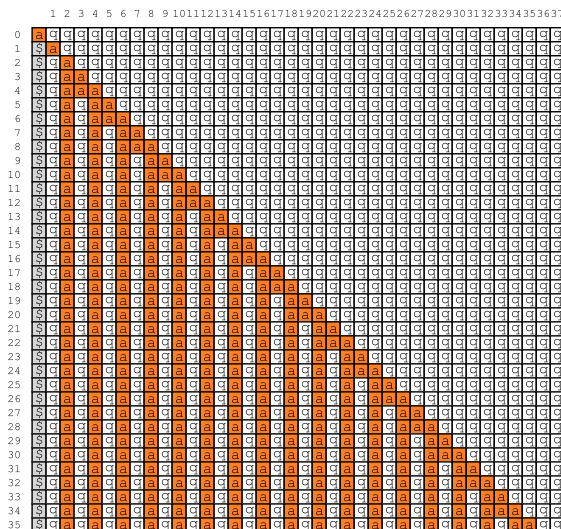
Transition Rule No. 025, Initial Configuration 1



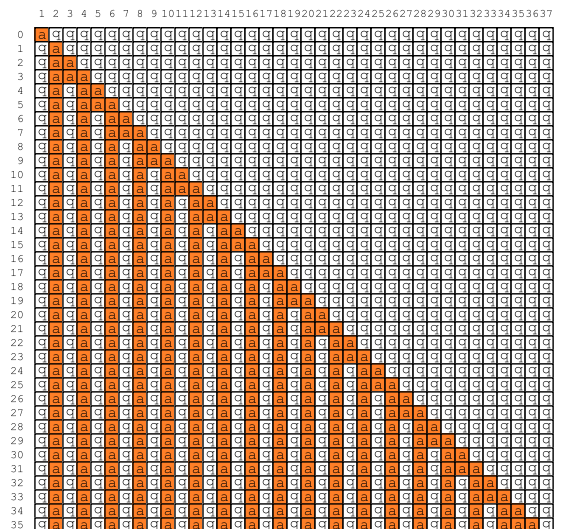
Transition Rule No. 025, Initial Configuration 2



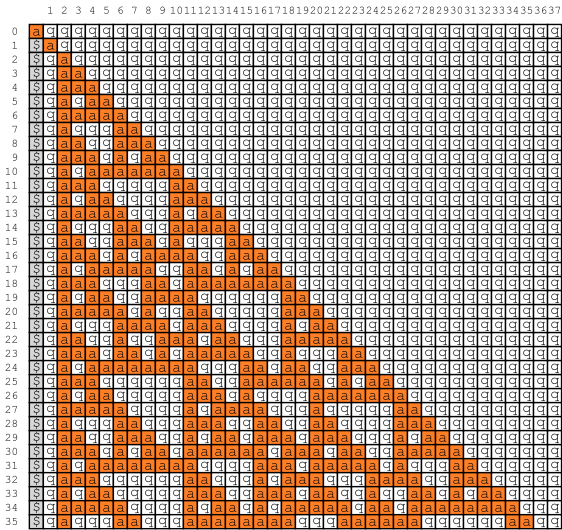
Transition Rule No. 026, Initial Configuration 1



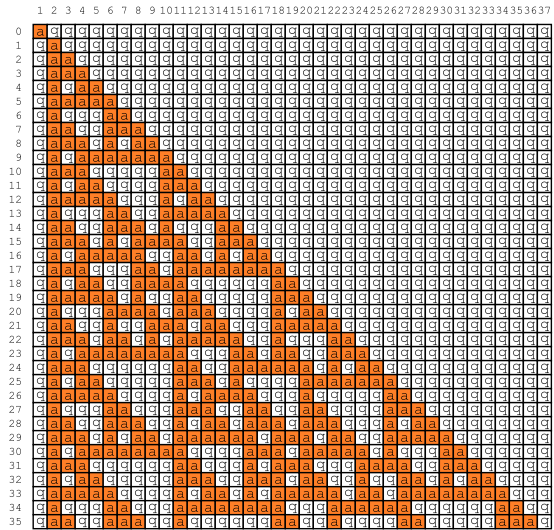
Transition Rule No. 026, Initial Configuration 2



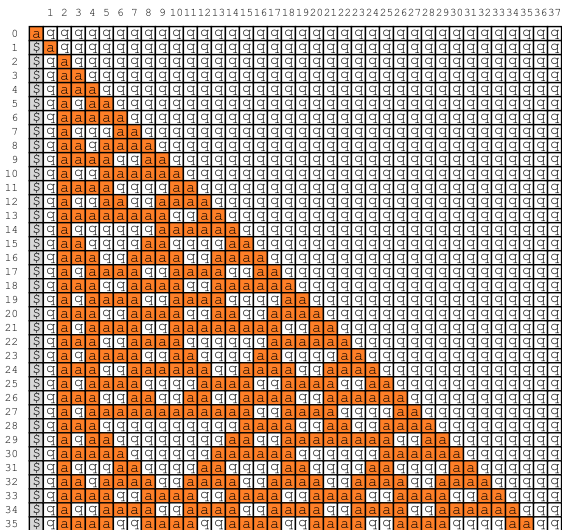
Transition Rule No. 027, Initial Configuration 1



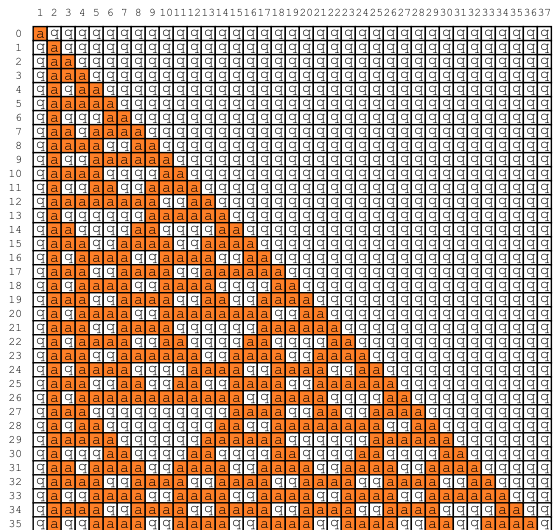
Transition Rule No. 027, Initial Configuration 2



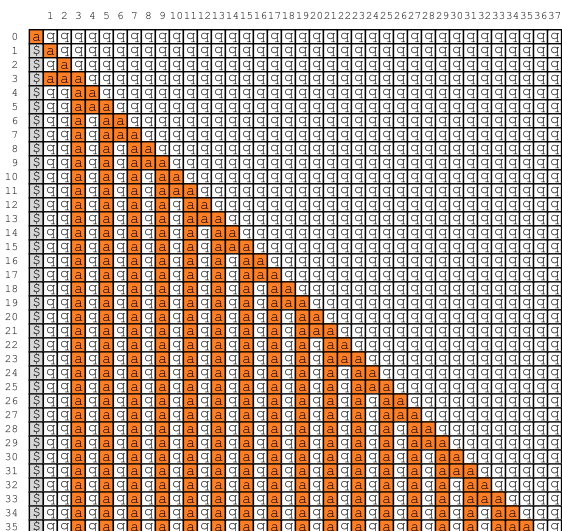
Transition Rule No. 028, Initial Configuration 1



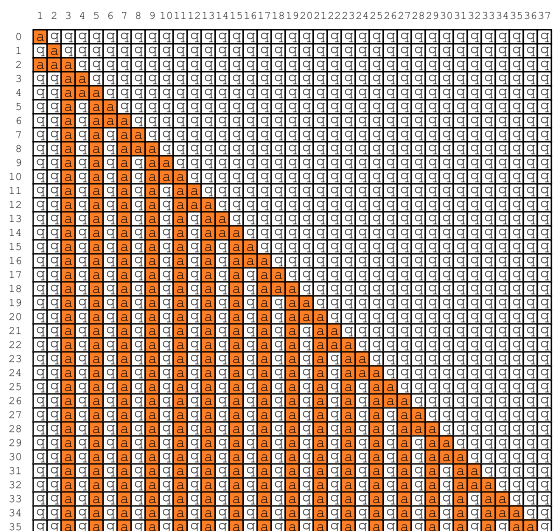
Transition Rule No. 028, Initial Configuration 2



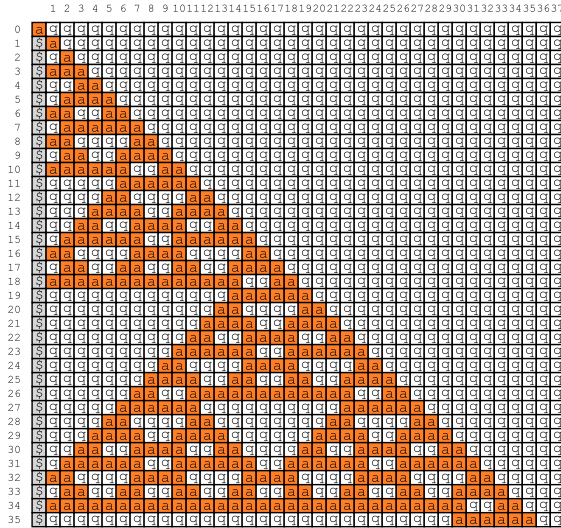
Transition Rule No. 029, Initial Configuration 1



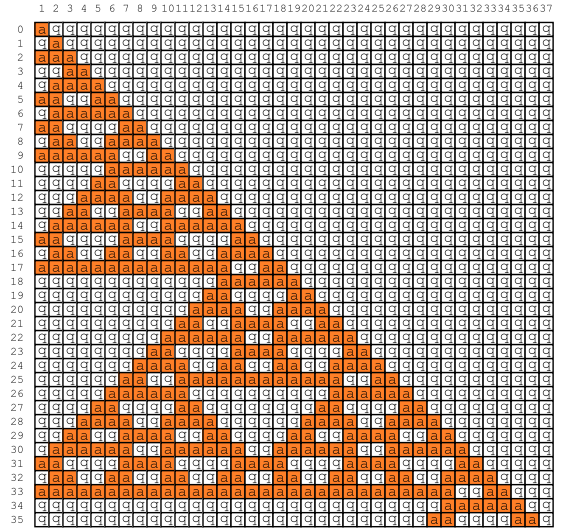
Transition Rule No. 029, Initial Configuration 2



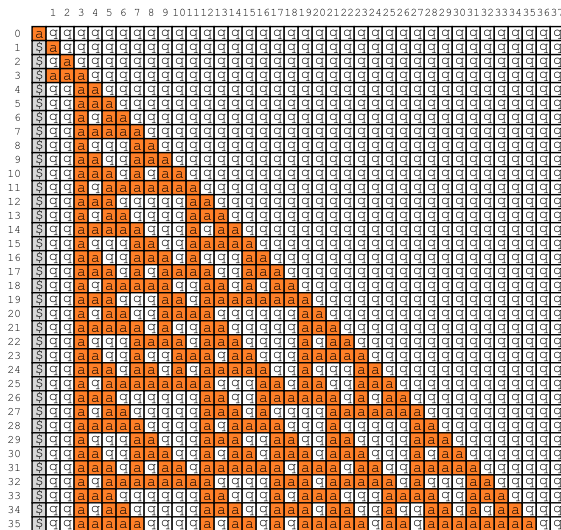
Transition Rule No. 030, Initial Configuration 1



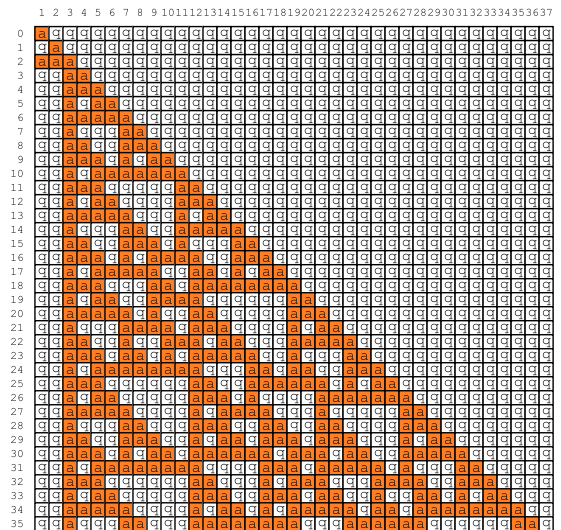
Transition Rule No. 030, Initial Configuration 2



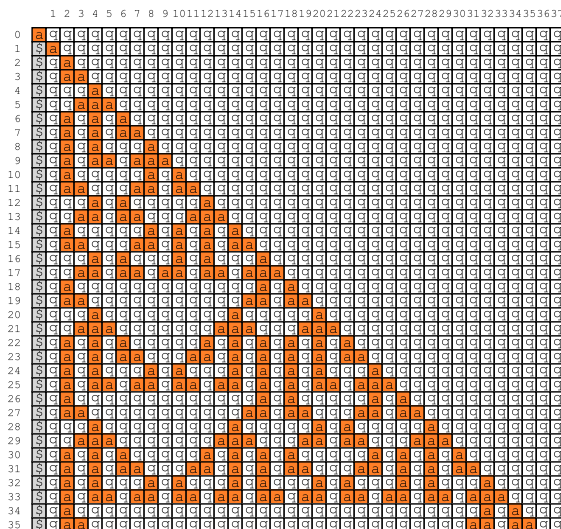
Transition Rule No. 031, Initial Configuration 1



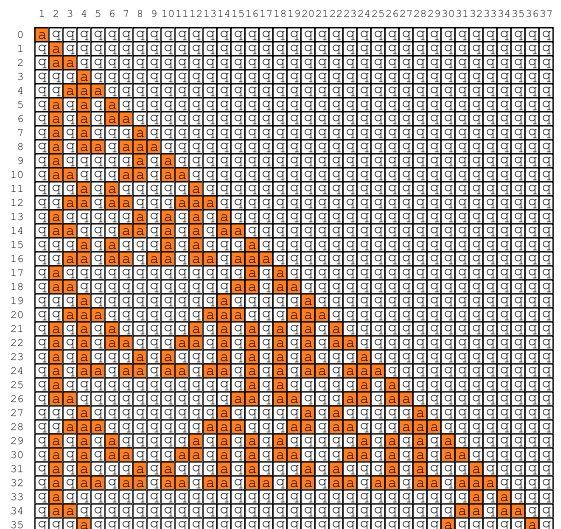
Transition Rule No. 031, Initial Configuration 2



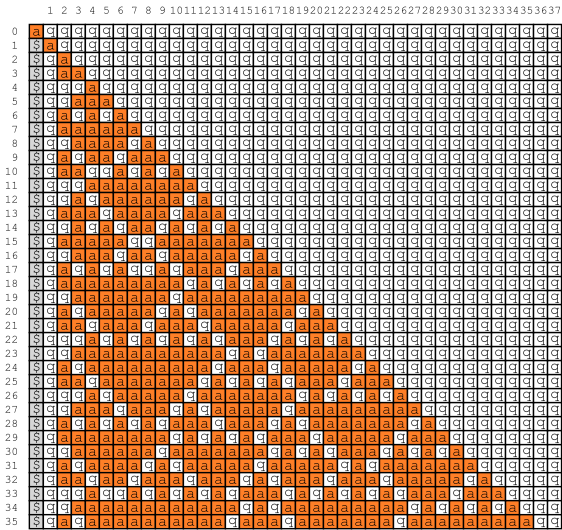
Transition Rule No. 032, Initial Configuration 1



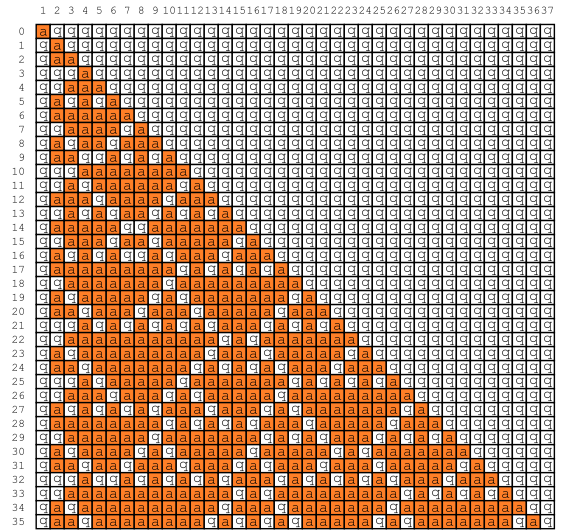
Transition Rule No. 032, Initial Configuration 2



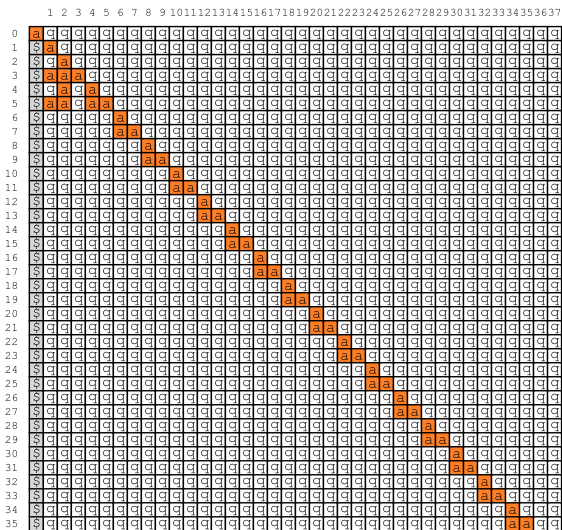
Transition Rule No. 033, Initial Configuration 1



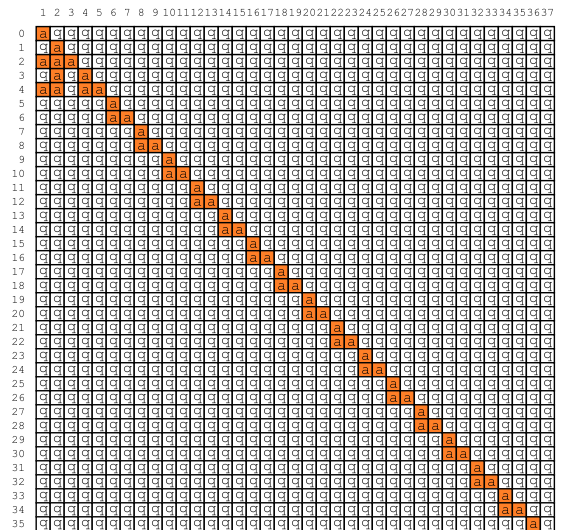
Transition Rule No. 033, Initial Configuration 2



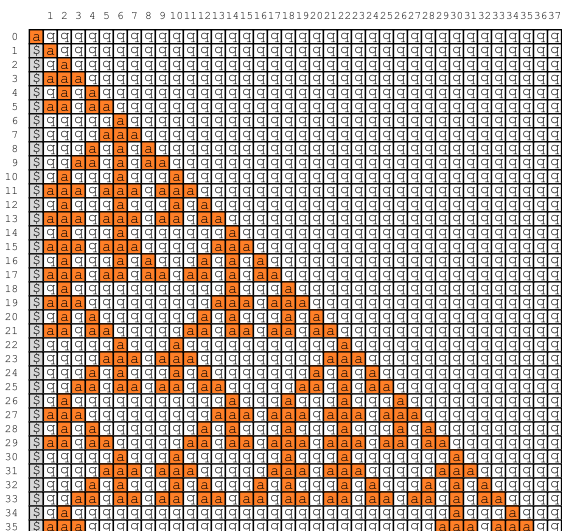
Transition Rule No. 034, Initial Configuration 1



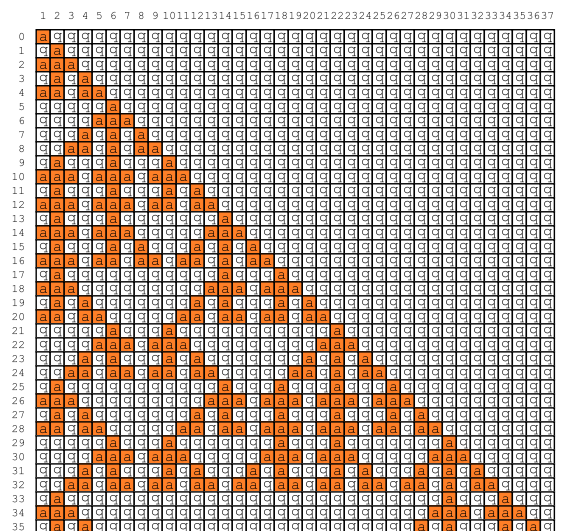
Transition Rule No. 034, Initial Configuration 2



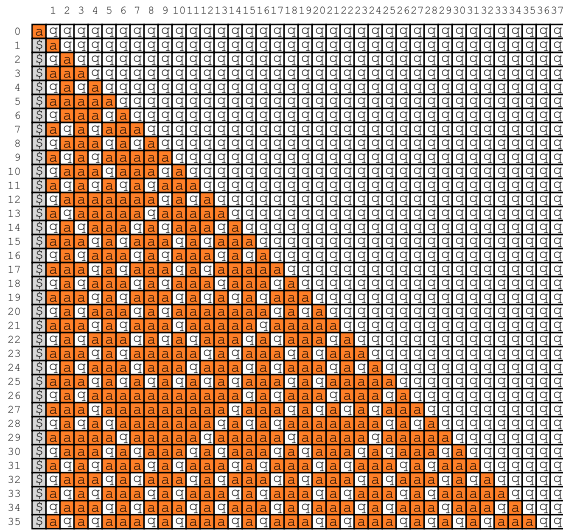
Transition Rule No. 035, Initial Configuration 1



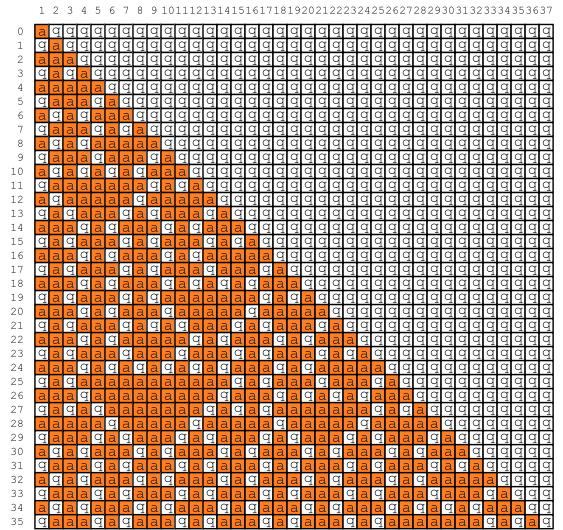
Transition Rule No. 035, Initial Configuration 2



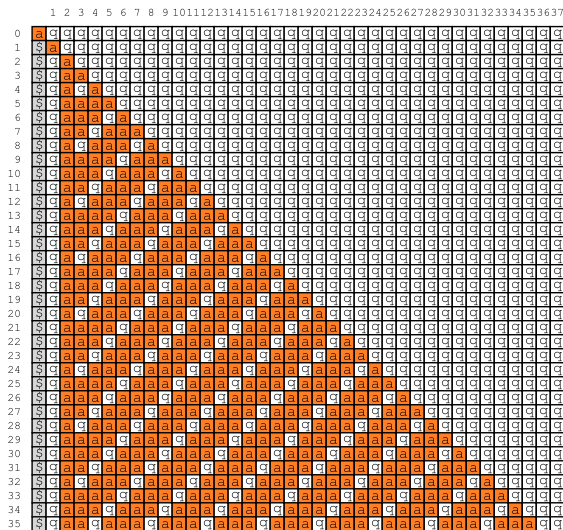
Transition Rule No. 036, Initial Configuration 1



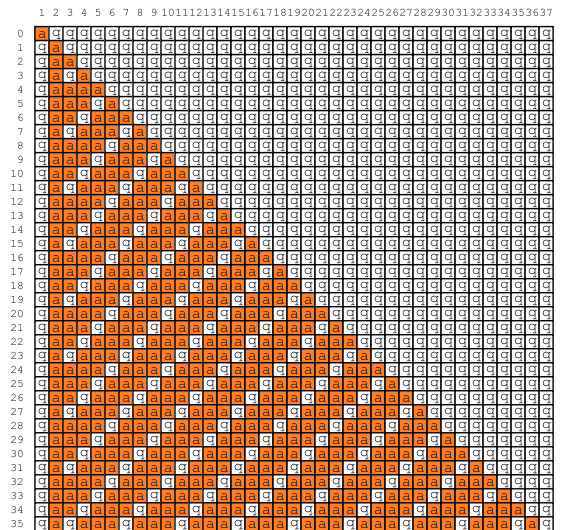
Transition Rule No. 036, Initial Configuration 2



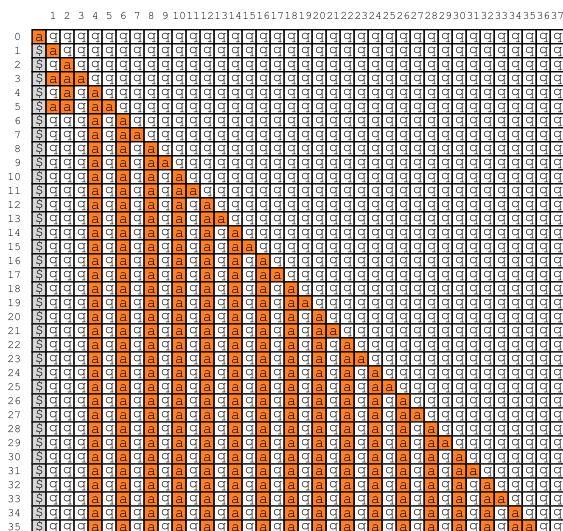
Transition Rule No. 037, Initial Configuration 1



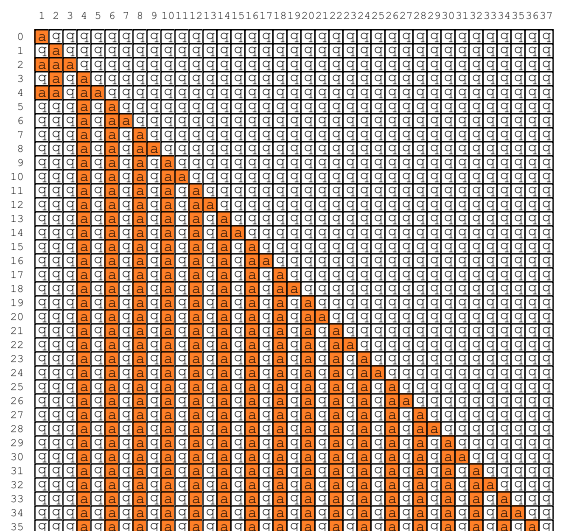
Transition Rule No. 037, Initial Configuration 2



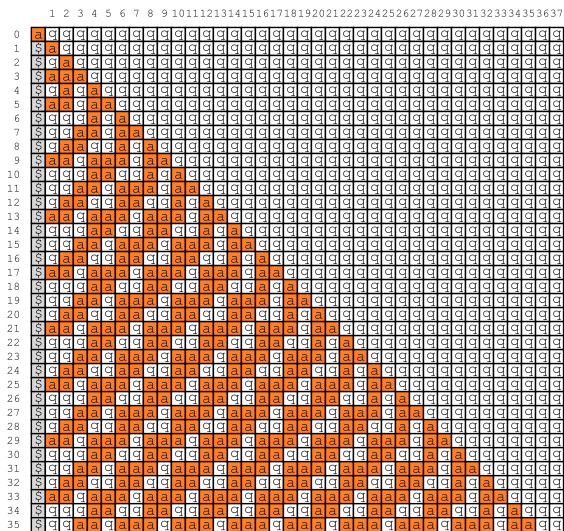
Transition Rule No. 038, Initial Configuration 1



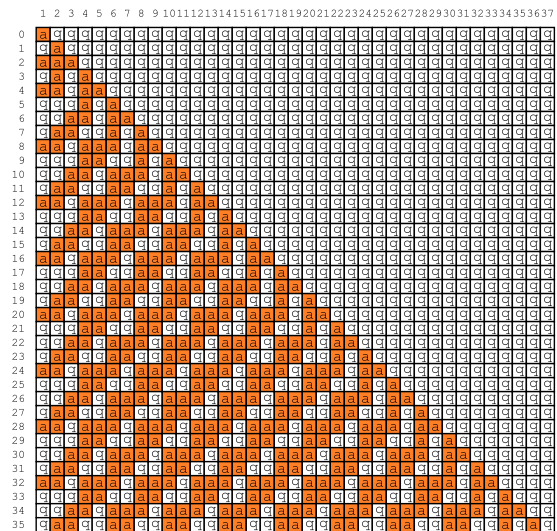
Transition Rule No. 038, Initial Configuration 2



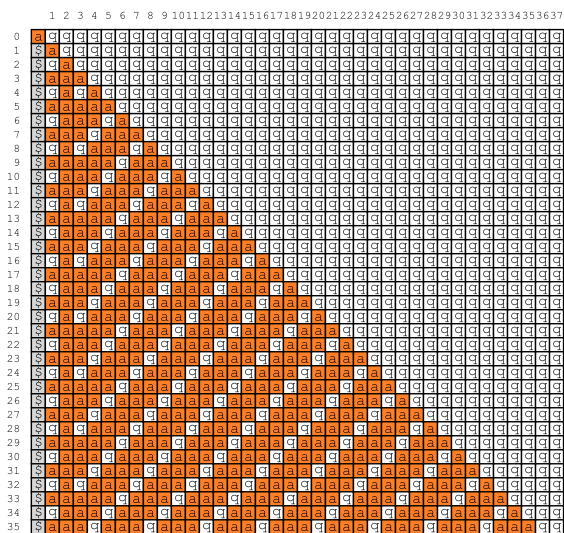
Transition Rule No. 039, Initial Configuration 1



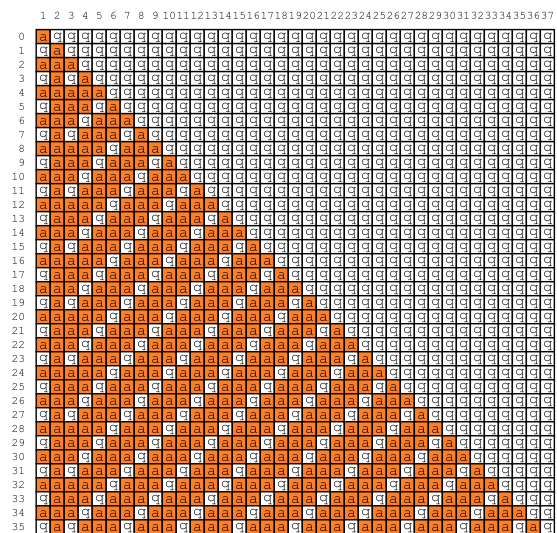
Transition Rule No. 039, Initial Configuration 2



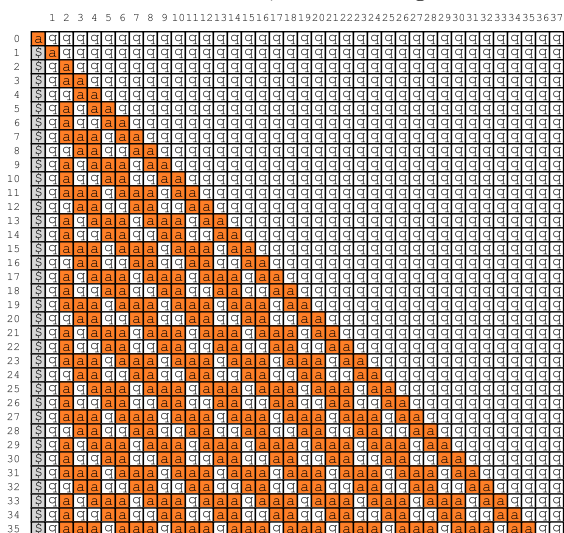
Transition Rule No. 040, Initial Configuration 1



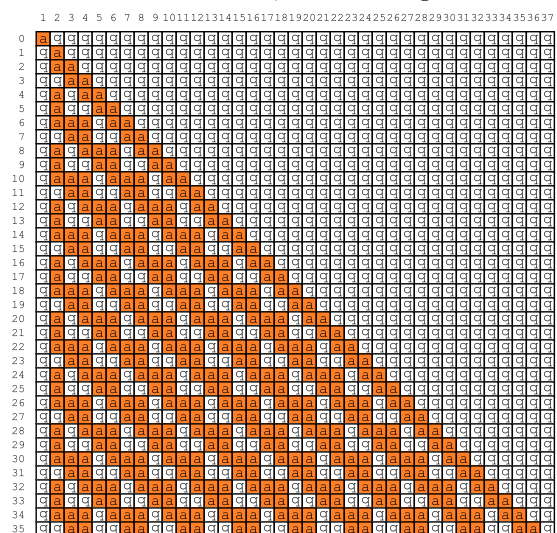
Transition Rule No. 040, Initial Configuration 2



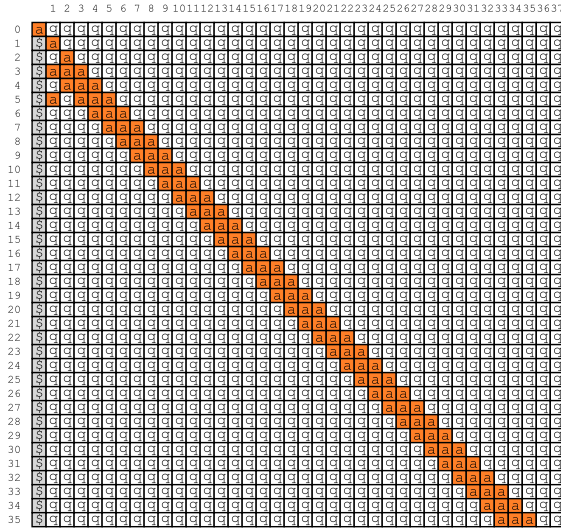
Transition Rule No. 041, Initial Configuration 1



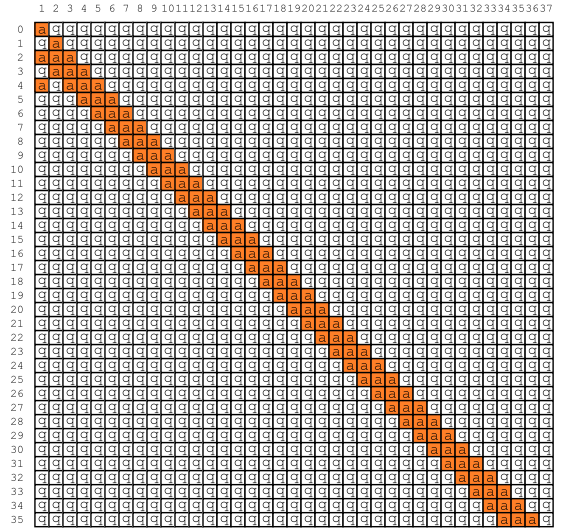
Transition Rule No. 041, Initial Configuration 2



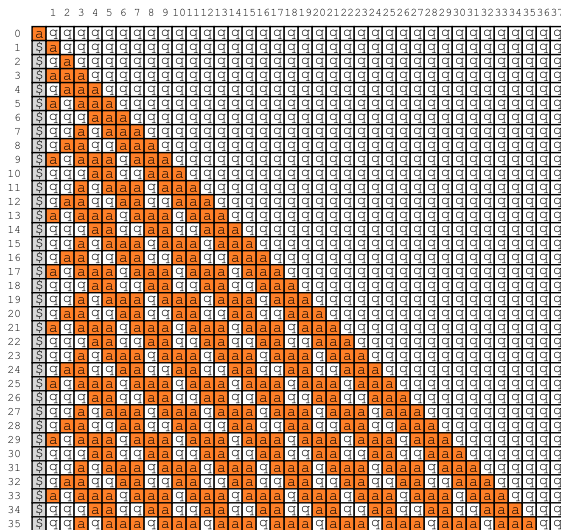
Transition Rule No. 042, Initial Configuration 1



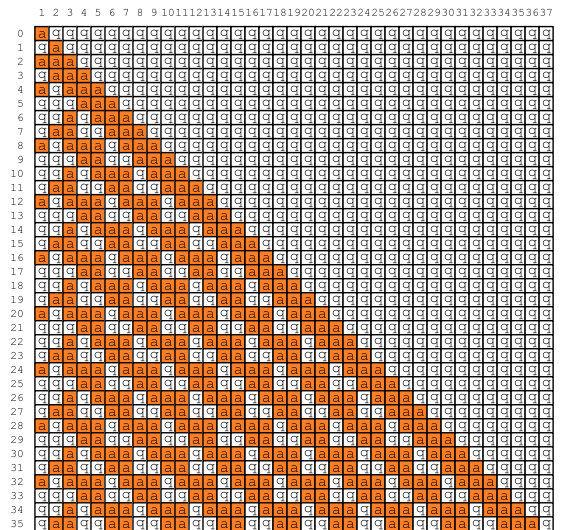
Transition Rule No. 042, Initial Configuration 2



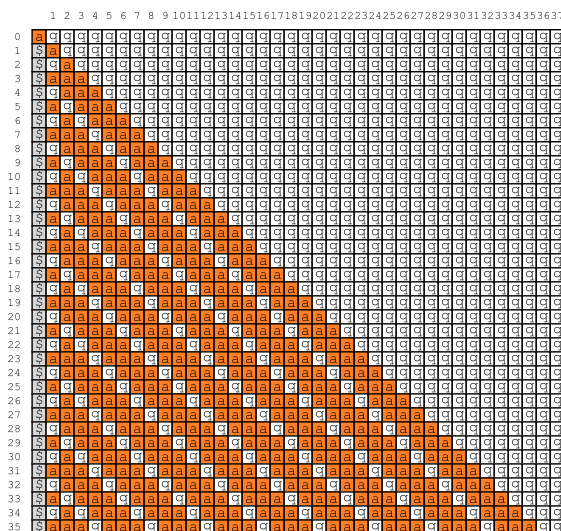
Transition Rule No. 043, Initial Configuration 1



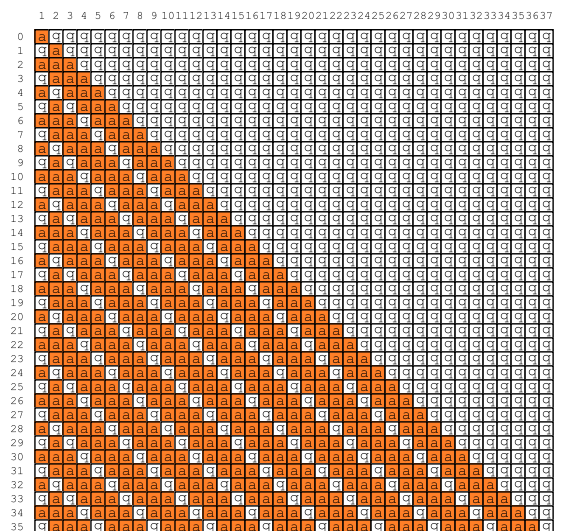
Transition Rule No. 043, Initial Configuration 2



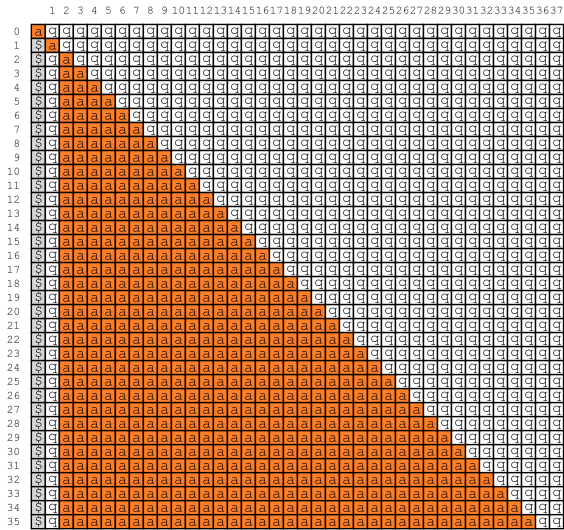
Transition Rule No. 044, Initial Configuration 1



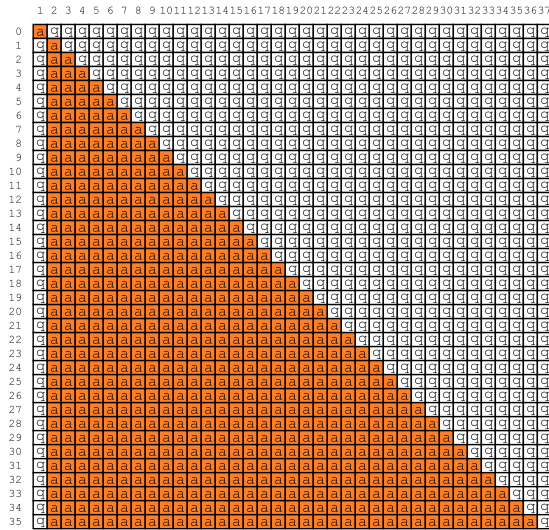
Transition Rule No. 044, Initial Configuration 2



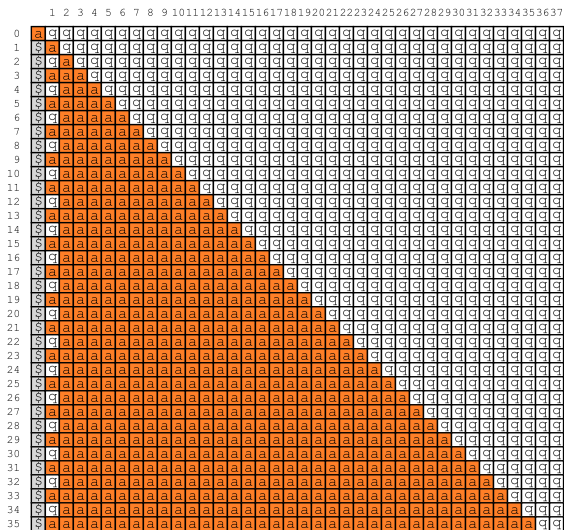
Transition Rule No. 045, Initial Configuration 1



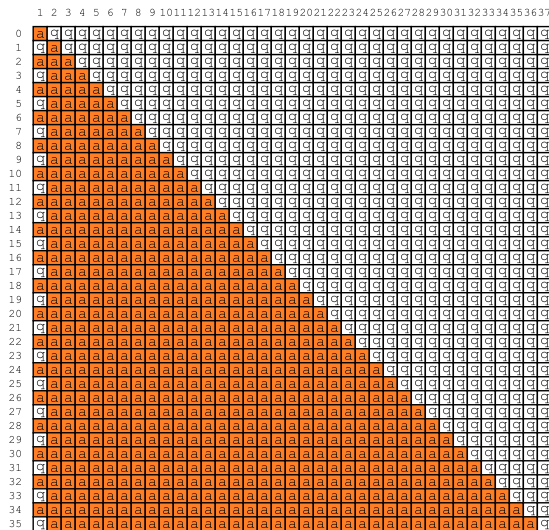
Transition Rule No. 045, Initial Configuration 2



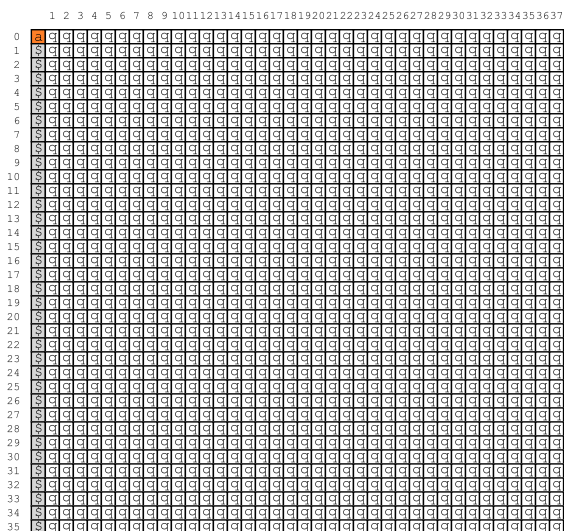
Transition Rule No. 046, Initial Configuration 1



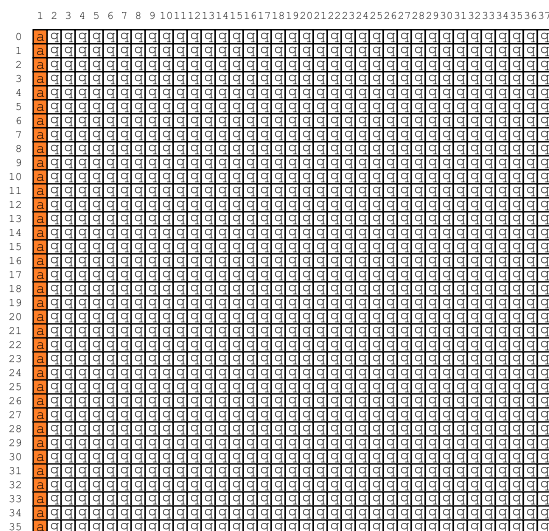
Transition Rule No. 046, Initial Configuration 2



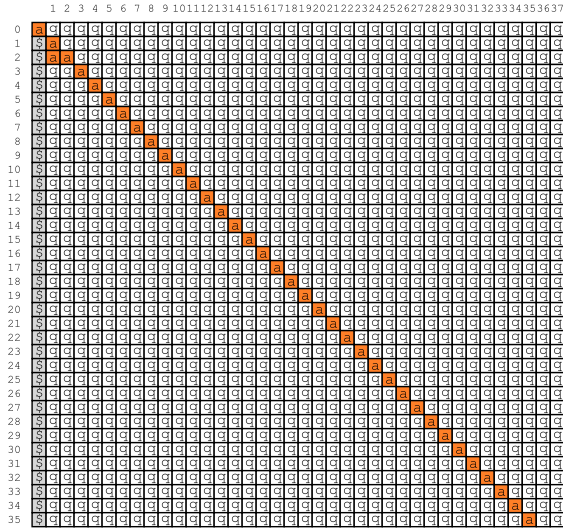
Transition Rule No. 047, Initial Configuration 1



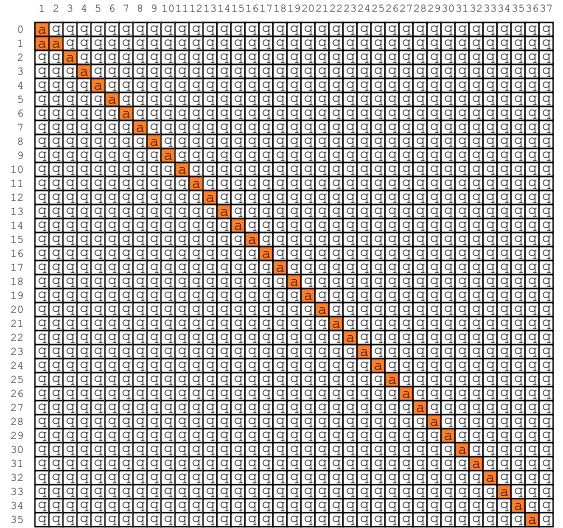
Transition Rule No. 047, Initial Configuration 2



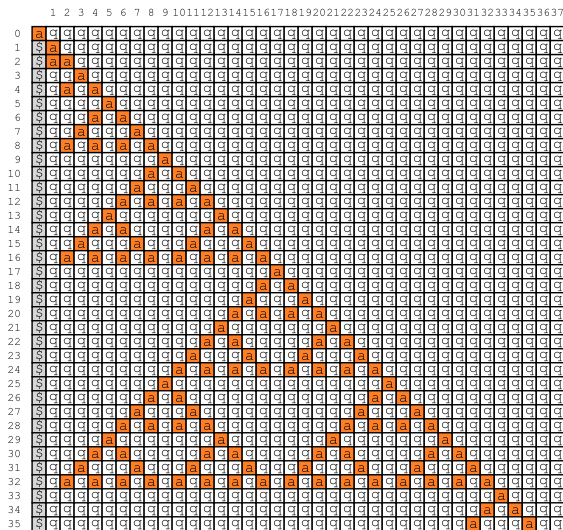
Transition Rule No. 048, Initial Configuration 1



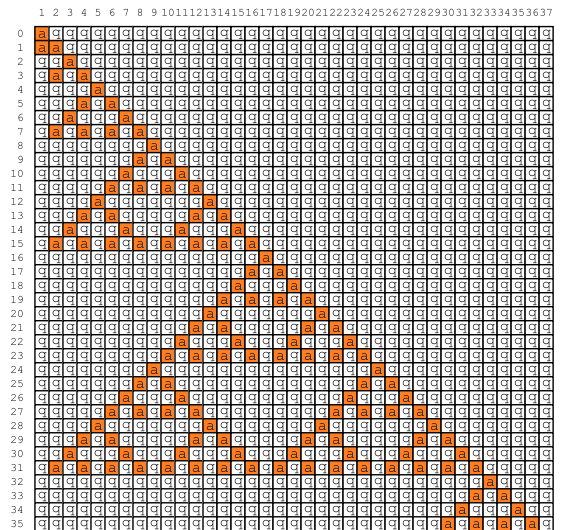
Transition Rule No. 048, Initial Configuration 2



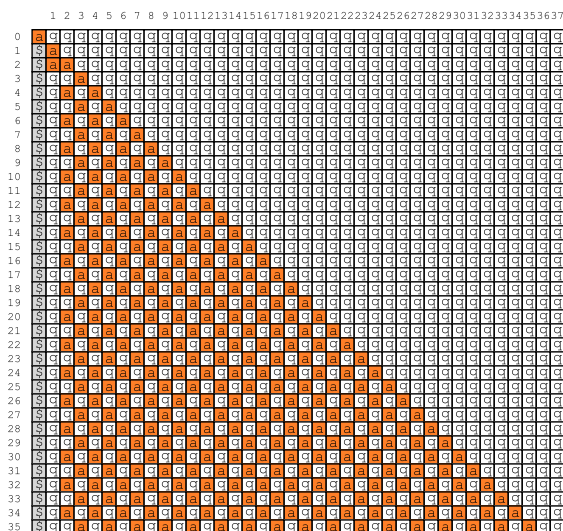
Transition Rule No. 049, Initial Configuration 1



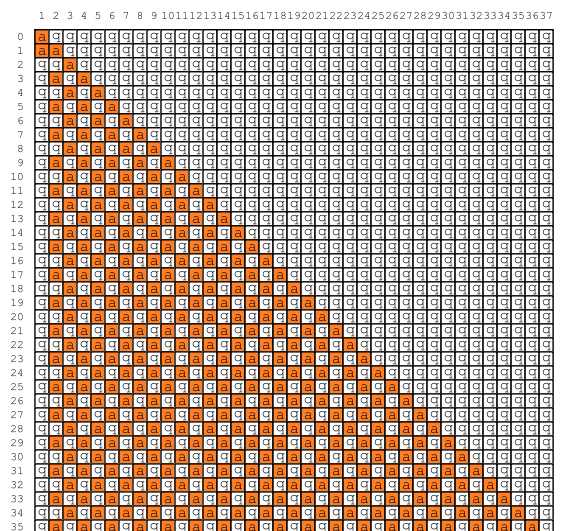
Transition Rule No. 049, Initial Configuration 2



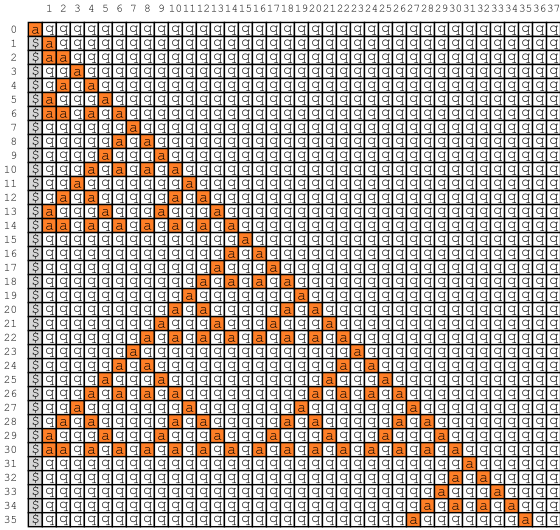
Transition Rule No. 050, Initial Configuration 1



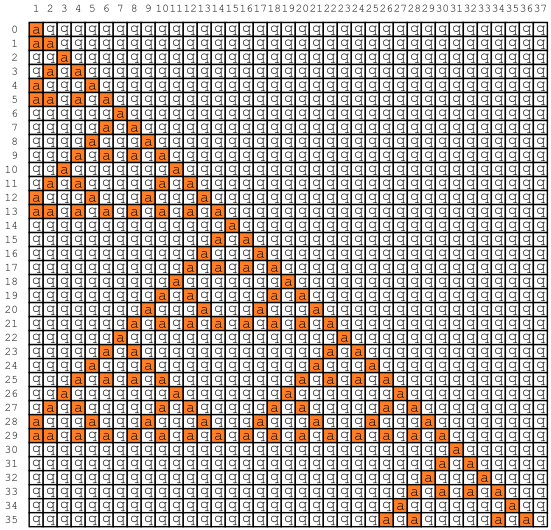
Transition Rule No. 050, Initial Configuration 2



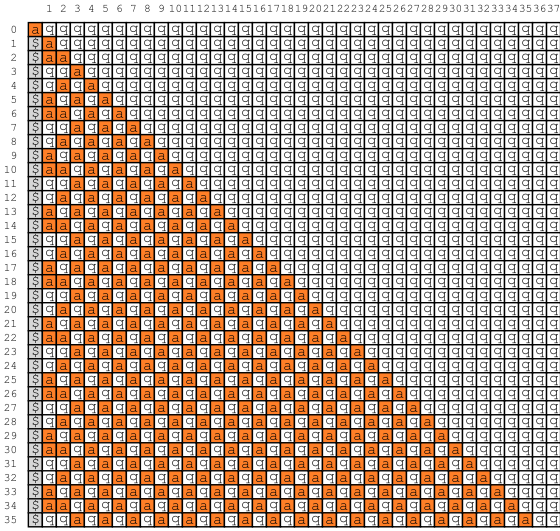
Transition Rule No. 051, Initial Configuration 1



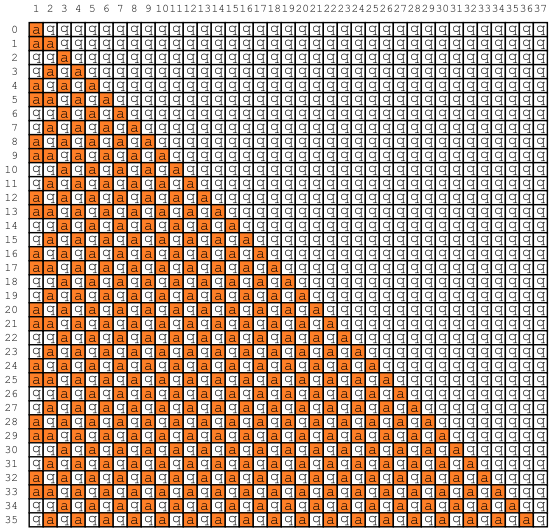
Transition Rule No. 051, Initial Configuration 2



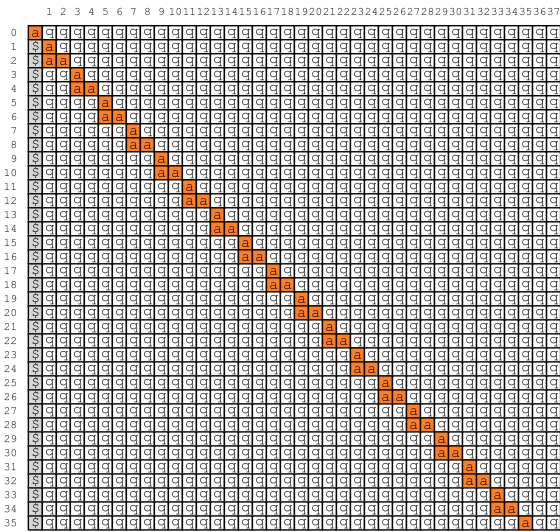
Transition Rule No. 052, Initial Configuration 1



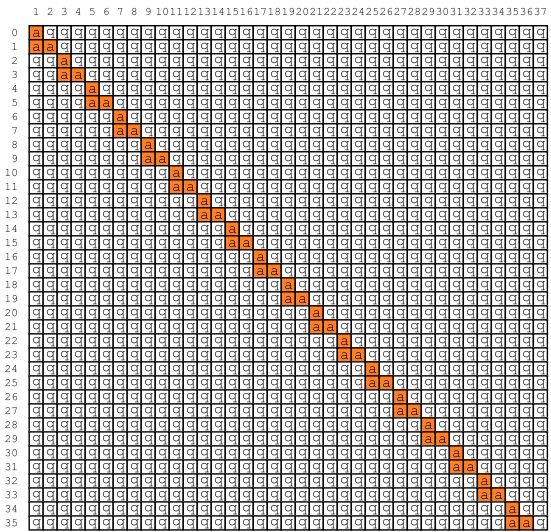
Transition Rule No. 052, Initial Configuration 2



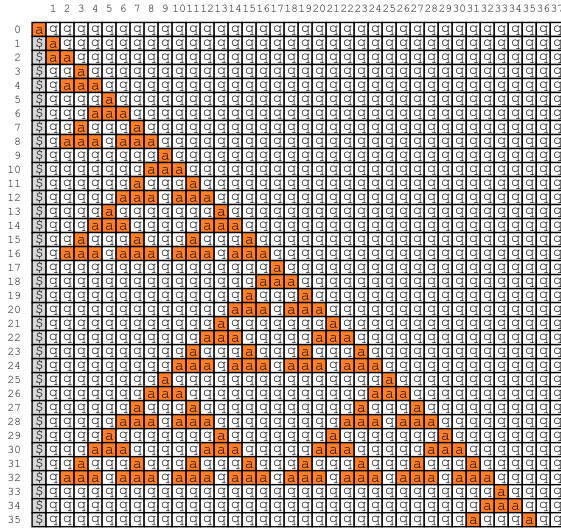
Transition Rule No. 053, Initial Configuration 1



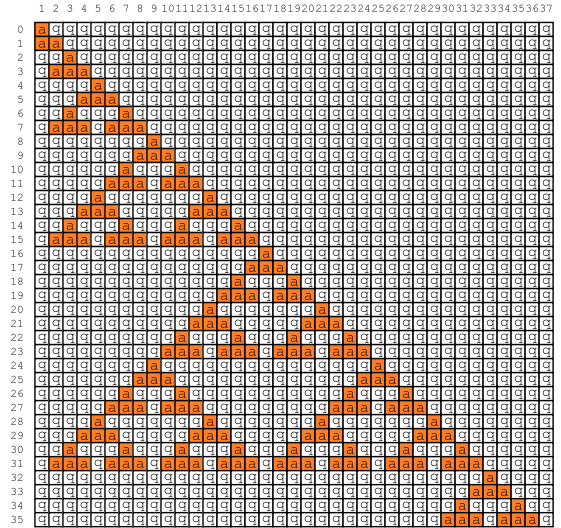
Transition Rule No. 053, Initial Configuration 2



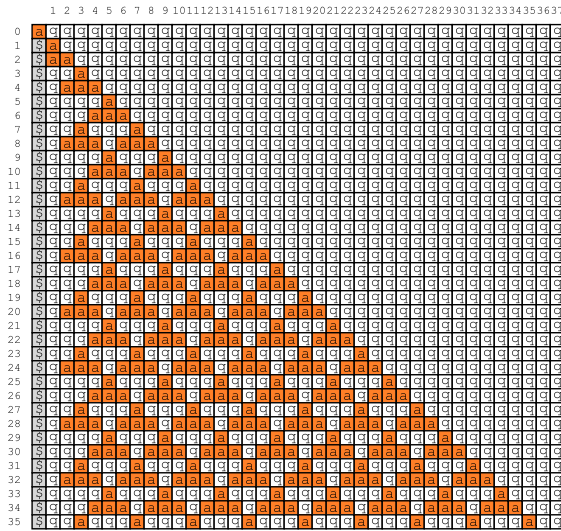
Transition Rule No. 054, Initial Configuration 1



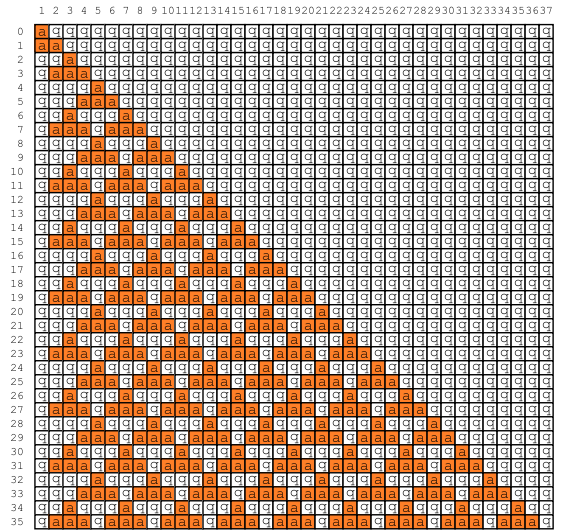
Transition Rule No. 054, Initial Configuration 2



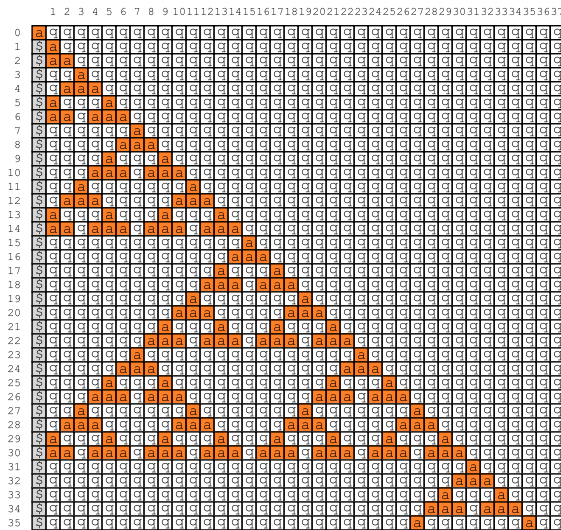
Transition Rule No. 055, Initial Configuration 1



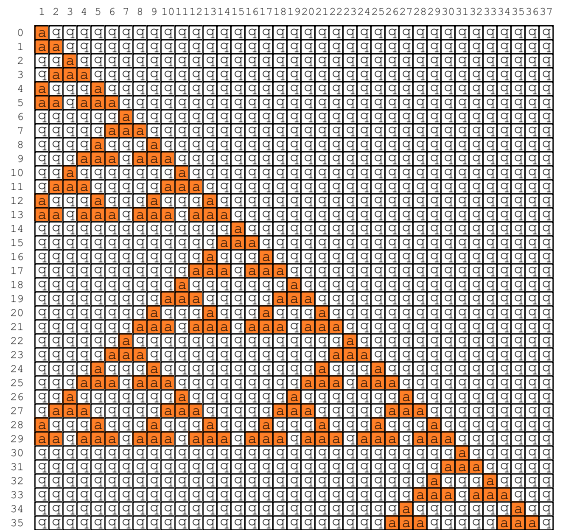
Transition Rule No. 055, Initial Configuration 2



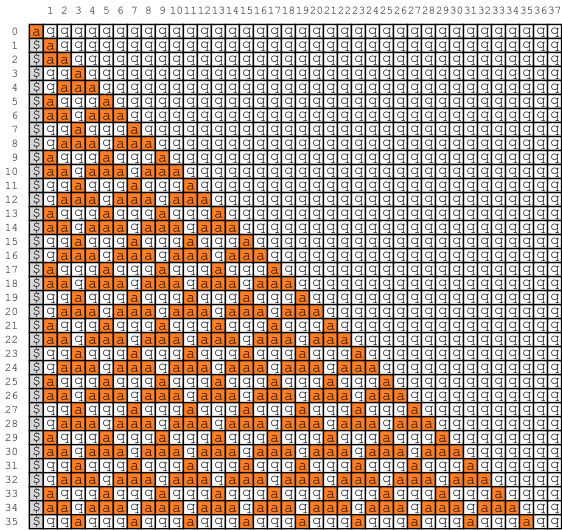
Transition Rule No. 056, Initial Configuration 1



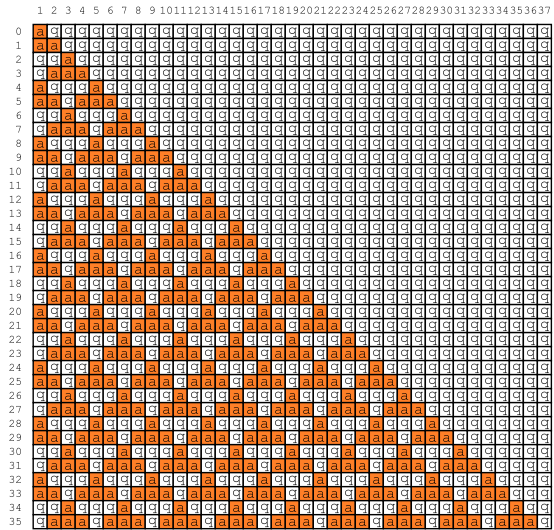
Transition Rule No. 056, Initial Configuration 2



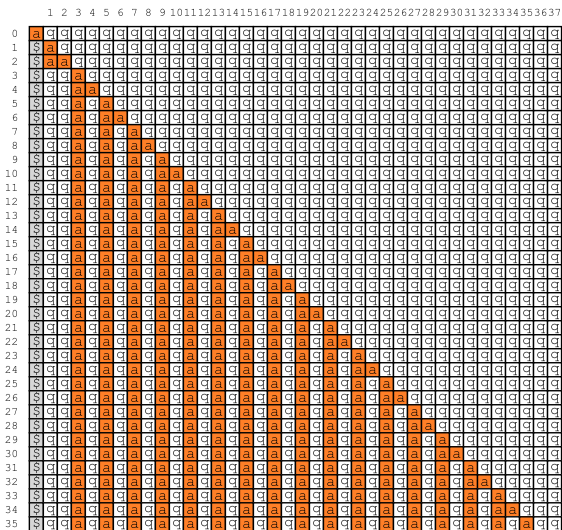
Transition Rule No. 057, Initial Configuration 1



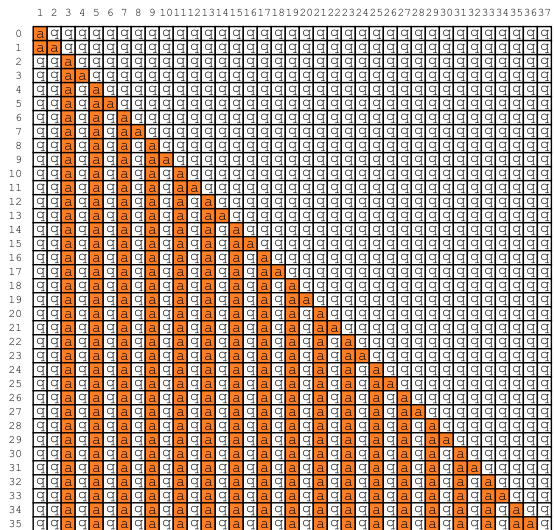
Transition Rule No. 057, Initial Configuration 2



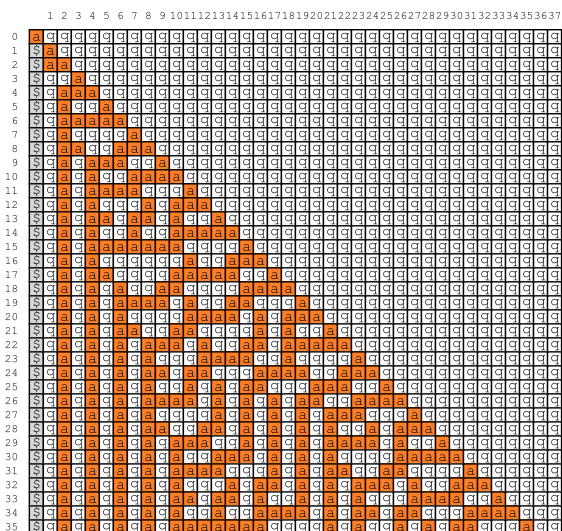
Transition Rule No. 058, Initial Configuration 1



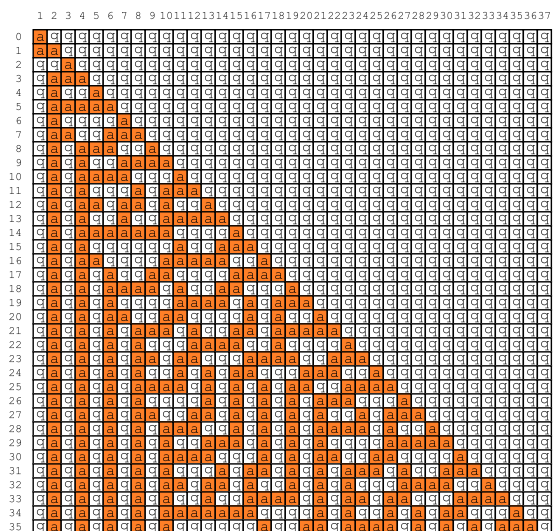
Transition Rule No. 058, Initial Configuration 2



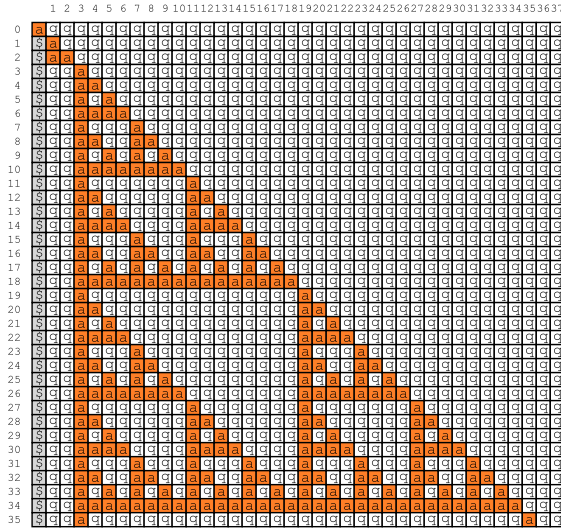
Transition Rule No. 059, Initial Configuration 1



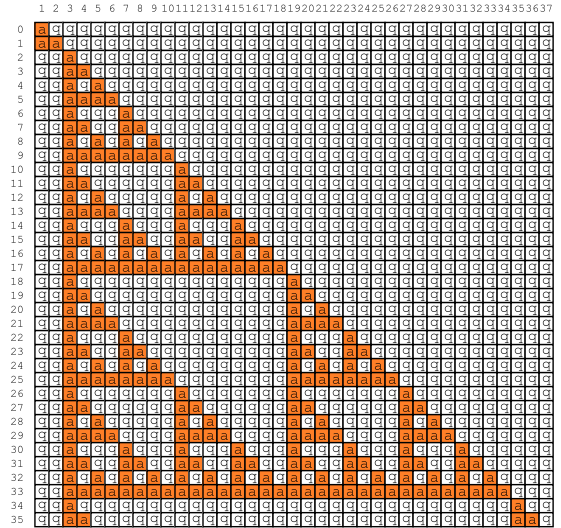
Transition Rule No. 059, Initial Configuration 2



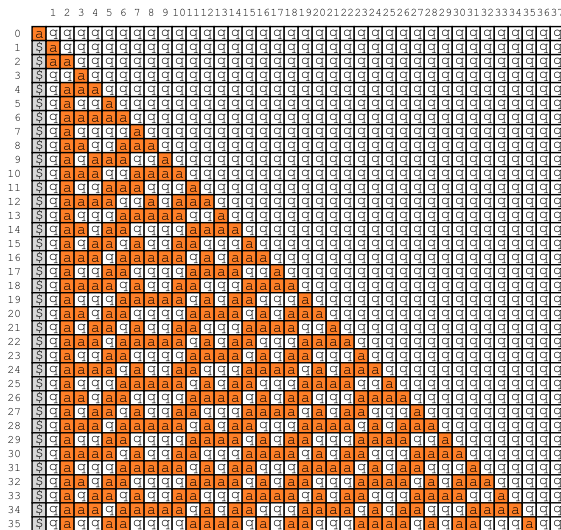
Transition Rule No. 060, Initial Configuration 1



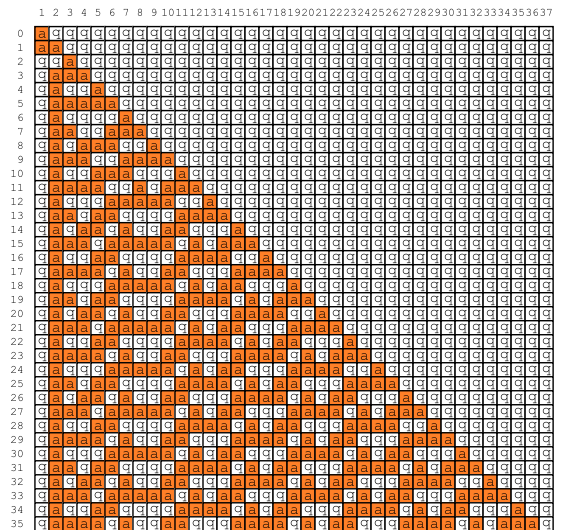
Transition Rule No. 060, Initial Configuration 2



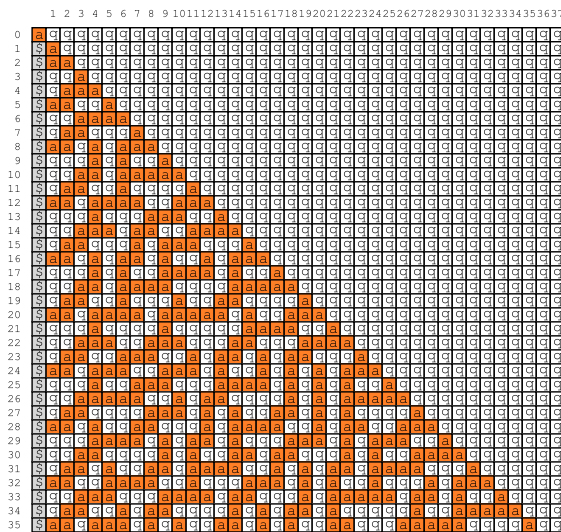
Transition Rule No. 061, Initial Configuration 1



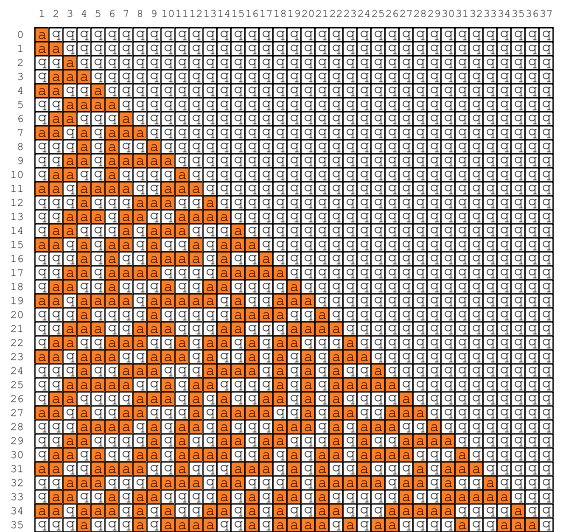
Transition Rule No. 061, Initial Configuration 2



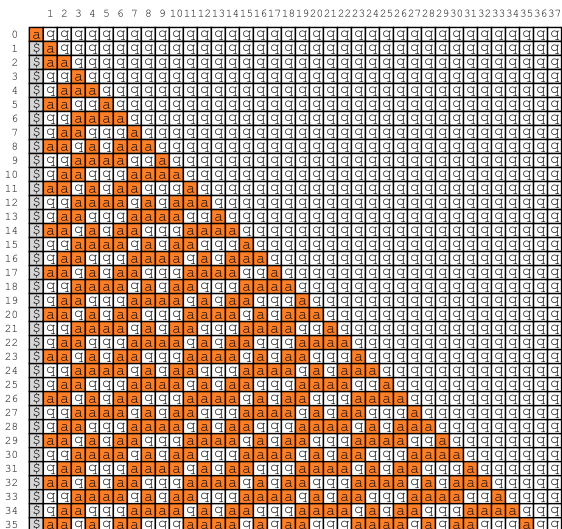
Transition Rule No. 062, Initial Configuration 1



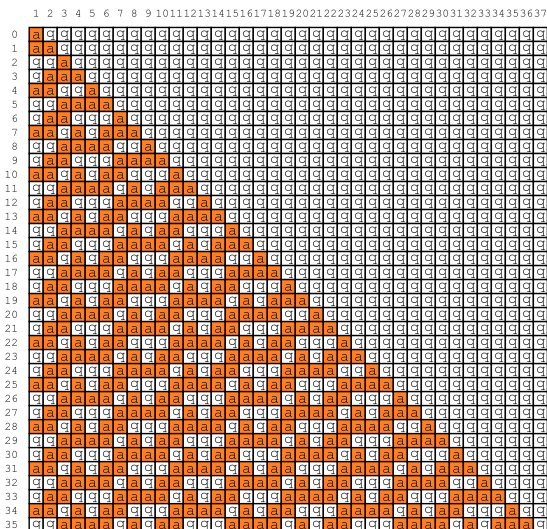
Transition Rule No. 062, Initial Configuration 2



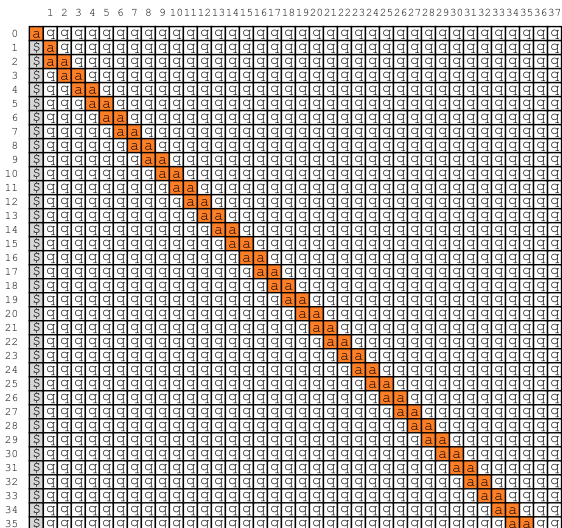
Transition Rule No. 063, Initial Configuration 1



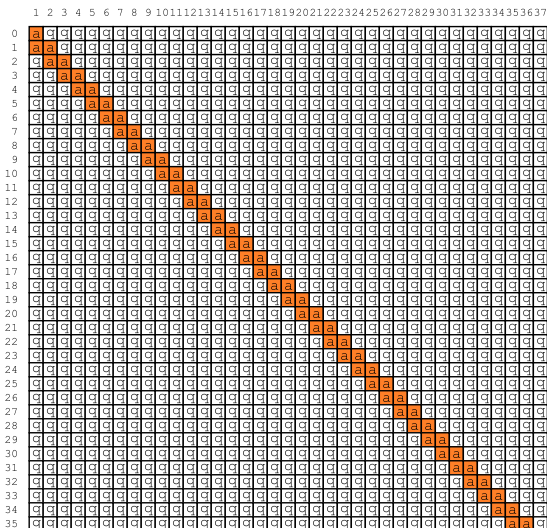
Transition Rule No. 063, Initial Configuration 2



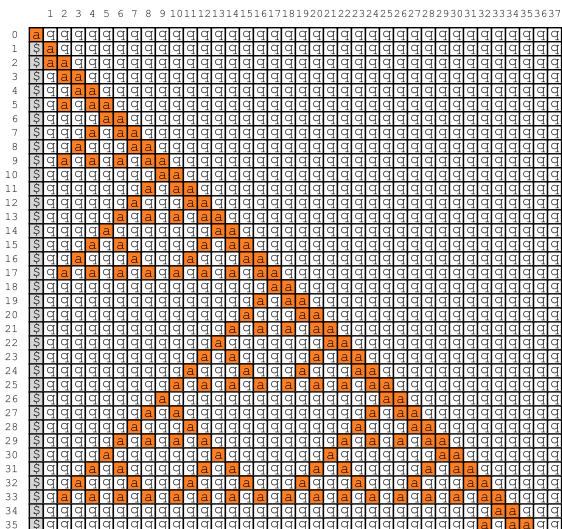
Transition Rule No. 064, Initial Configuration 1



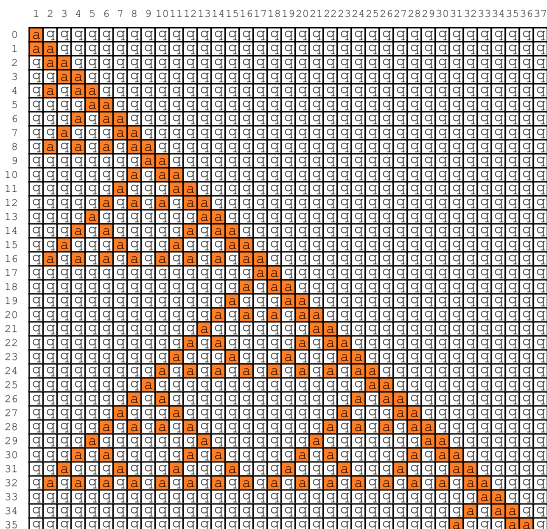
Transition Rule No. 064, Initial Configuration 2



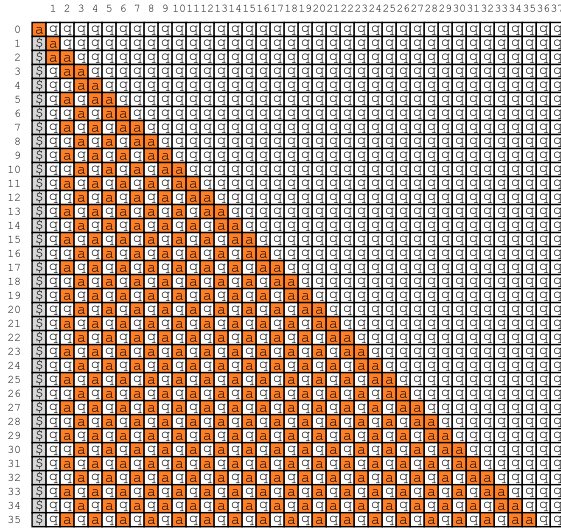
Transition Rule No. 065, Initial Configuration 1



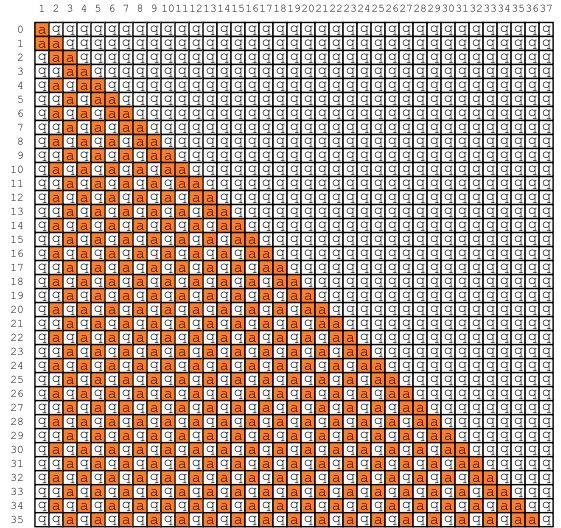
Transition Rule No. 065, Initial Configuration 2



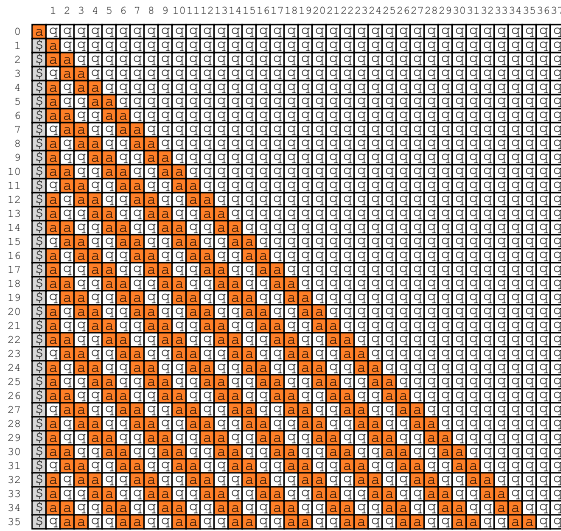
Transition Rule No. 066, Initial Configuration 1



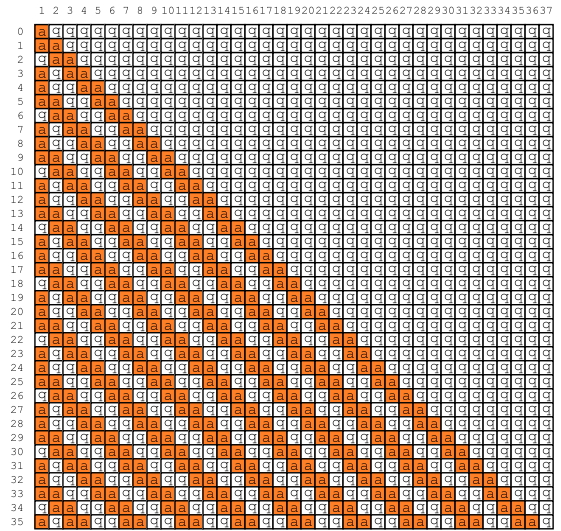
Transition Rule No. 066, Initial Configuration 2



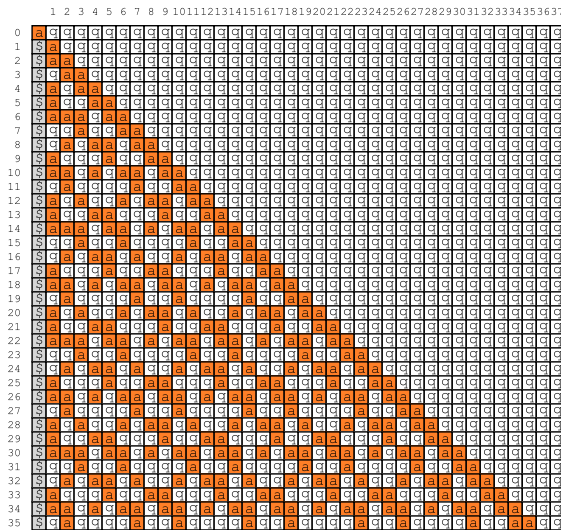
Transition Rule No. 067, Initial Configuration 1



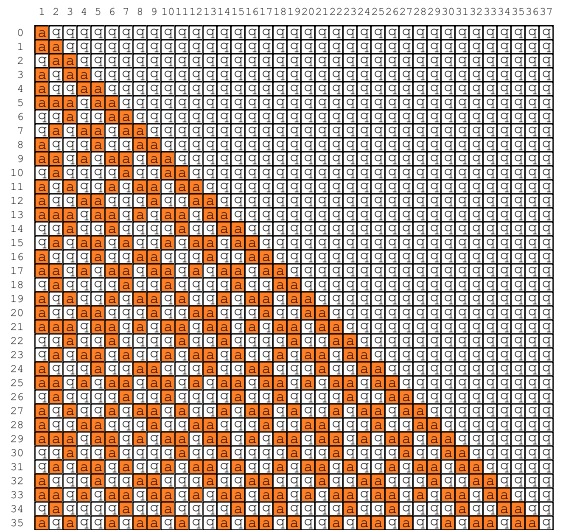
Transition Rule No. 067, Initial Configuration 2



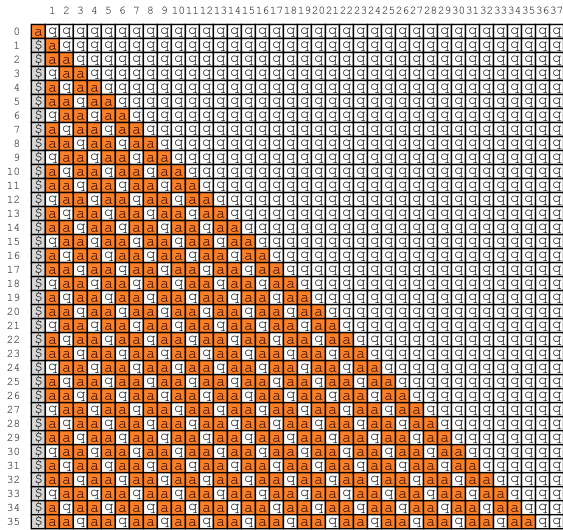
Transition Rule No. 068, Initial Configuration 1



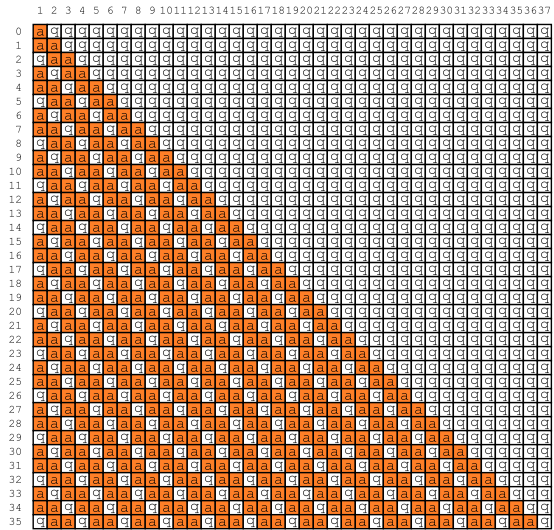
Transition Rule No. 068, Initial Configuration 2



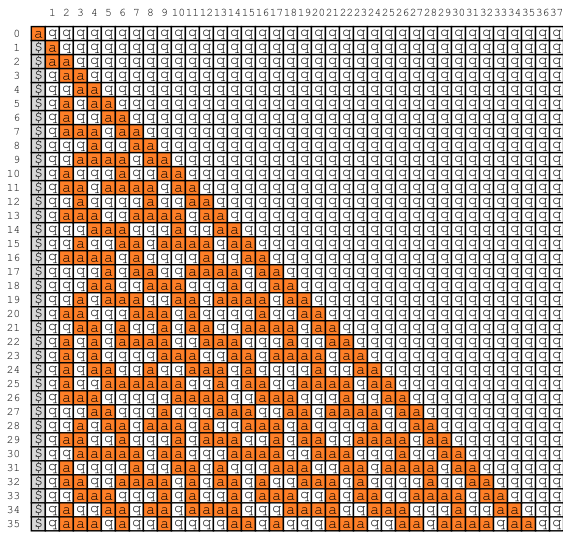
Transition Rule No. 069, Initial Configuration 1



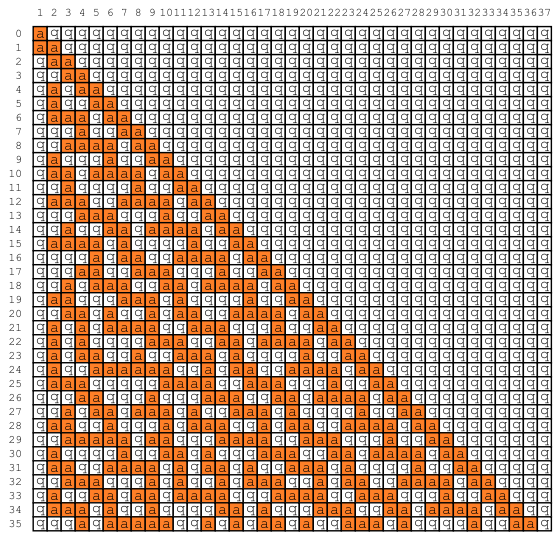
Transition Rule No. 069, Initial Configuration 2



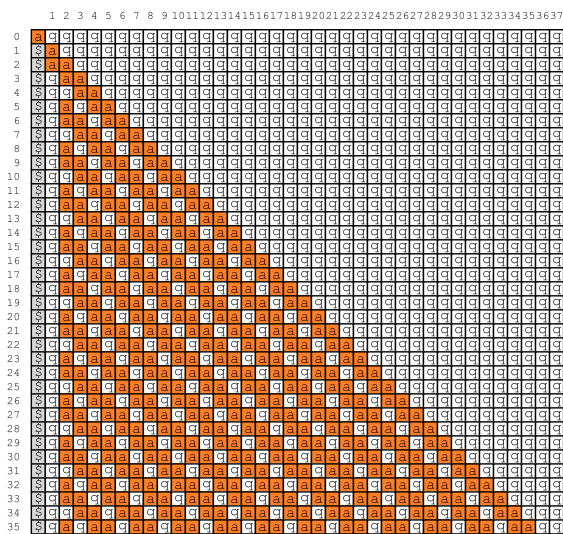
Transition Rule No. 070, Initial Configuration 1



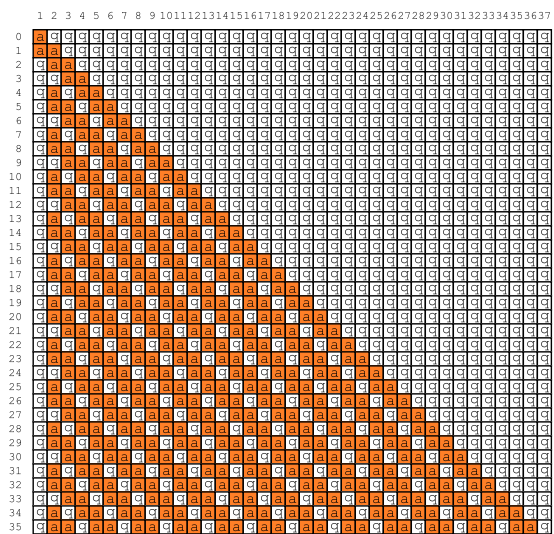
Transition Rule No. 070, Initial Configuration 2



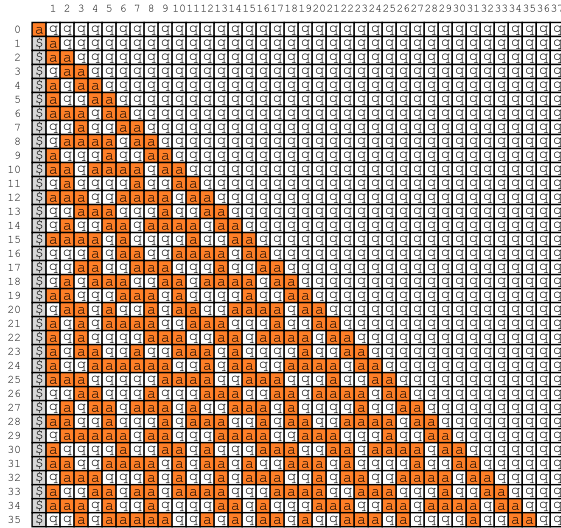
Transition Rule No. 071, Initial Configuration 1



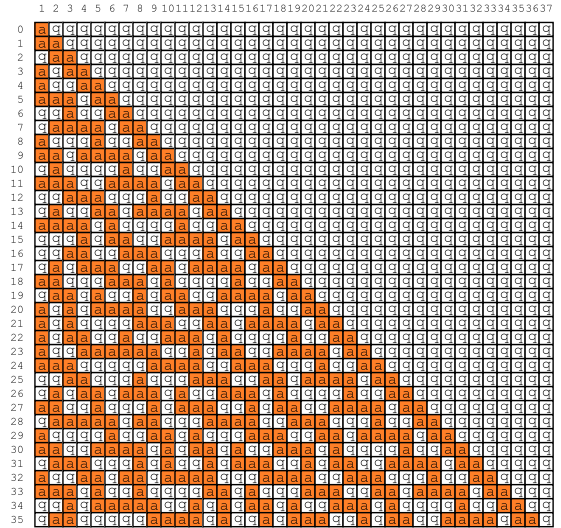
Transition Rule No. 071, Initial Configuration 2



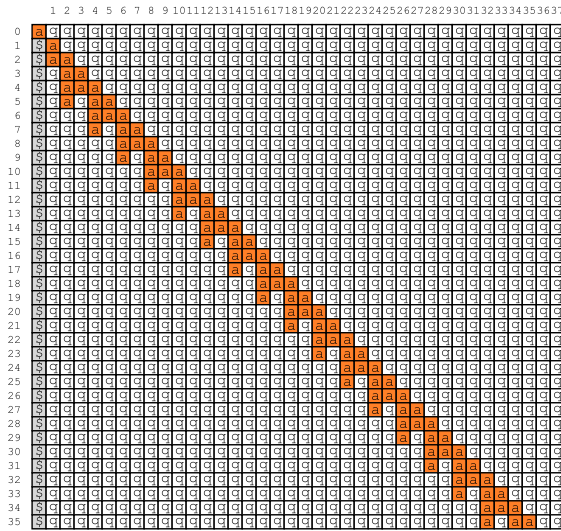
Transition Rule No. 072, Initial Configuration 1



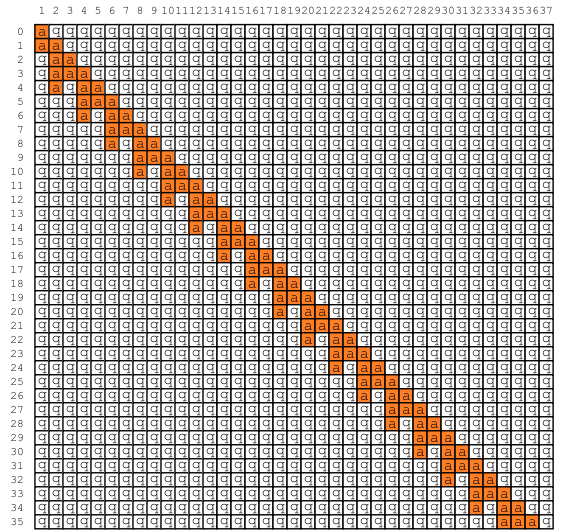
Transition Rule No. 072, Initial Configuration 2



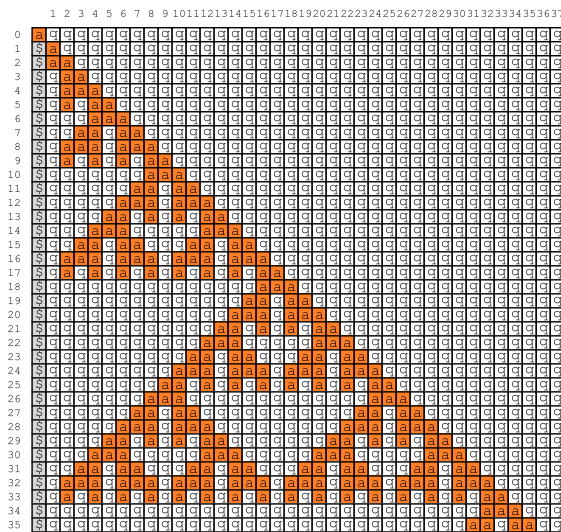
Transition Rule No. 073, Initial Configuration 1



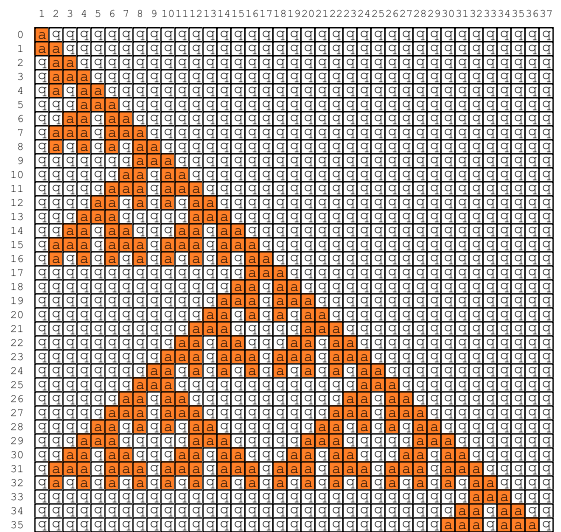
Transition Rule No. 073, Initial Configuration 2



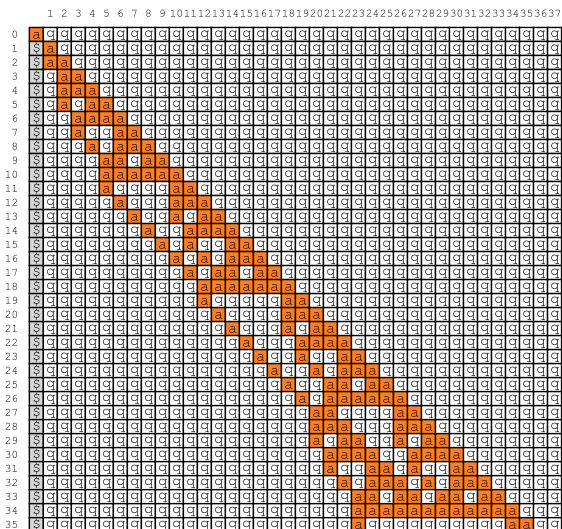
Transition Rule No. 074, Initial Configuration 1



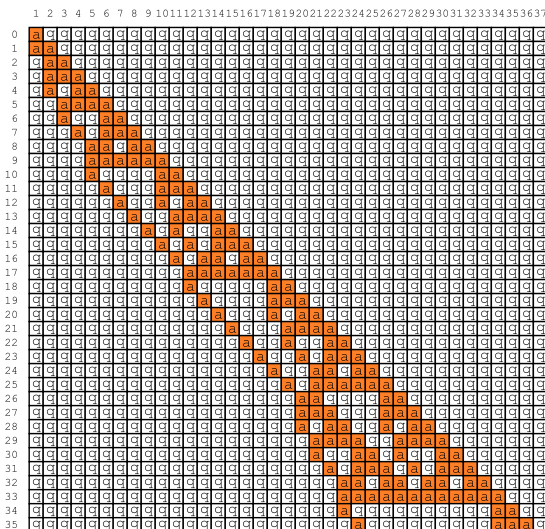
Transition Rule No. 074, Initial Configuration 2



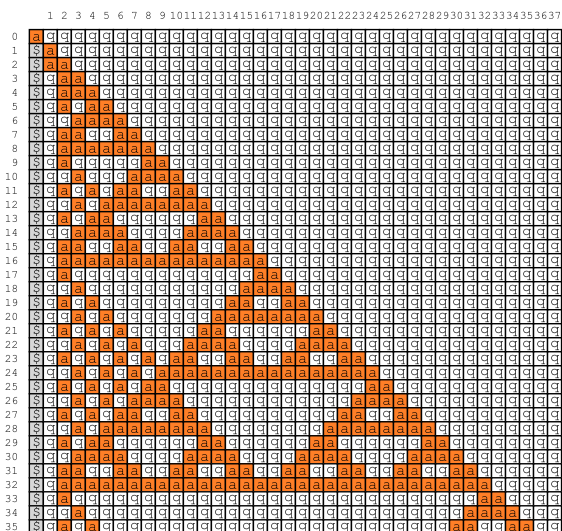
Transition Rule No. 075, Initial Configuration 1



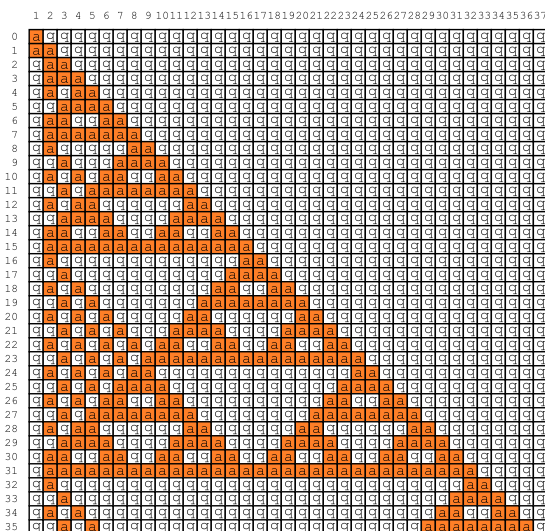
Transition Rule No. 075, Initial Configuration 2



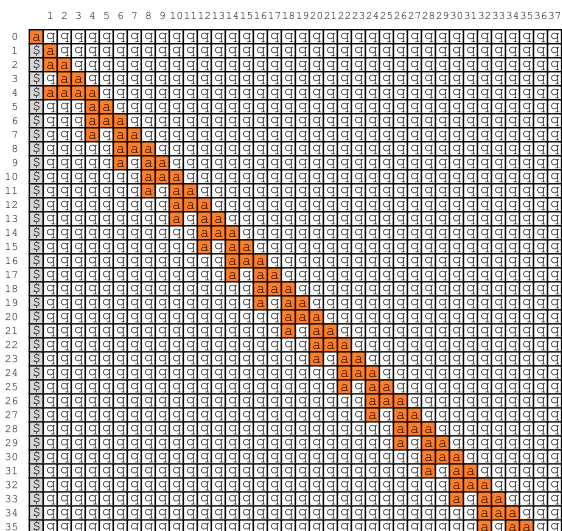
Transition Rule No. 076, Initial Configuration 1



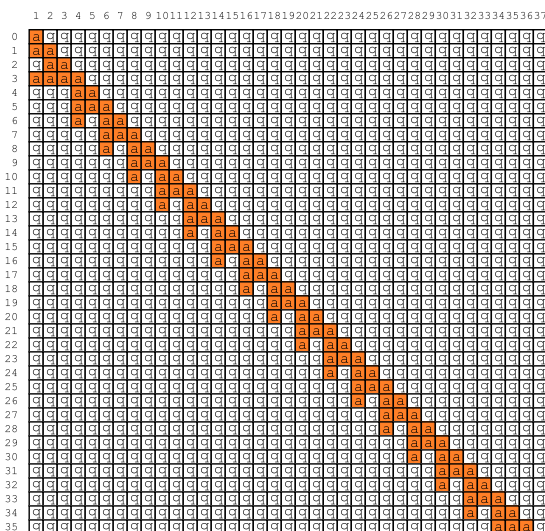
Transition Rule No. 076, Initial Configuration 2



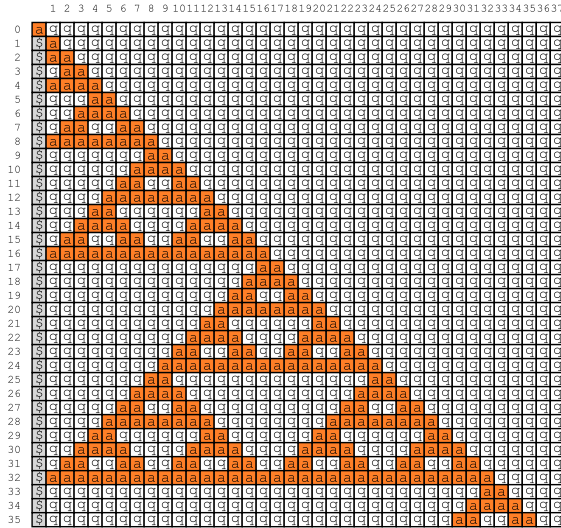
Transition Rule No. 077, Initial Configuration 1



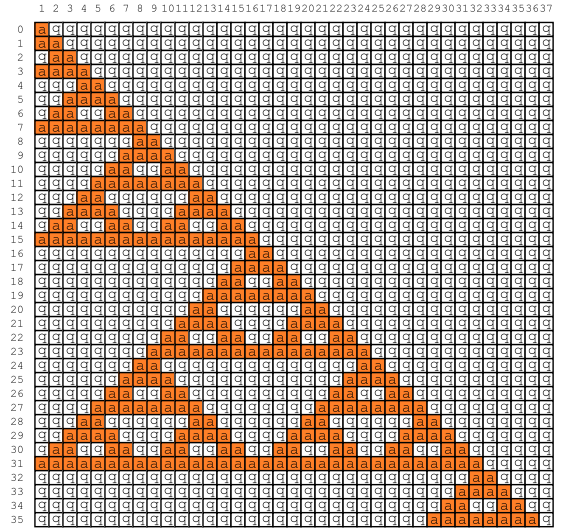
Transition Rule No. 077, Initial Configuration 2



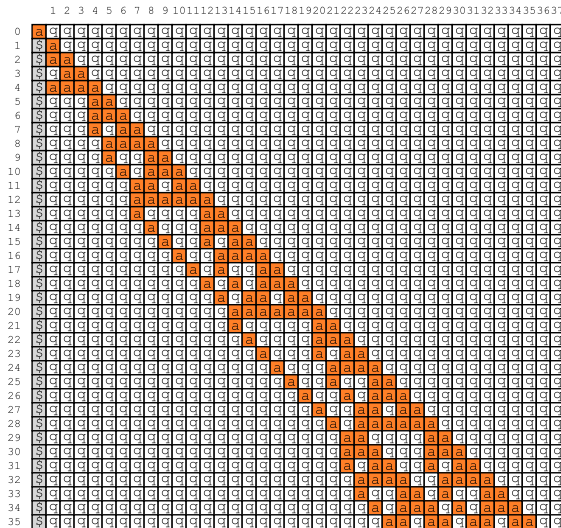
Transition Rule No. 078, Initial Configuration 1



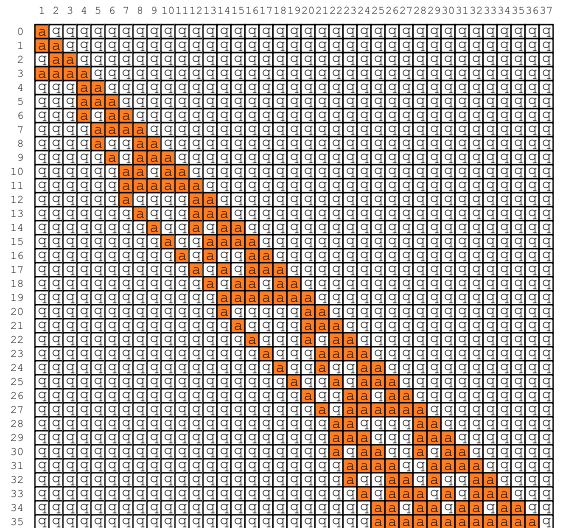
Transition Rule No. 078, Initial Configuration 2



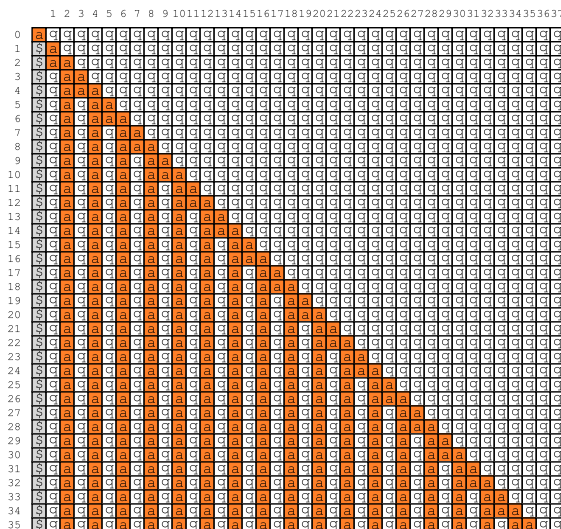
Transition Rule No. 079, Initial Configuration 1



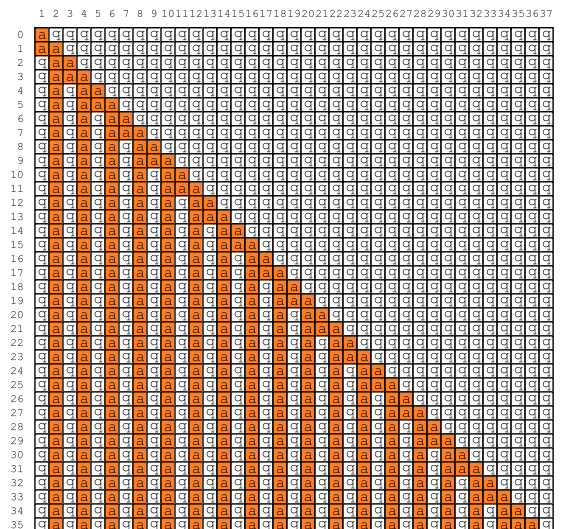
Transition Rule No. 079, Initial Configuration 2



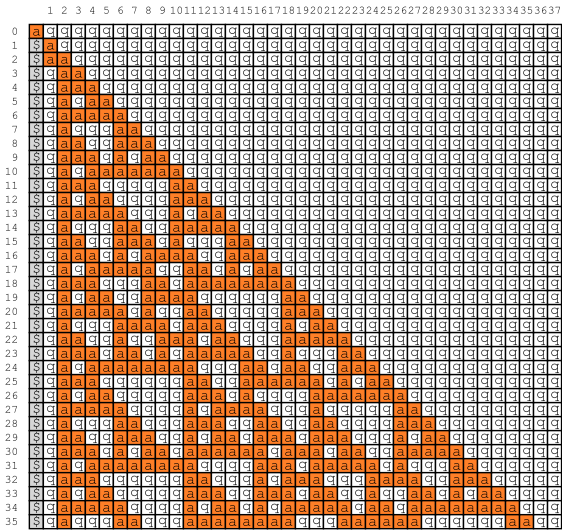
Transition Rule No. 080, Initial Configuration 1



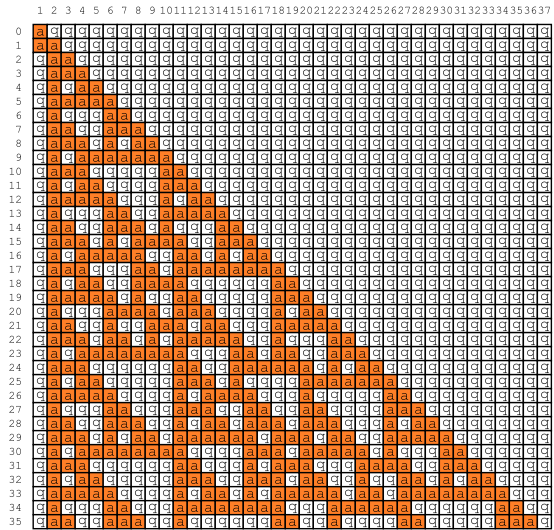
Transition Rule No. 080, Initial Configuration 2



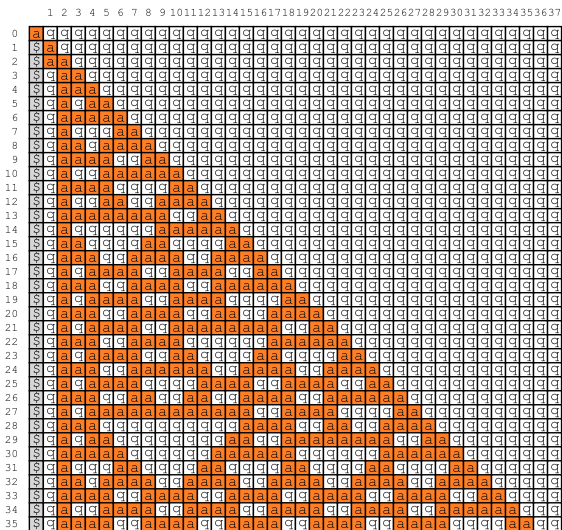
Transition Rule No. 081, Initial Configuration 1



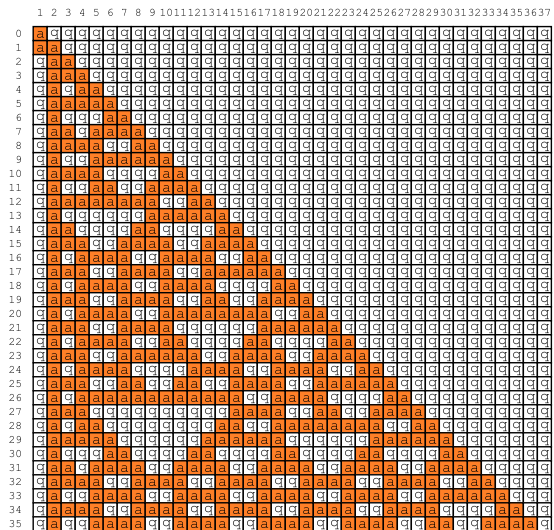
Transition Rule No. 081, Initial Configuration 2



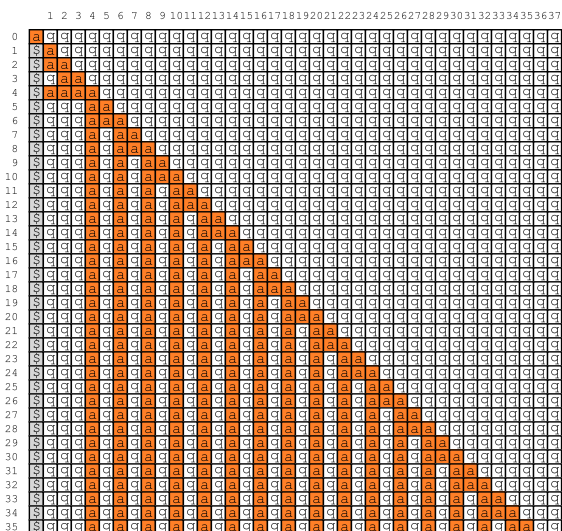
Transition Rule No. 082, Initial Configuration 1



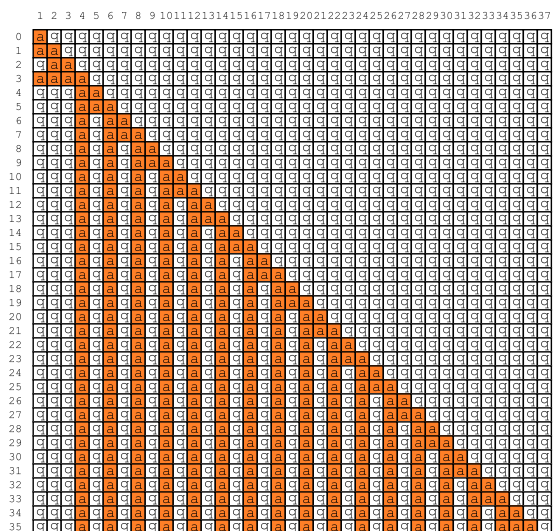
Transition Rule No. 082, Initial Configuration 2



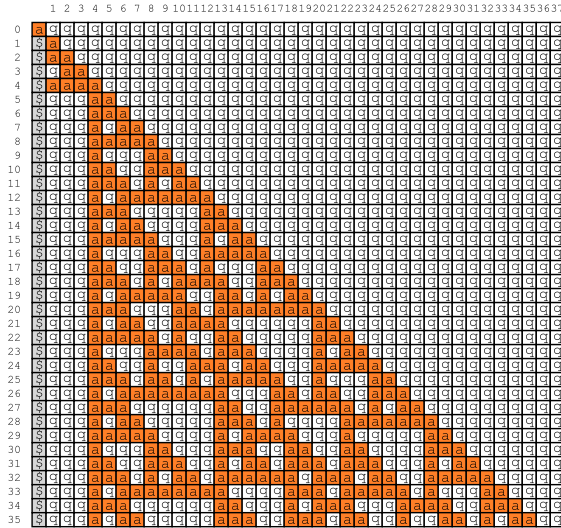
Transition Rule No. 083, Initial Configuration 1



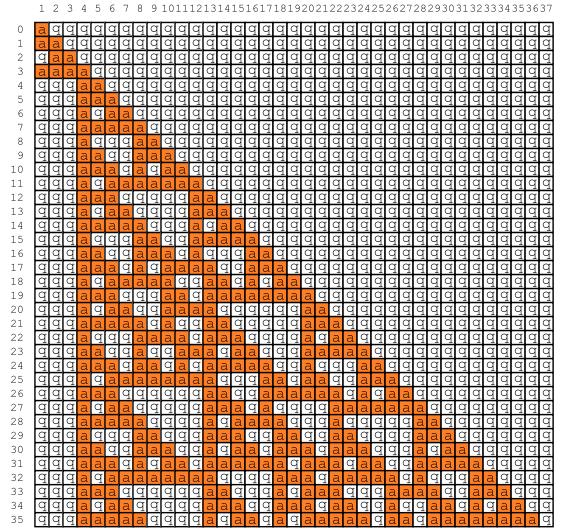
Transition Rule No. 083, Initial Configuration 2



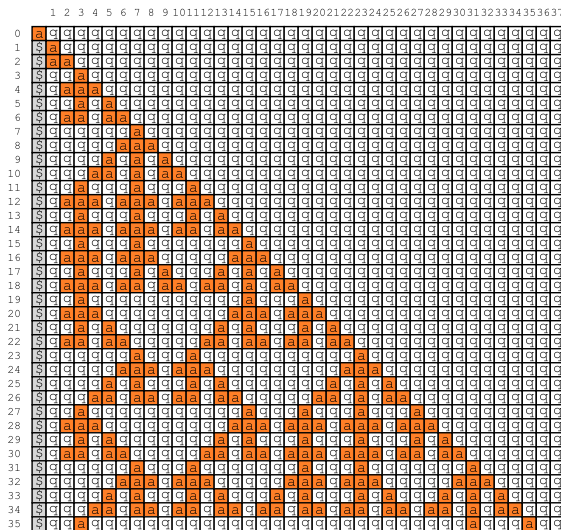
Transition Rule No. 084, Initial Configuration 1



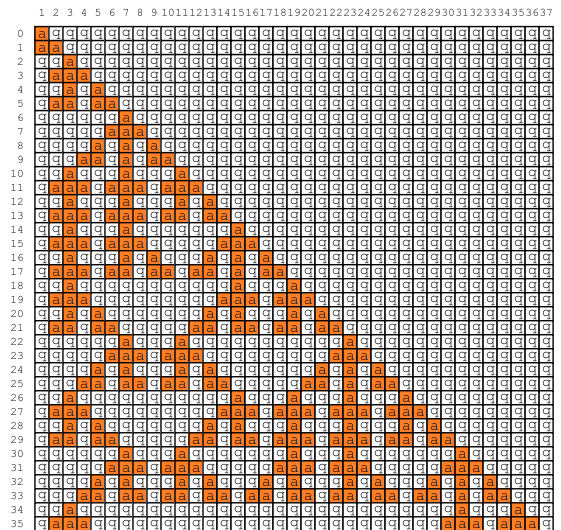
Transition Rule No. 084, Initial Configuration 2



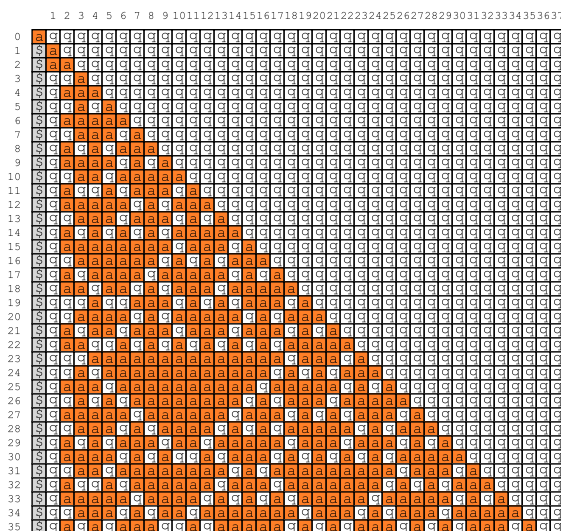
Transition Rule No. 085, Initial Configuration 1



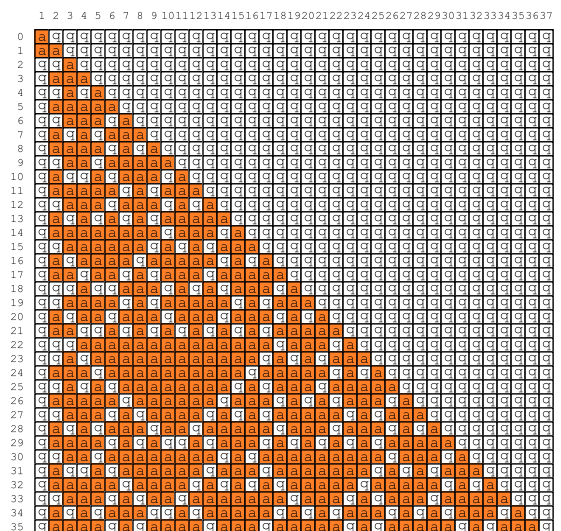
Transition Rule No. 085, Initial Configuration 2



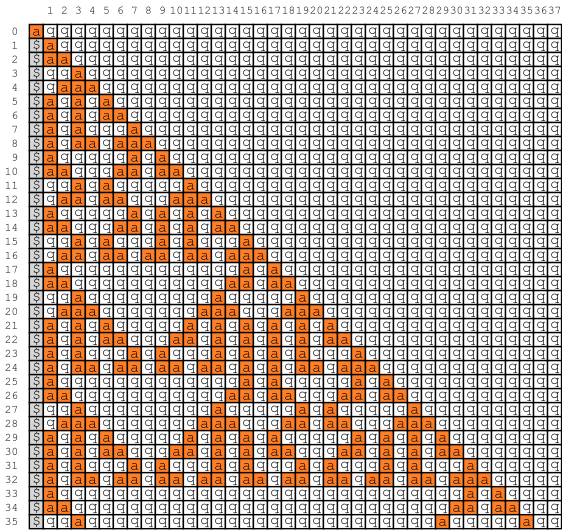
Transition Rule No. 086, Initial Configuration 1



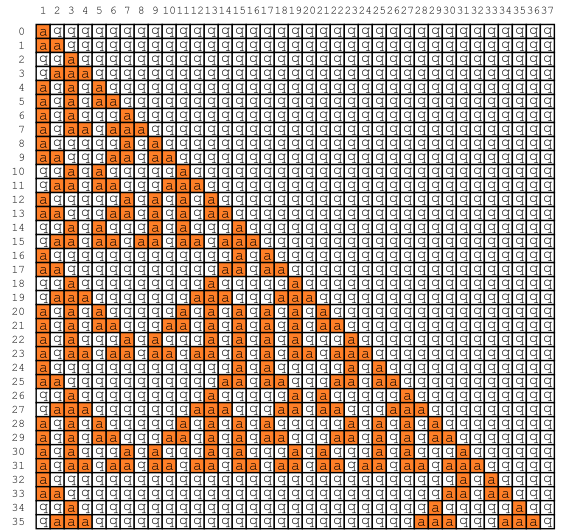
Transition Rule No. 086, Initial Configuration 2



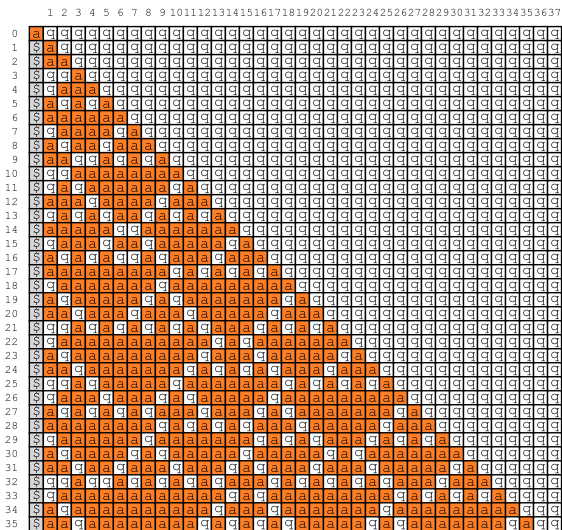
Transition Rule No. 087, Initial Configuration 1



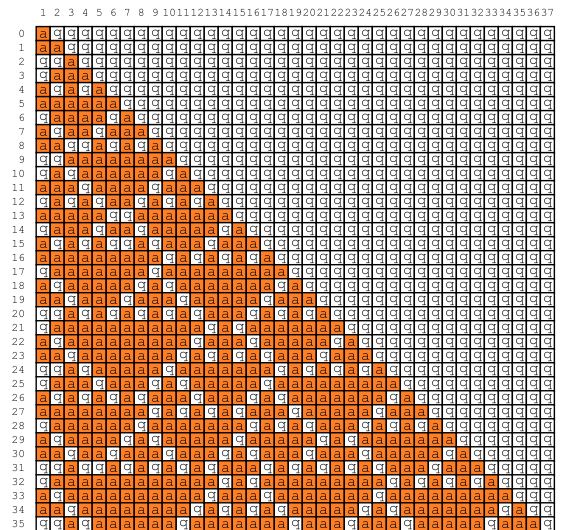
Transition Rule No. 087, Initial Configuration 2



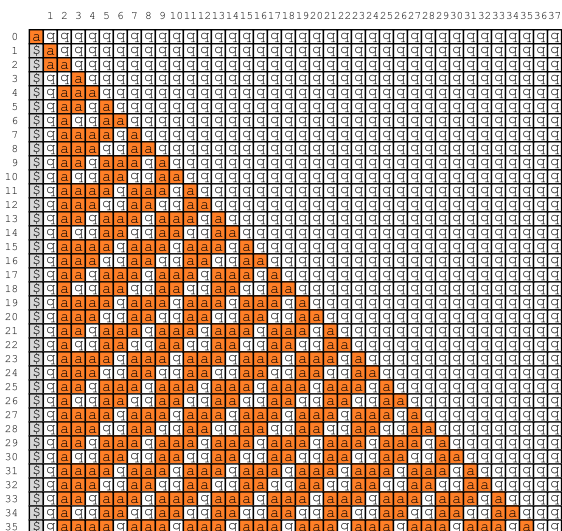
Transition Rule No. 088, Initial Configuration 1



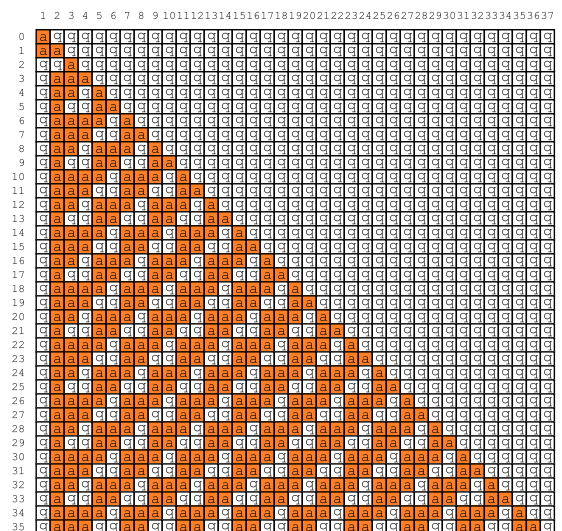
Transition Rule No. 088, Initial Configuration 2



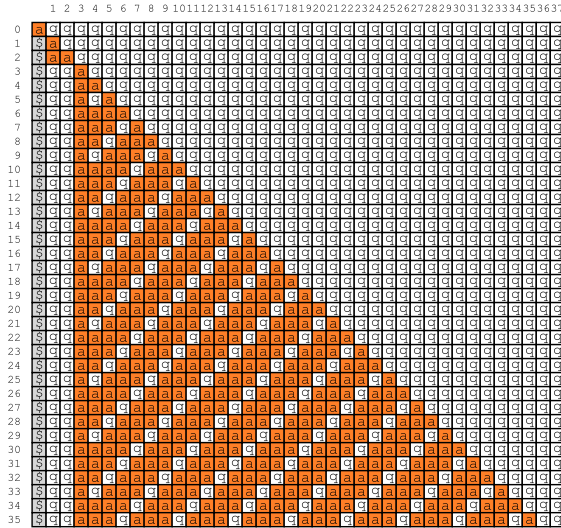
Transition Rule No. 089, Initial Configuration 1



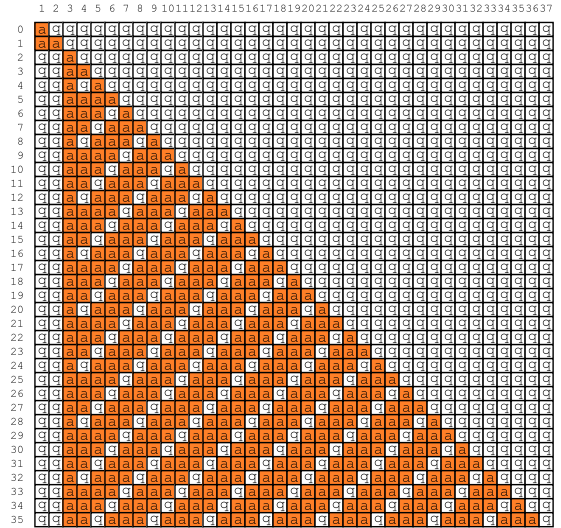
Transition Rule No. 089, Initial Configuration 2



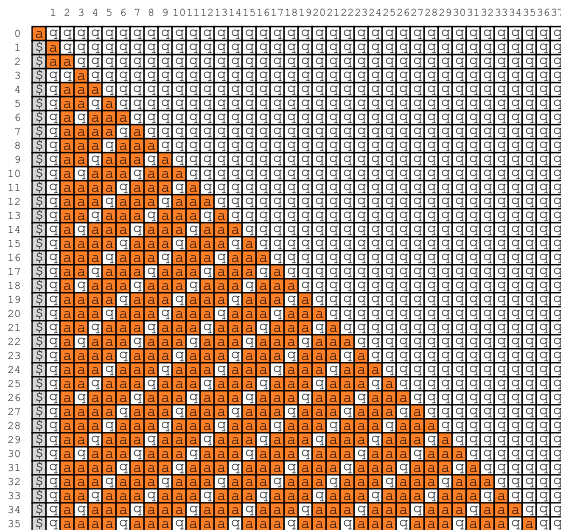
Transition Rule No. 090, Initial Configuration 1



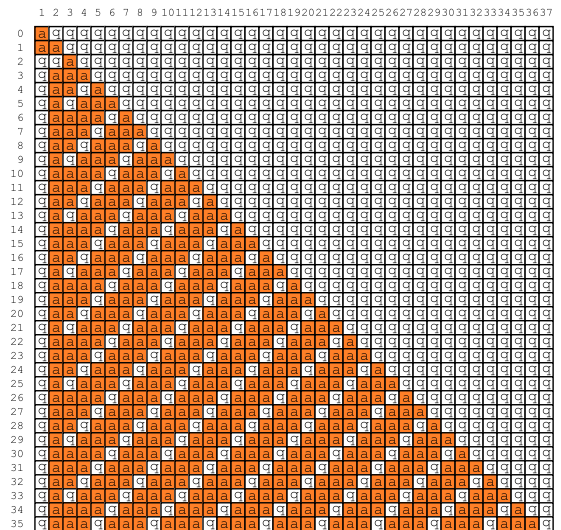
Transition Rule No. 090, Initial Configuration 2



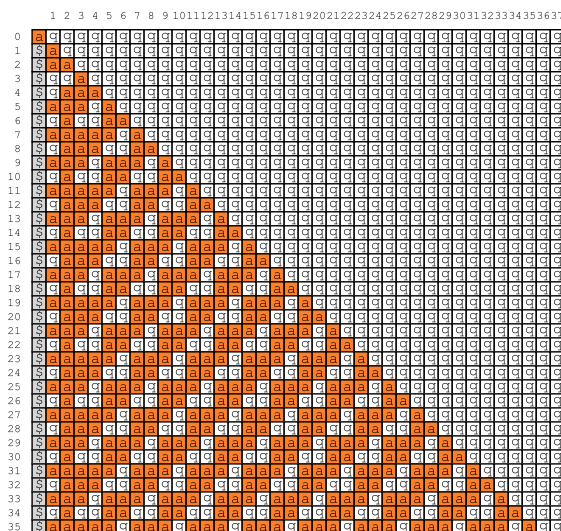
Transition Rule No. 091, Initial Configuration 1



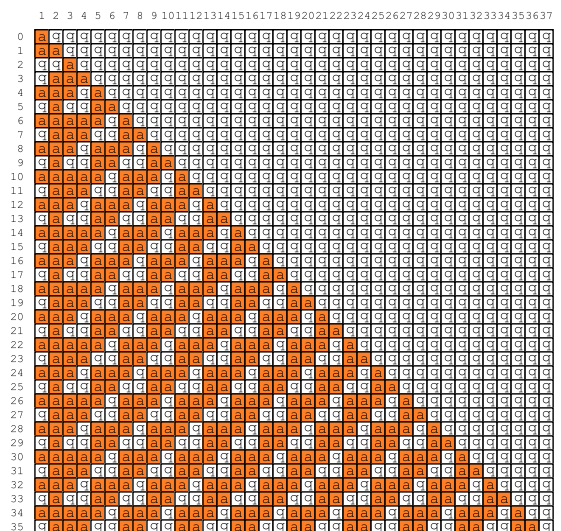
Transition Rule No. 091, Initial Configuration 2



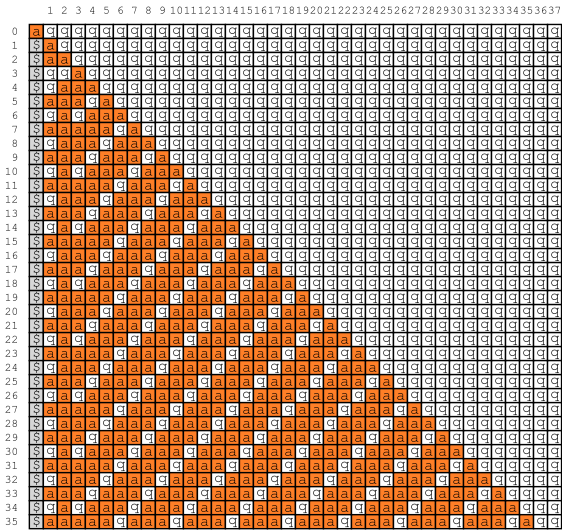
Transition Rule No. 092, Initial Configuration 1



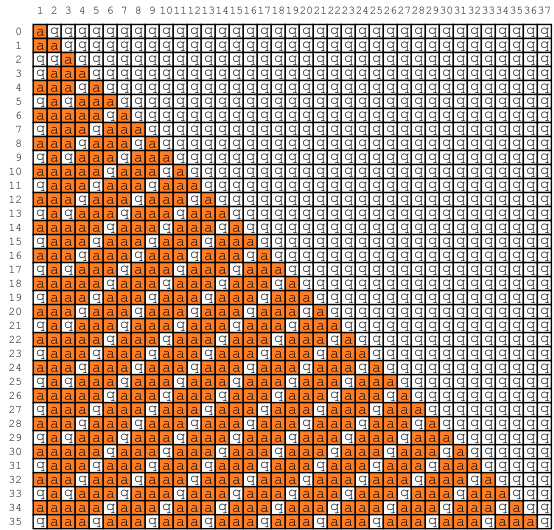
Transition Rule No. 092, Initial Configuration 2



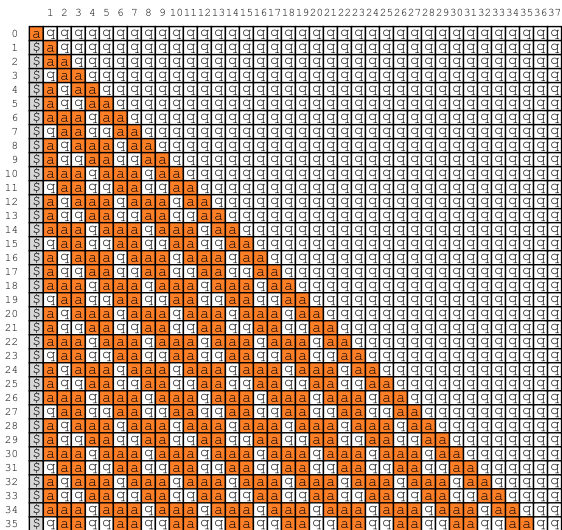
Transition Rule No. 093, Initial Configuration 1



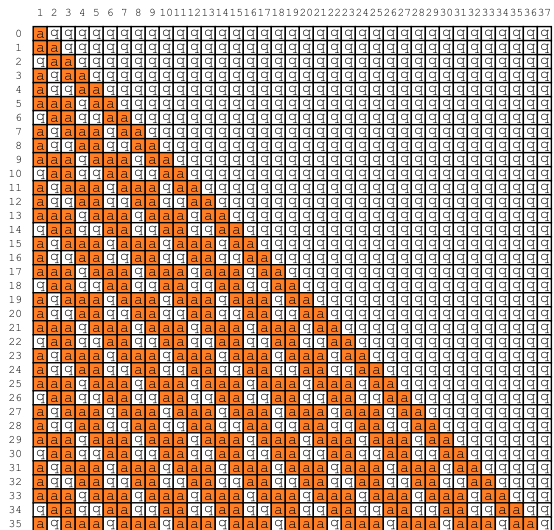
Transition Rule No. 093, Initial Configuration 2



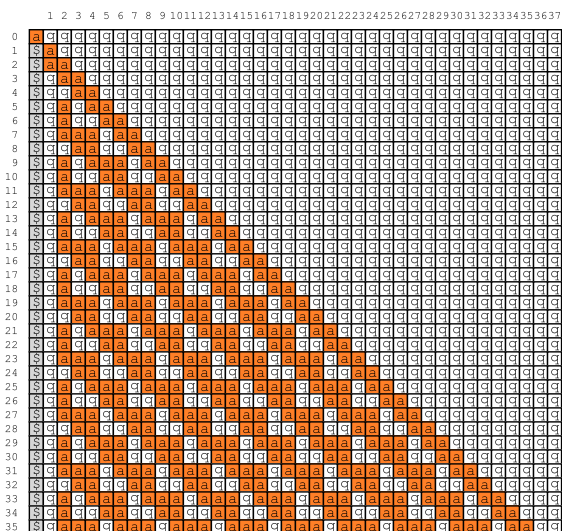
Transition Rule No. 094, Initial Configuration 1



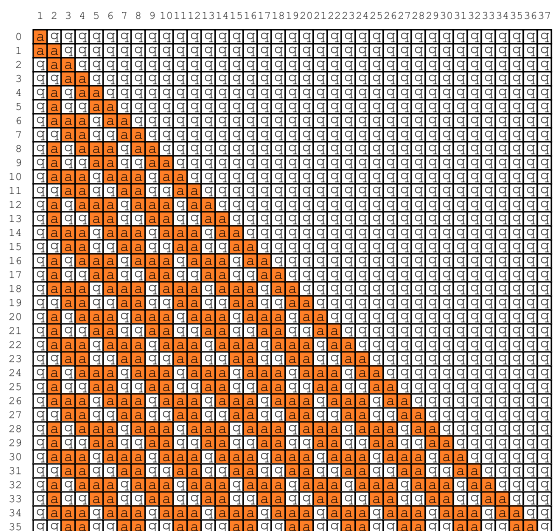
Transition Rule No. 094, Initial Configuration 2



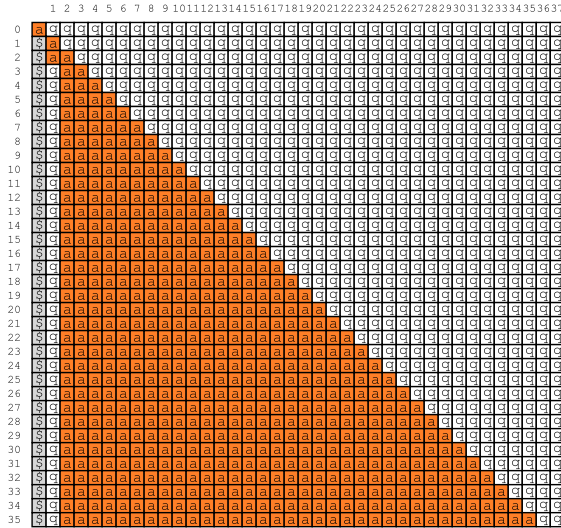
Transition Rule No. 095, Initial Configuration 1



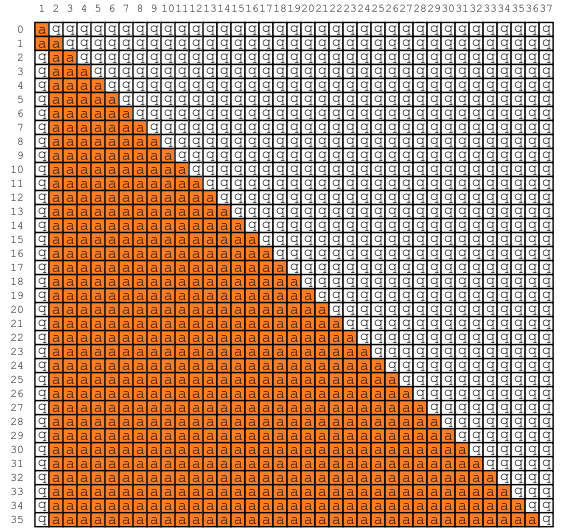
Transition Rule No. 095, Initial Configuration 2



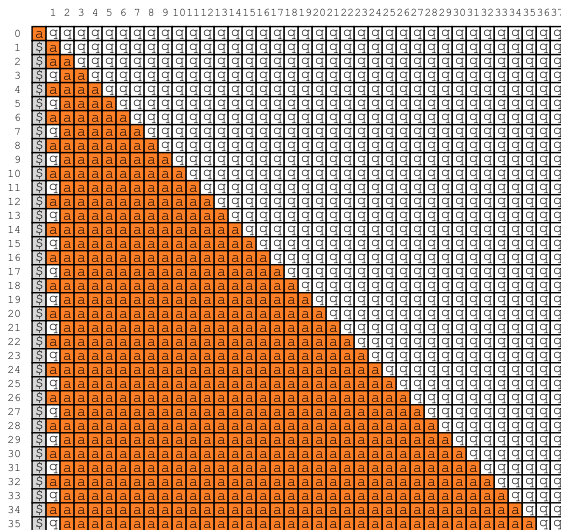
Transition Rule No. 096, Initial Configuration 1



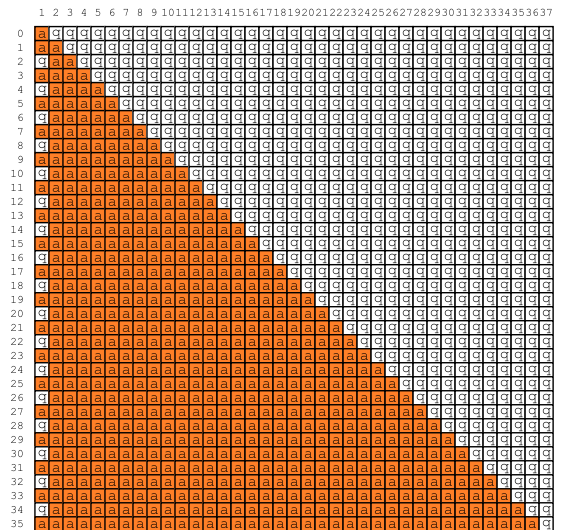
Transition Rule No. 096, Initial Configuration 2



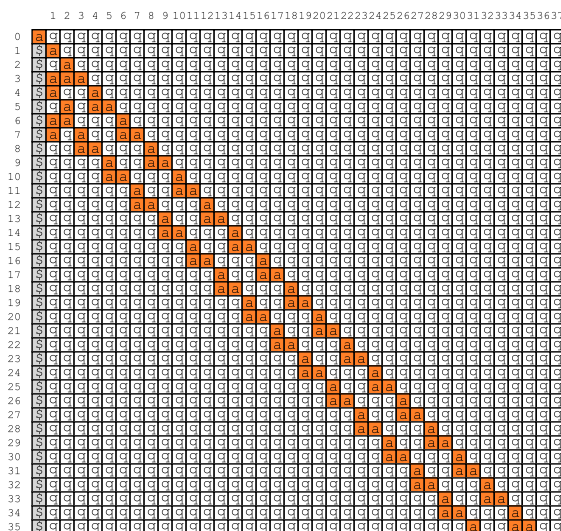
Transition Rule No. 097, Initial Configuration 1



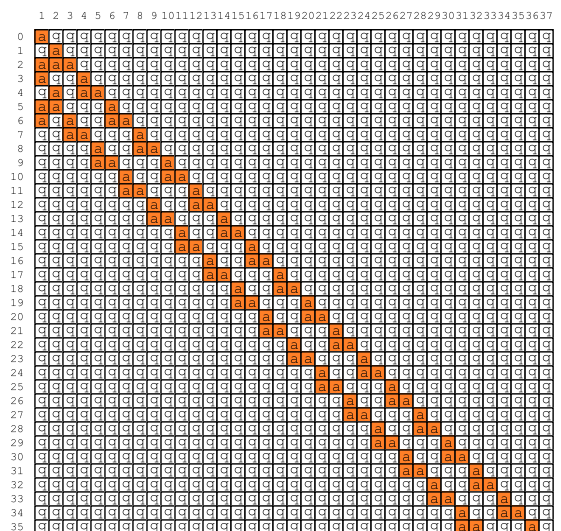
Transition Rule No. 097, Initial Configuration 2



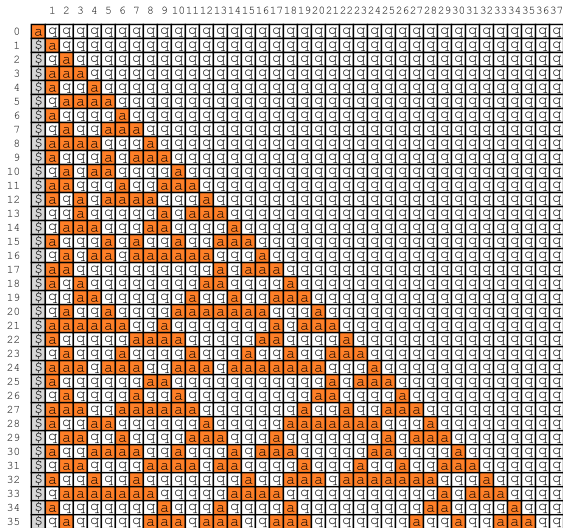
Transition Rule No. 098, Initial Configuration 1



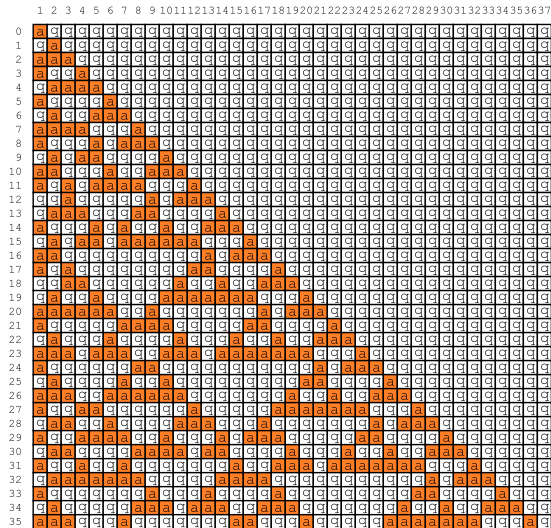
Transition Rule No. 098, Initial Configuration 2



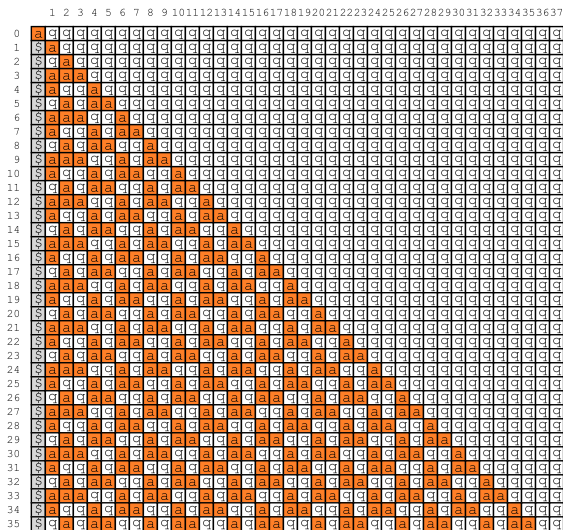
Transition Rule No. 099, Initial Configuration 1



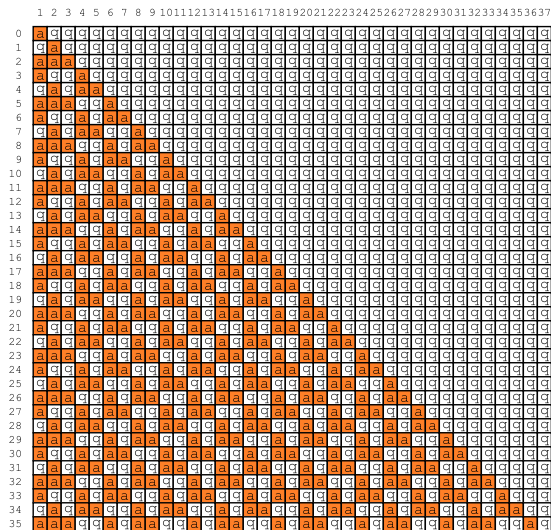
Transition Rule No. 099, Initial Configuration 2



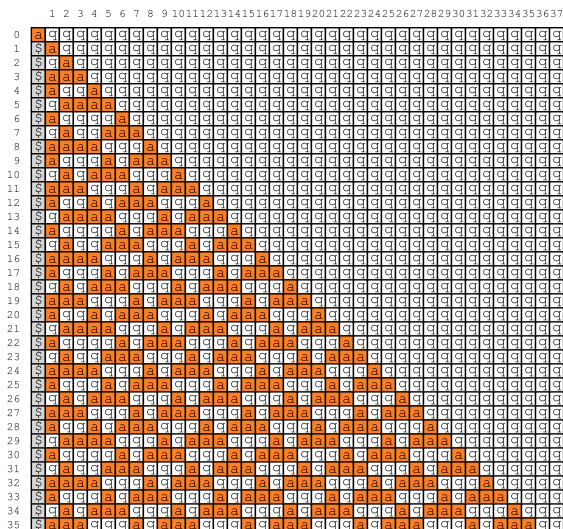
Transition Rule No. 100, Initial Configuration 1



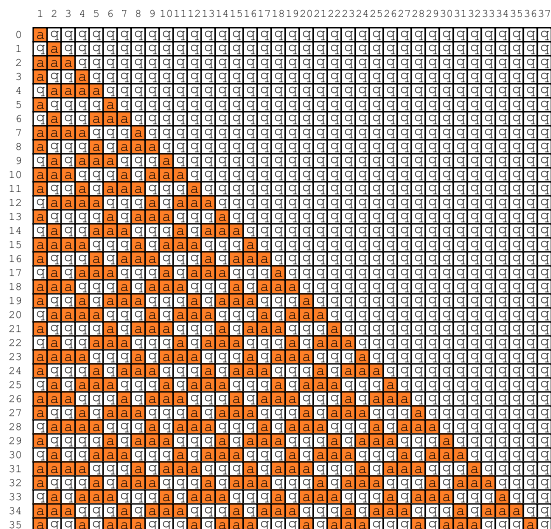
Transition Rule No. 100, Initial Configuration 2



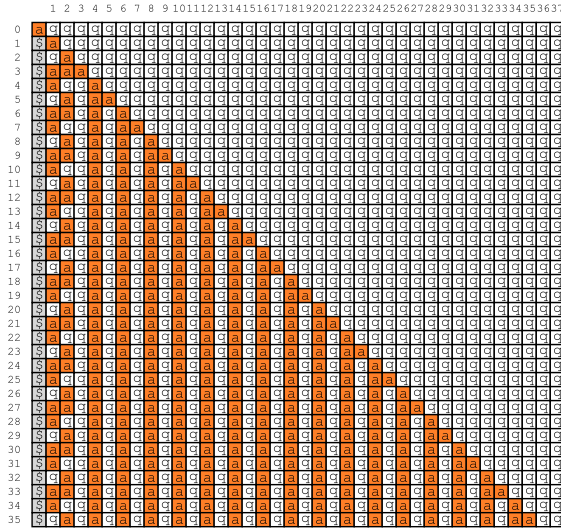
Transition Rule No. 101, Initial Configuration 1



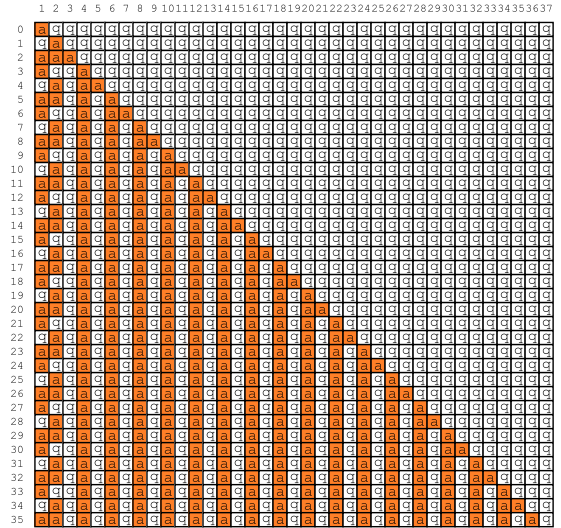
Transition Rule No. 101, Initial Configuration 2



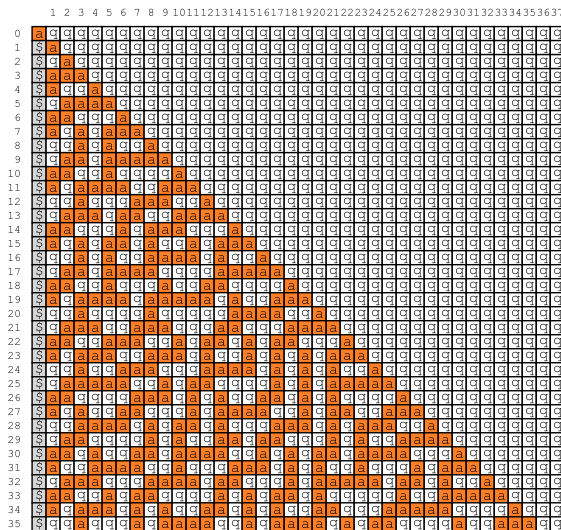
Transition Rule No. 102, Initial Configuration 1



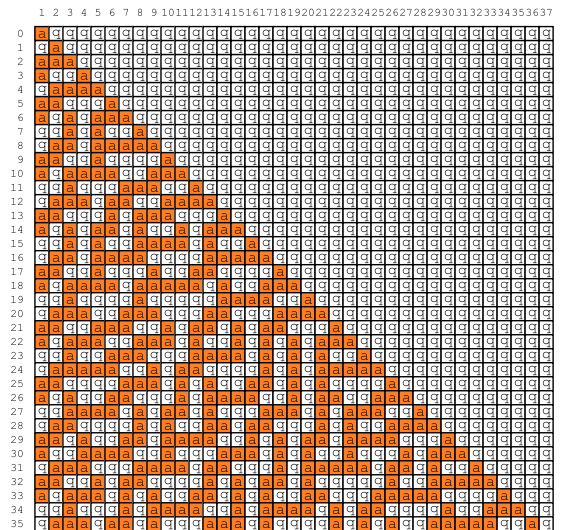
Transition Rule No. 102, Initial Configuration 2



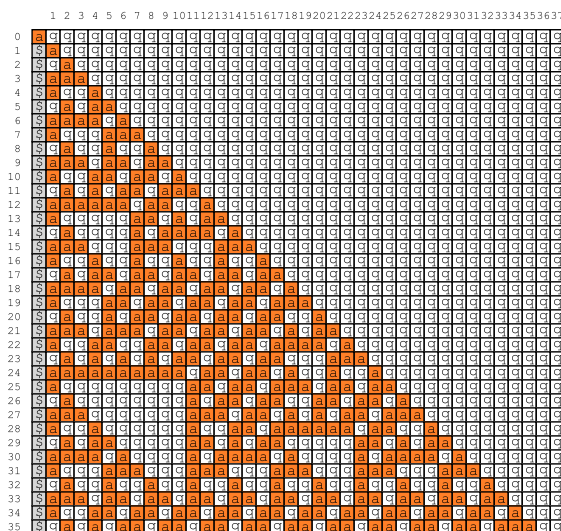
Transition Rule No. 103, Initial Configuration 1



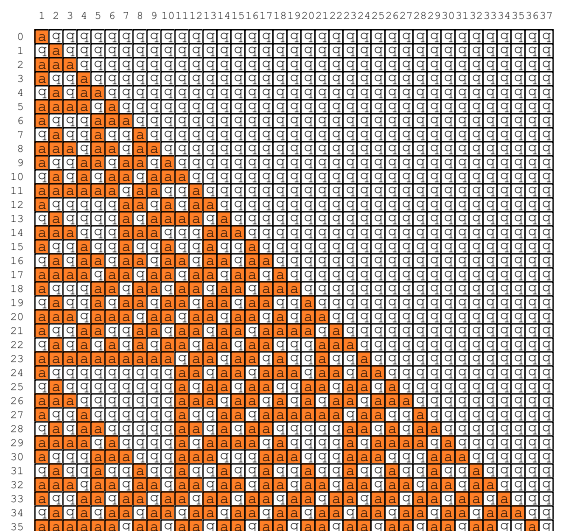
Transition Rule No. 103, Initial Configuration 2



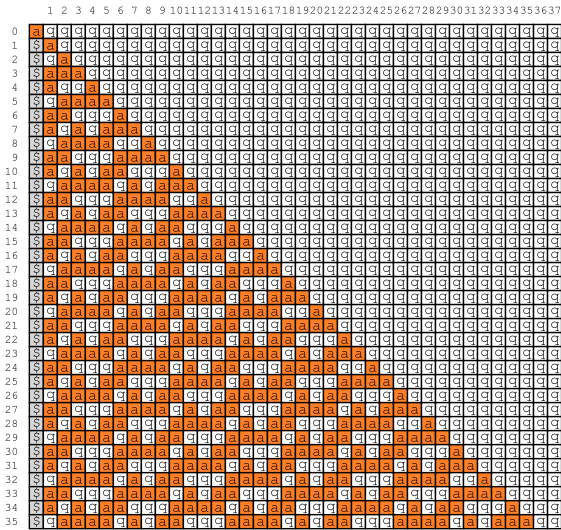
Transition Rule No. 104, Initial Configuration 1



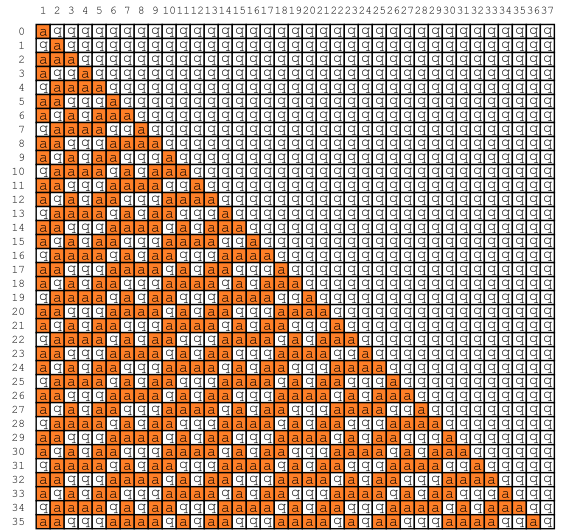
Transition Rule No. 104, Initial Configuration 2



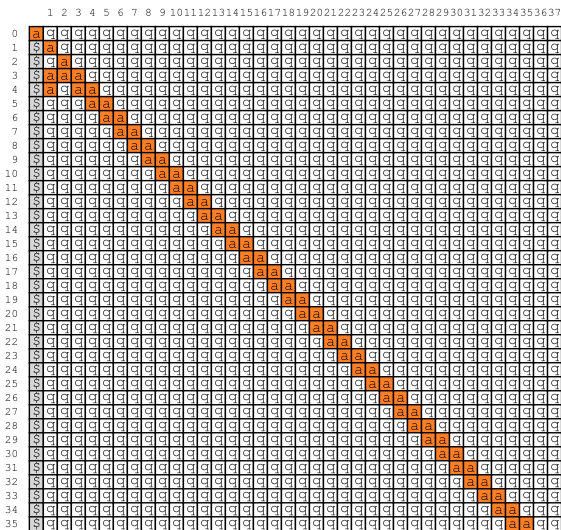
Transition Rule No. 105, Initial Configuration 1



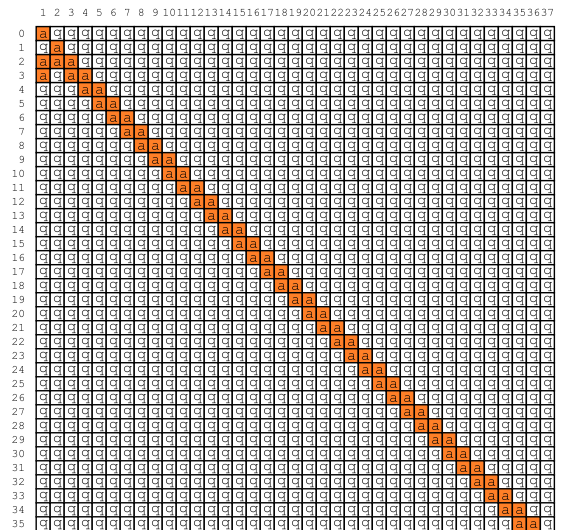
Transition Rule No. 105, Initial Configuration 2



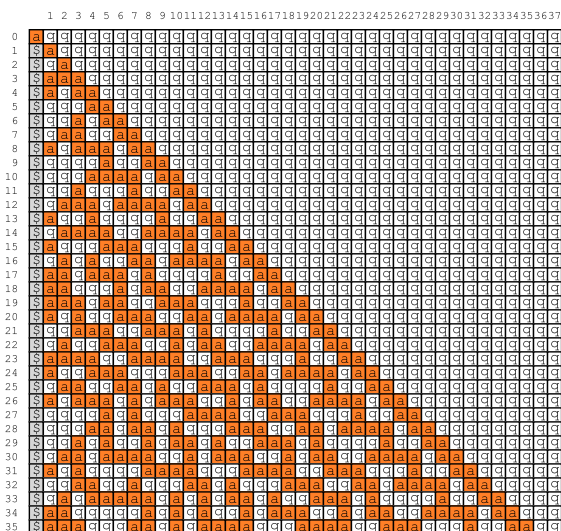
Transition Rule No. 106, Initial Configuration 1



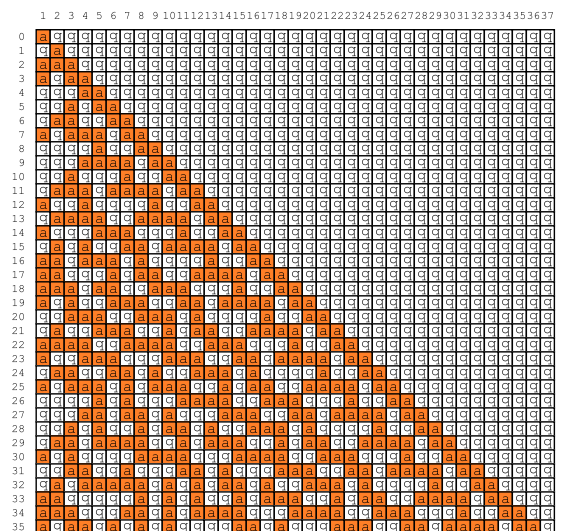
Transition Rule No. 106, Initial Configuration 2



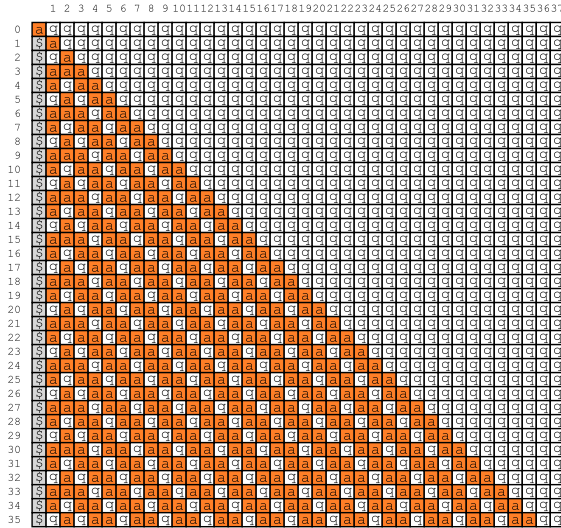
Transition Rule No. 107, Initial Configuration 1



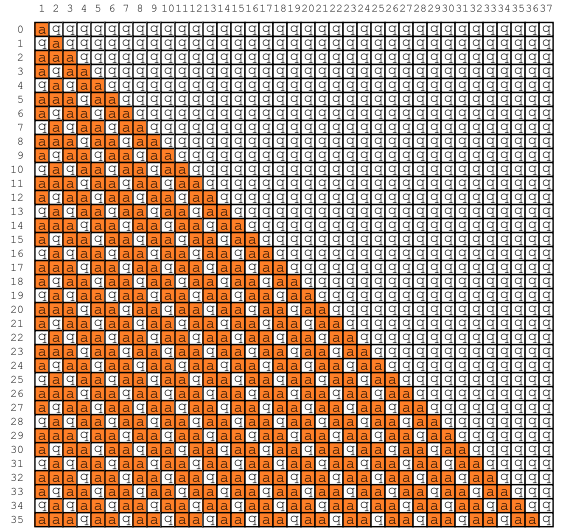
Transition Rule No. 107, Initial Configuration 2



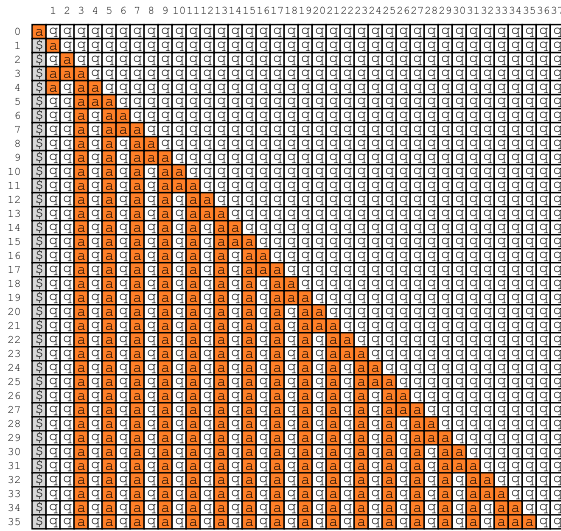
Transition Rule No. 108, Initial Configuration 1



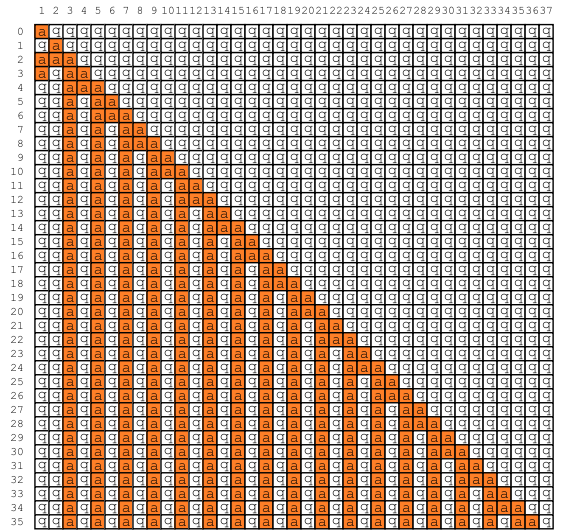
Transition Rule No. 108, Initial Configuration 2



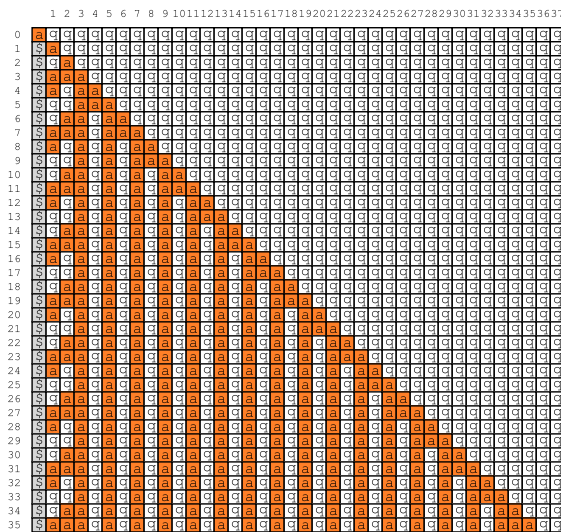
Transition Rule No. 109, Initial Configuration 1



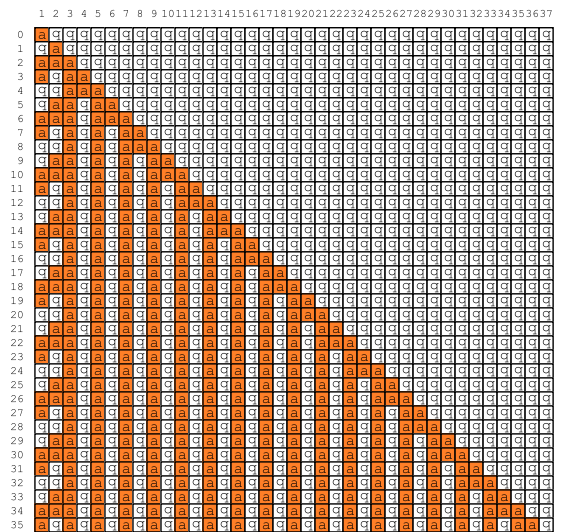
Transition Rule No. 109, Initial Configuration 2



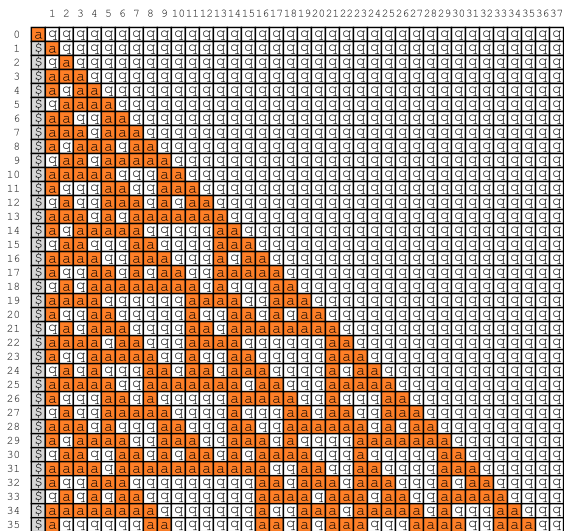
Transition Rule No. 110, Initial Configuration 1



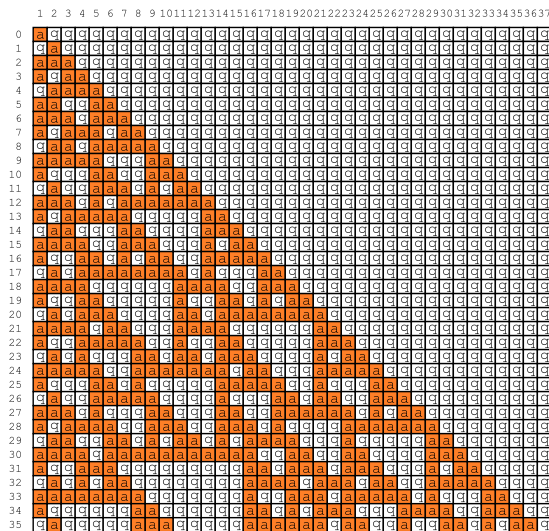
Transition Rule No. 110, Initial Configuration 2



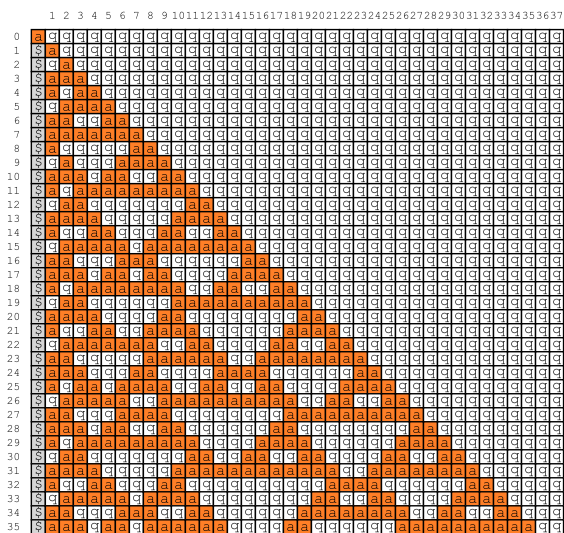
Transition Rule No. 111, Initial Configuration 1



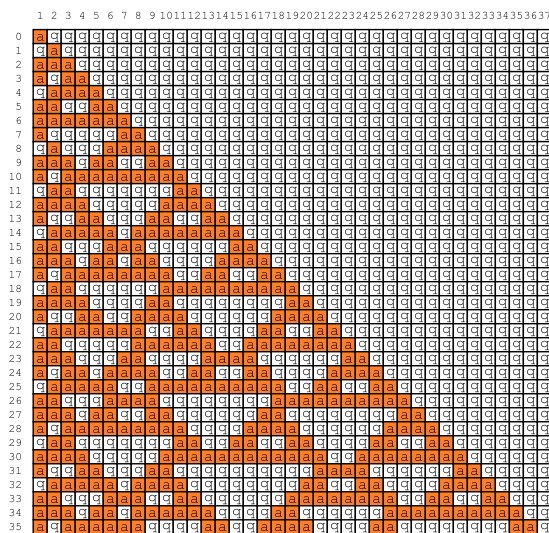
Transition Rule No. 111, Initial Configuration 2



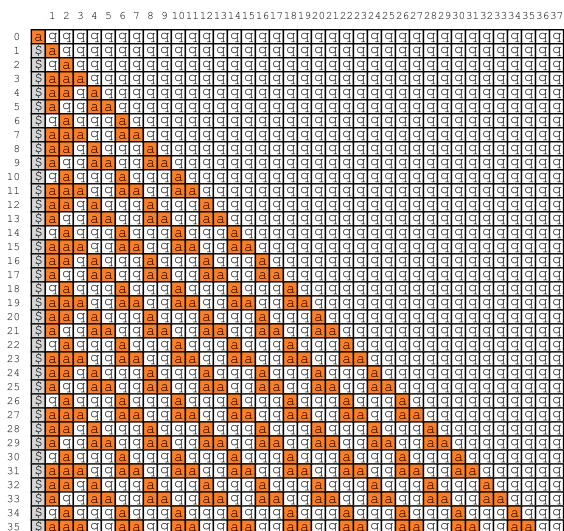
Transition Rule No. 112, Initial Configuration 1



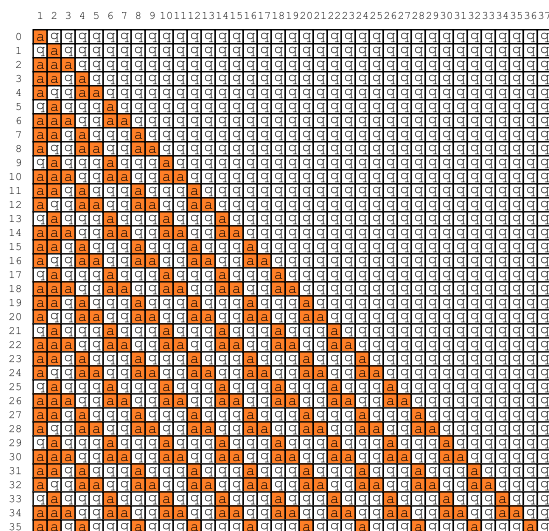
Transition Rule No. 112, Initial Configuration 2



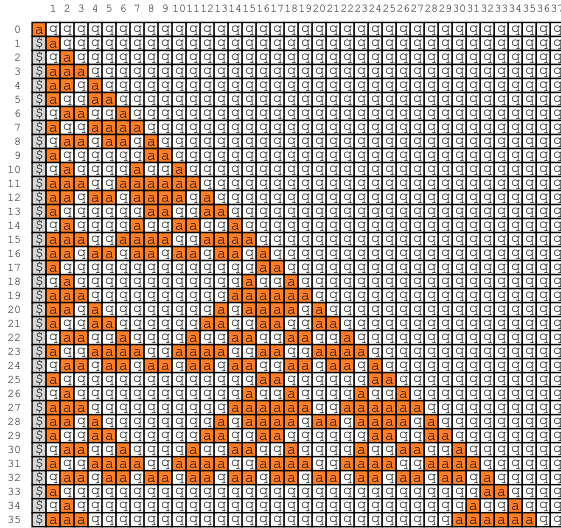
Transition Rule No. 113, Initial Configuration 1



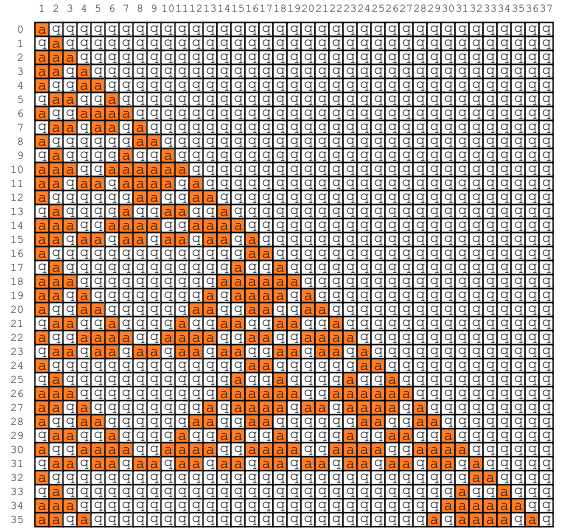
Transition Rule No. 113, Initial Configuration 2



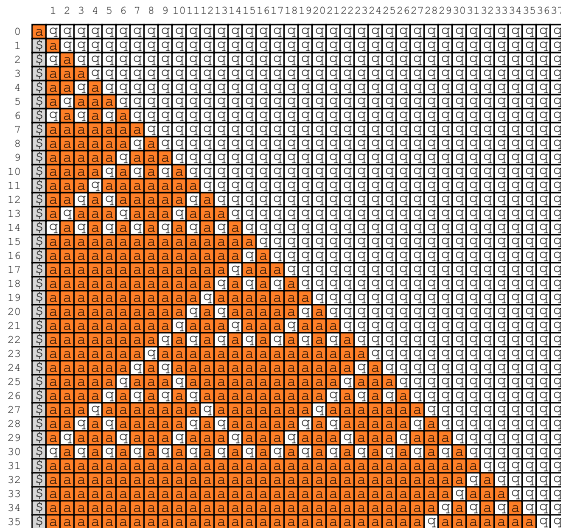
Transition Rule No. 114, Initial Configuration 1



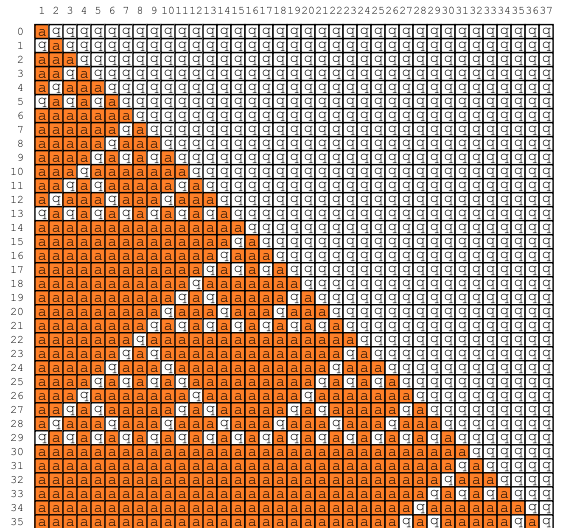
Transition Rule No. 114, Initial Configuration 2



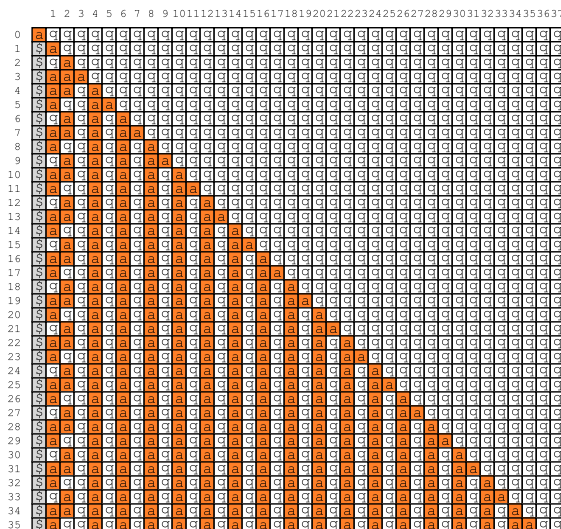
Transition Rule No. 115, Initial Configuration 1



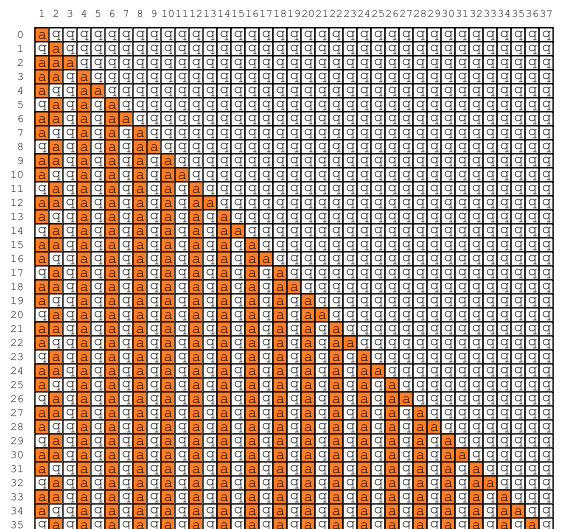
Transition Rule No. 115, Initial Configuration 2



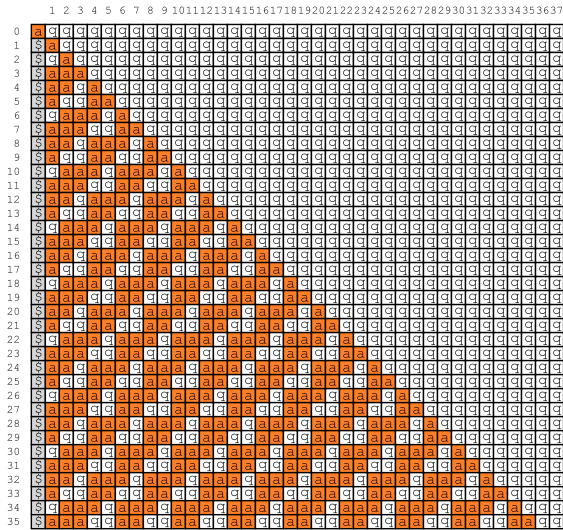
Transition Rule No. 116, Initial Configuration 1



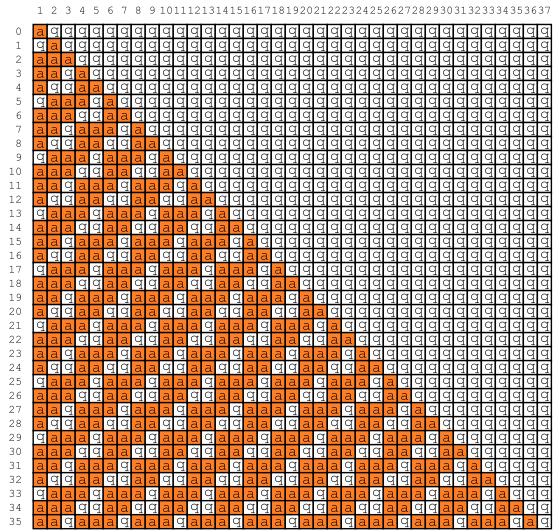
Transition Rule No. 116, Initial Configuration 2



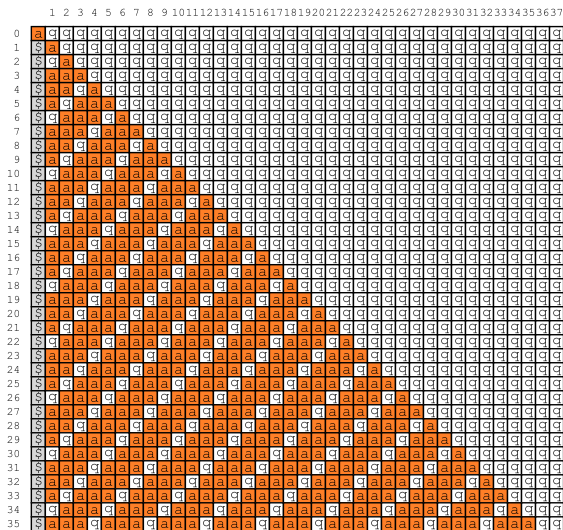
Transition Rule No. 117, Initial Configuration 1



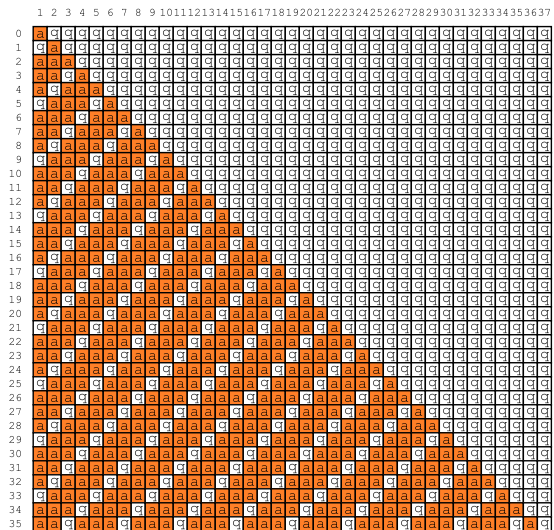
Transition Rule No. 117, Initial Configuration 2



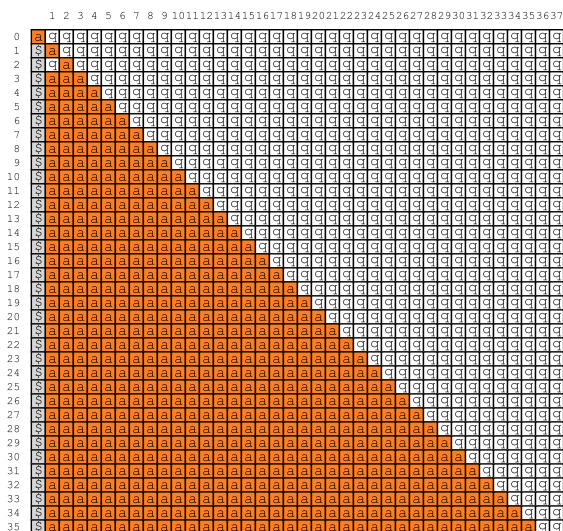
Transition Rule No. 118, Initial Configuration 1



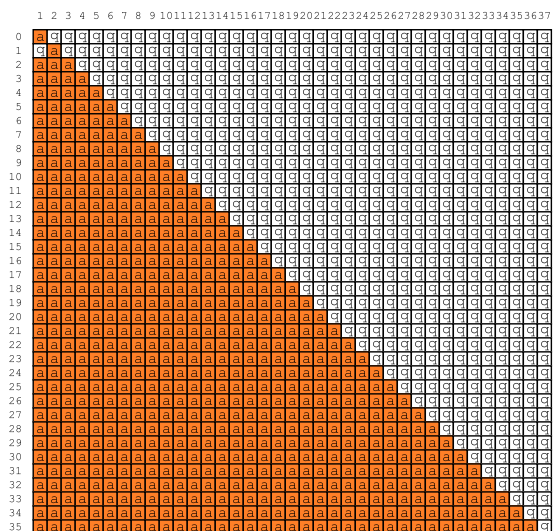
Transition Rule No. 118, Initial Configuration 2



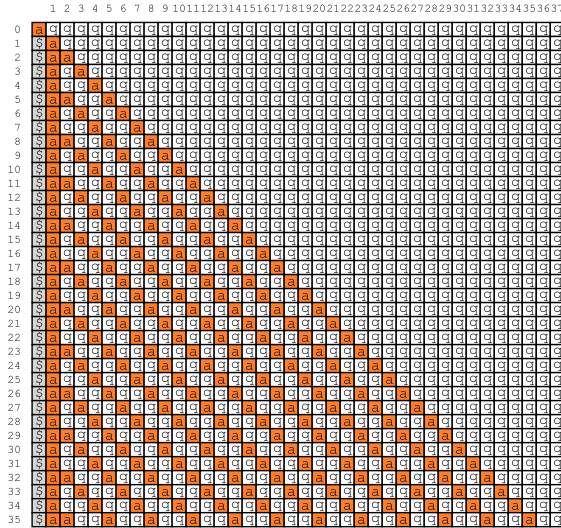
Transition Rule No. 119, Initial Configuration 1



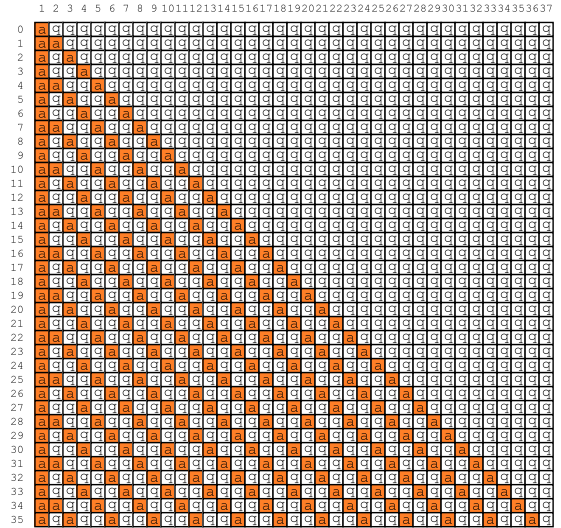
Transition Rule No. 119, Initial Configuration 2



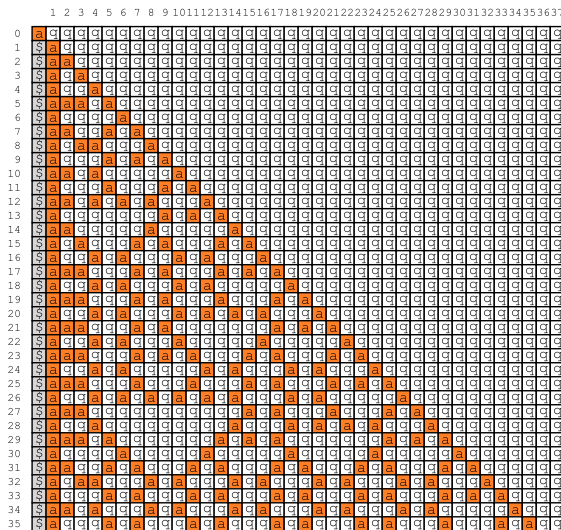
Transition Rule No. 120, Initial Configuration 1



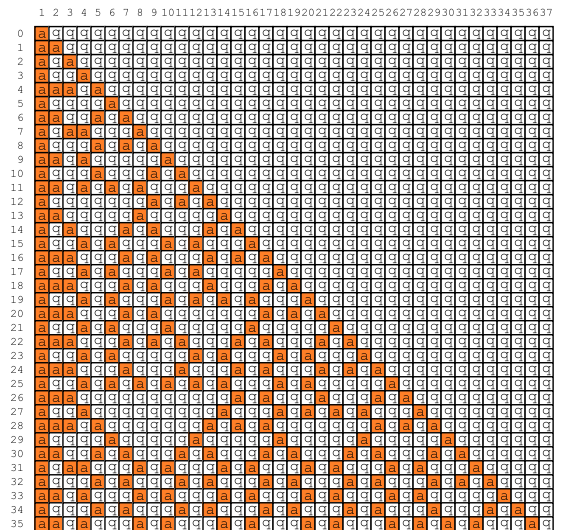
Transition Rule No. 120, Initial Configuration 2



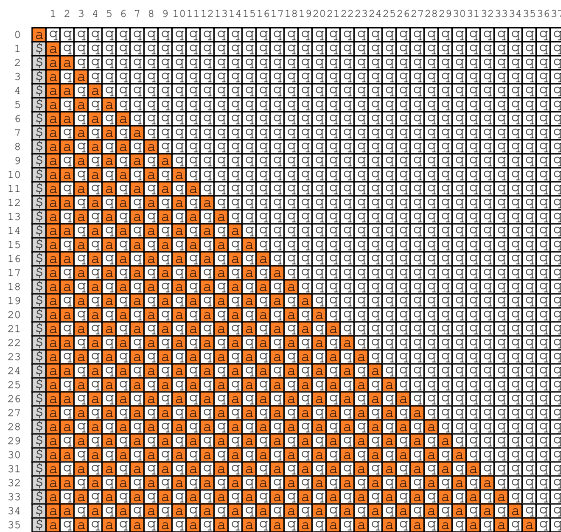
Transition Rule No. 121, Initial Configuration 1



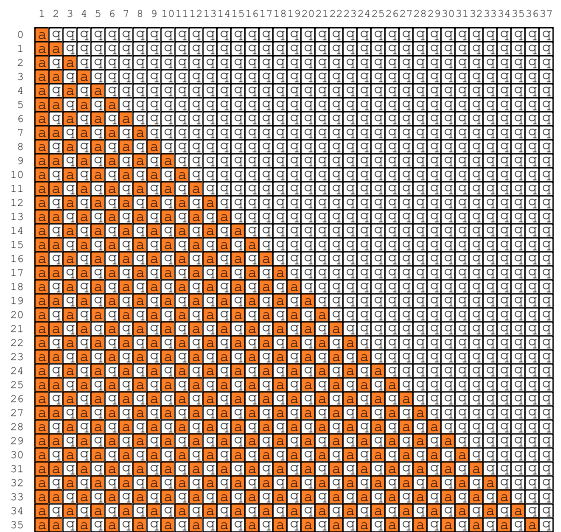
Transition Rule No. 121, Initial Configuration 2



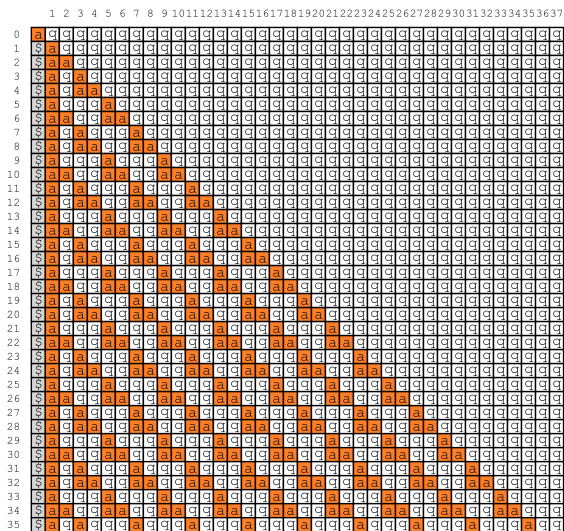
Transition Rule No. 122, Initial Configuration 1



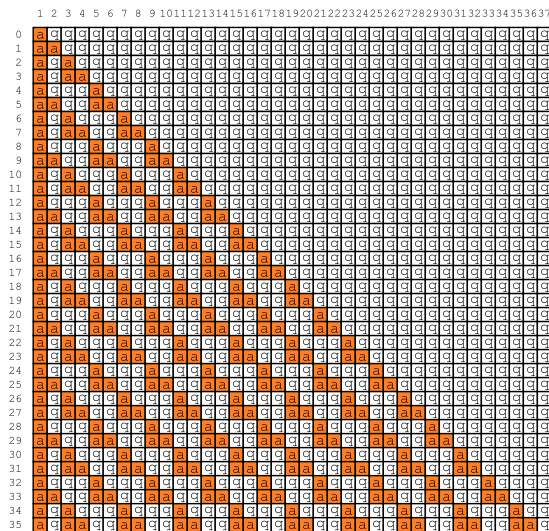
Transition Rule No. 122, Initial Configuration 2



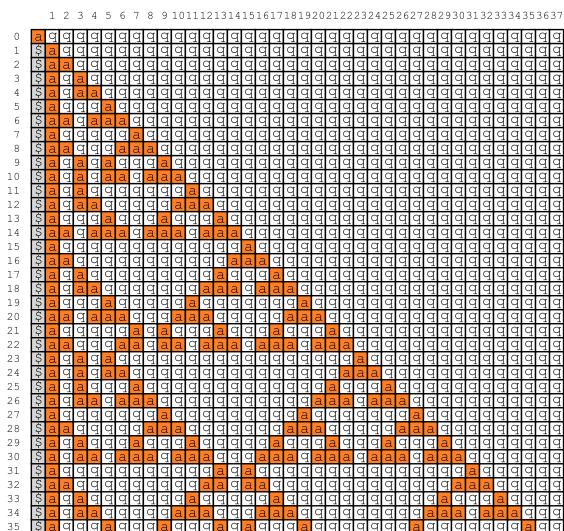
Transition Rule No. 123, Initial Configuration 1



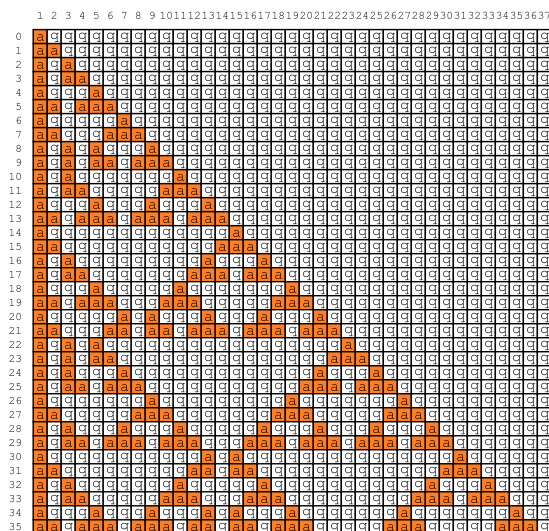
Transition Rule No. 123, Initial Configuration 2



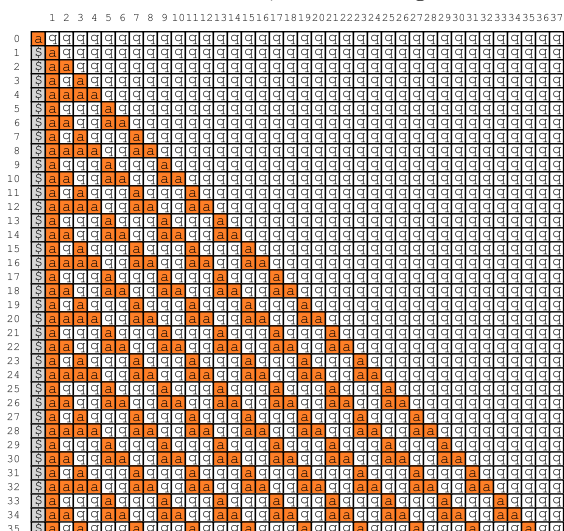
Transition Rule No. 124, Initial Configuration 1



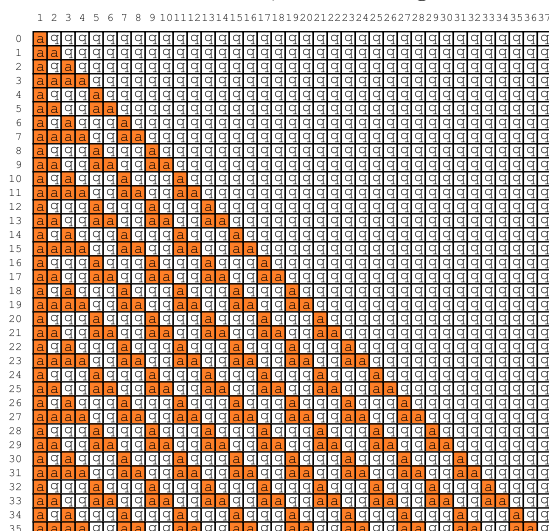
Transition Rule No. 124, Initial Configuration 2



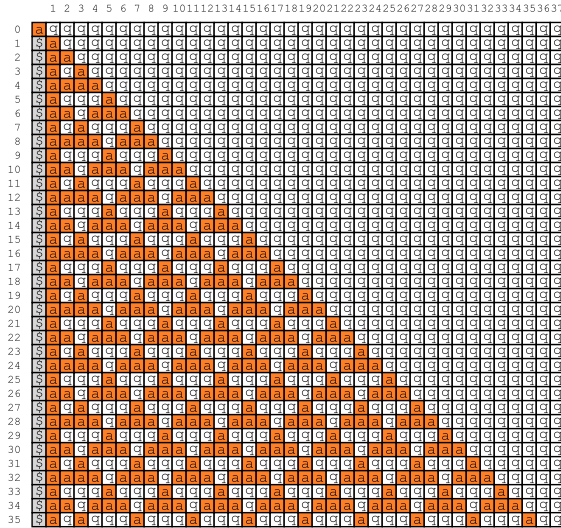
Transition Rule No. 125, Initial Configuration 1



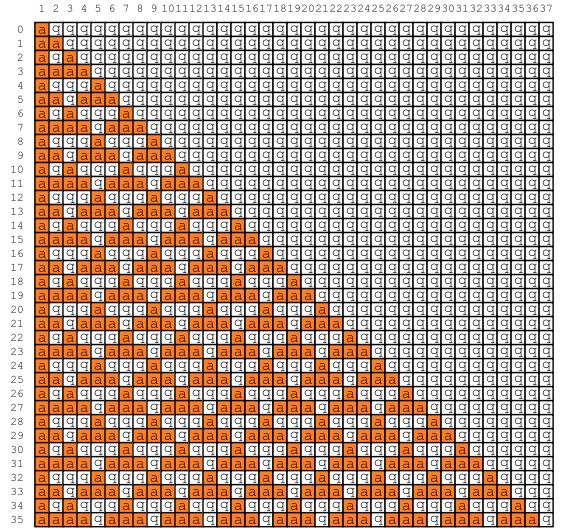
Transition Rule No. 125, Initial Configuration 2



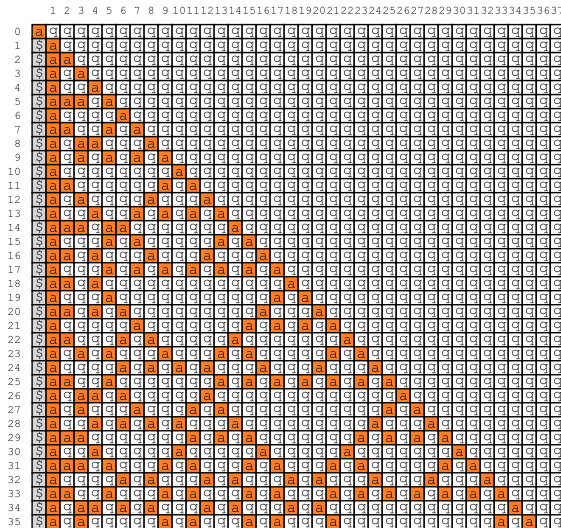
Transition Rule No. 126, Initial Configuration 1



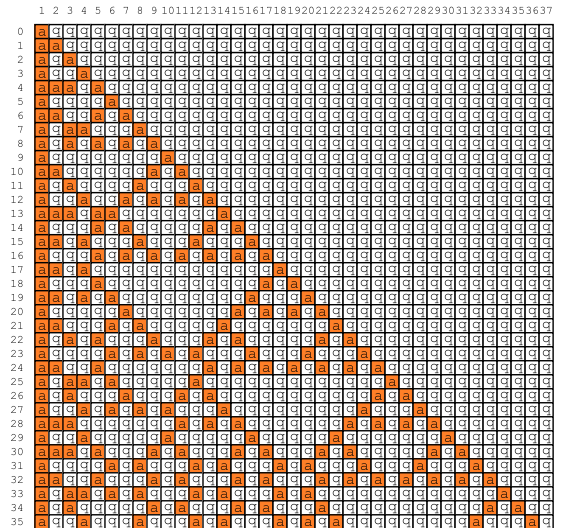
Transition Rule No. 126, Initial Configuration 2



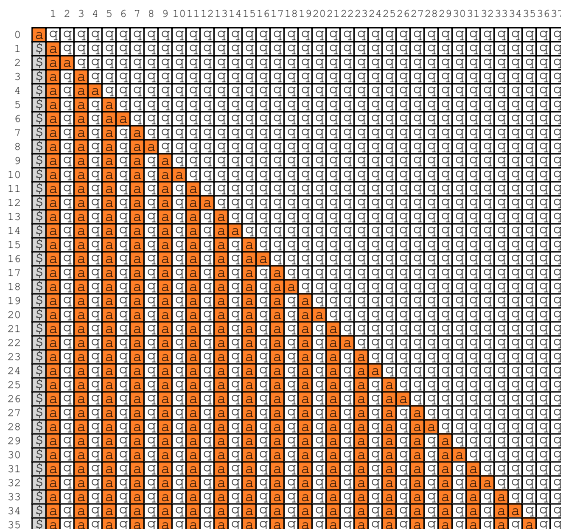
Transition Rule No. 127, Initial Configuration 1



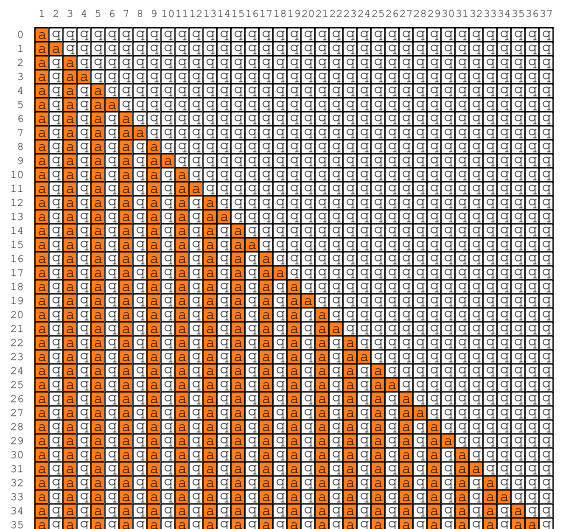
Transition Rule No. 127, Initial Configuration 2



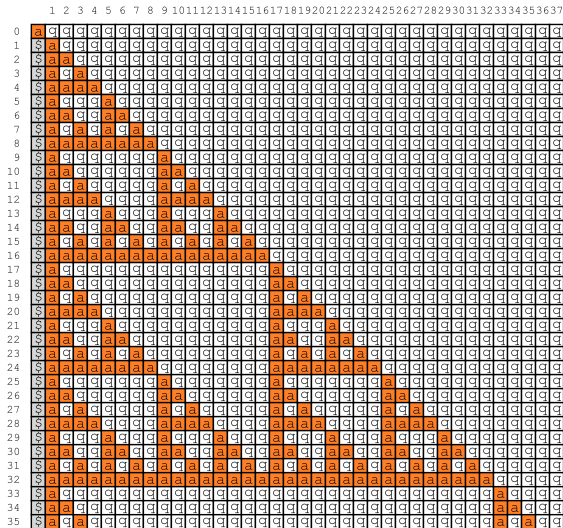
Transition Rule No. 128, Initial Configuration 1



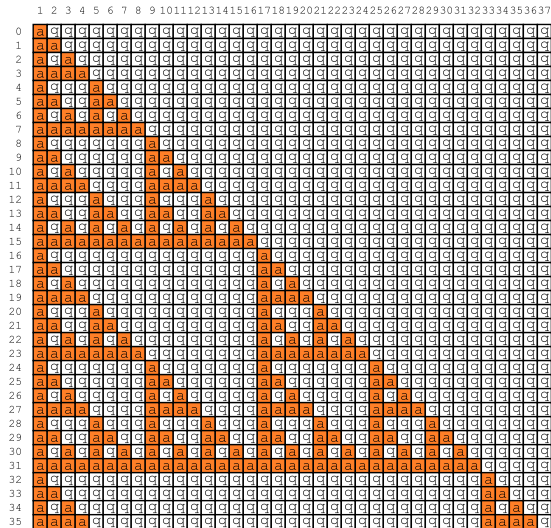
Transition Rule No. 128, Initial Configuration 2



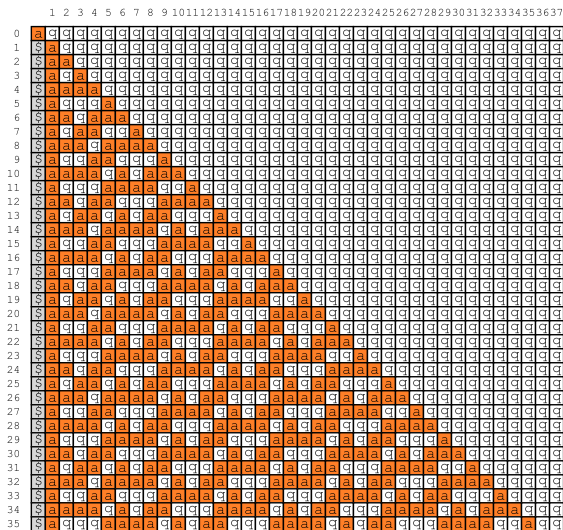
Transition Rule No. 129, Initial Configuration 1



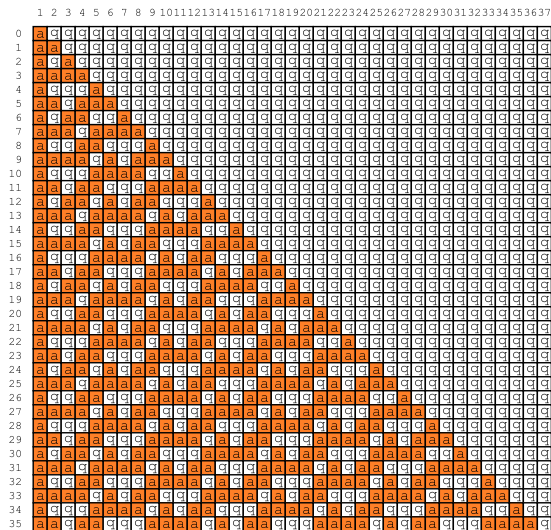
Transition Rule No. 129, Initial Configuration 2



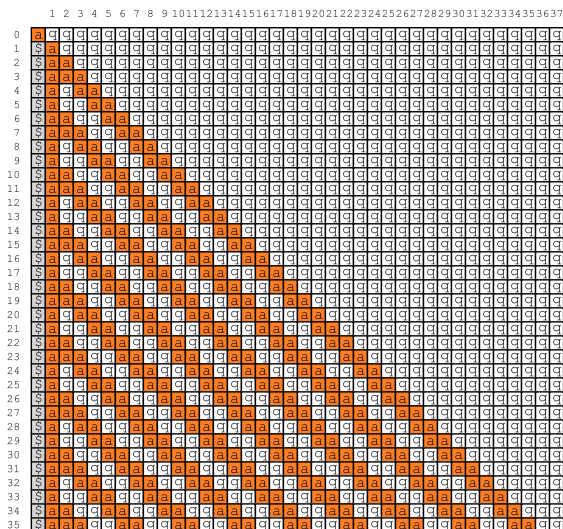
Transition Rule No. 130, Initial Configuration 1



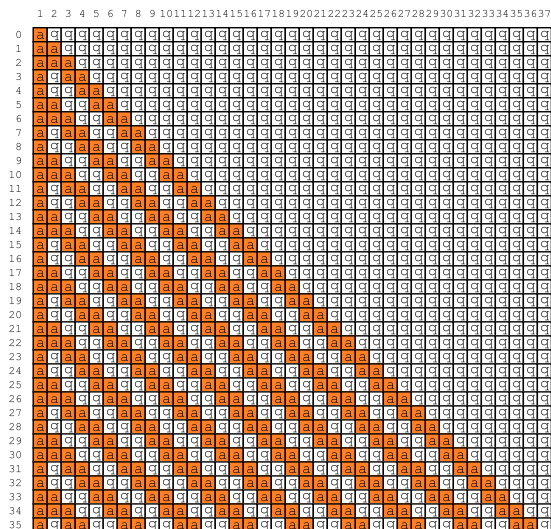
Transition Rule No. 130, Initial Configuration 2



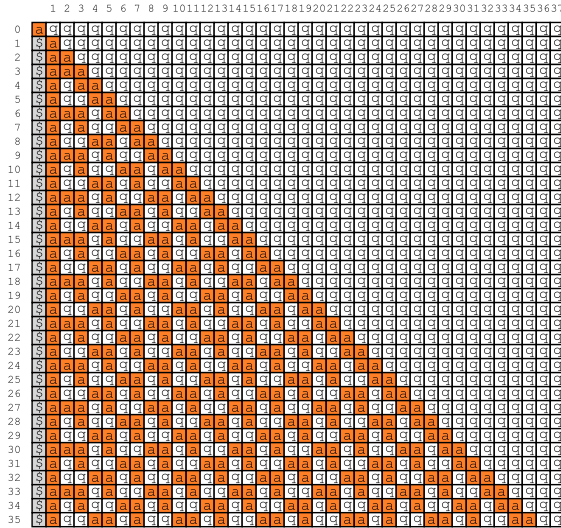
Transition Rule No. 131, Initial Configuration 1



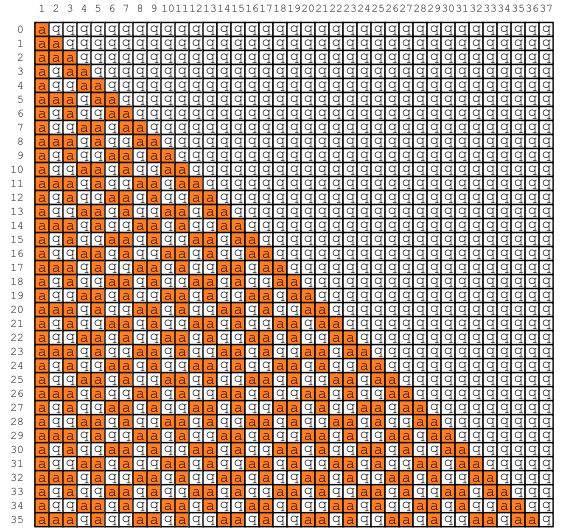
Transition Rule No. 131, Initial Configuration 2



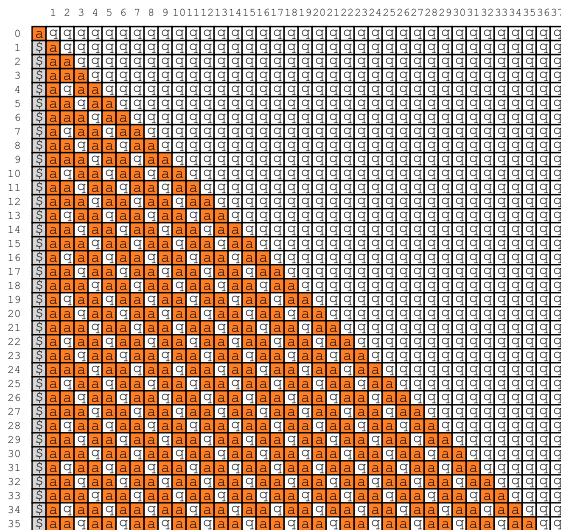
Transition Rule No. 132, Initial Configuration 1



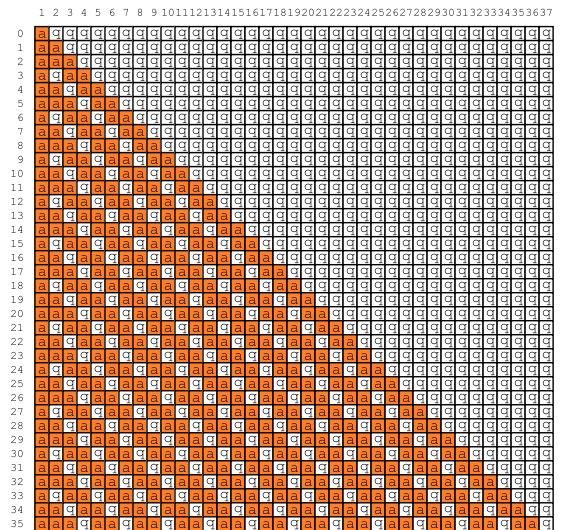
Transition Rule No. 132, Initial Configuration 2



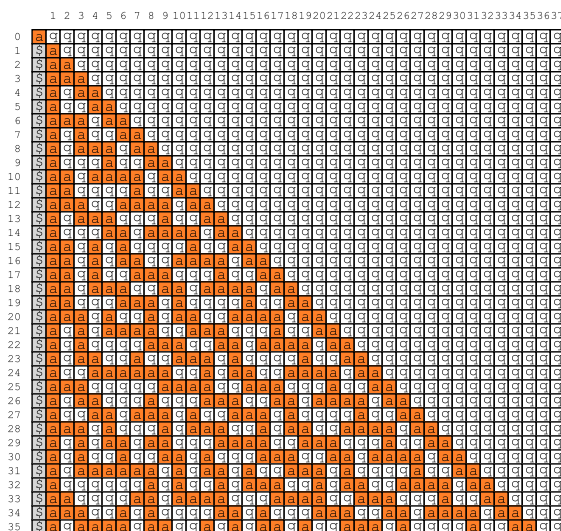
Transition Rule No. 133, Initial Configuration 1



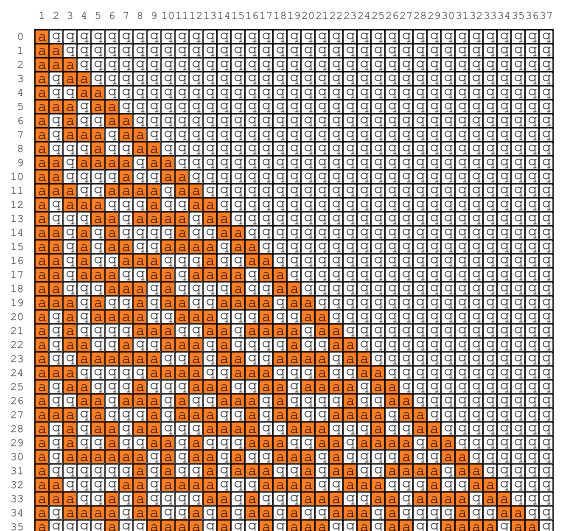
Transition Rule No. 133, Initial Configuration 2



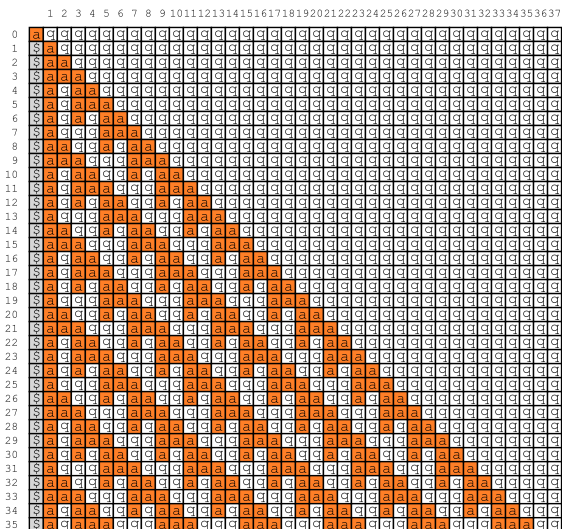
Transition Rule No. 134, Initial Configuration 1



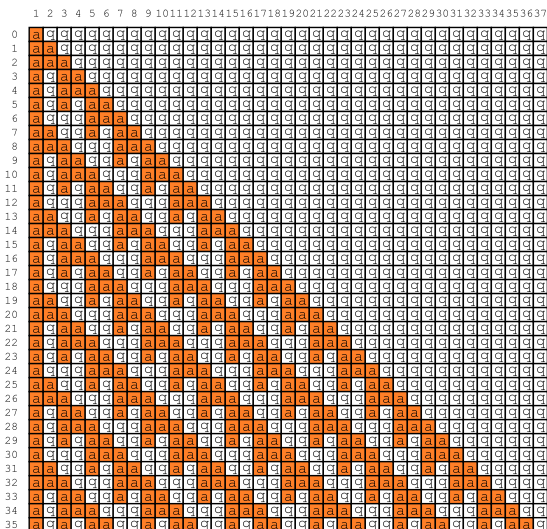
Transition Rule No. 134, Initial Configuration 2



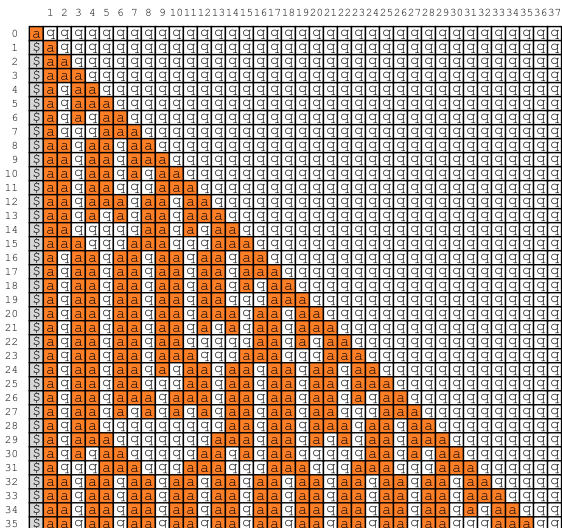
Transition Rule No. 135, Initial Configuration 1



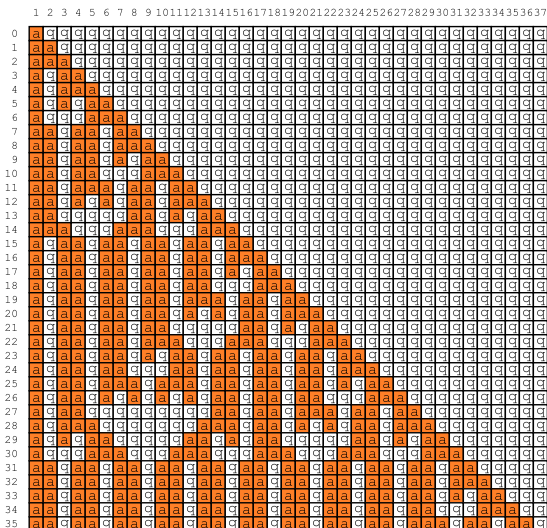
Transition Rule No. 135, Initial Configuration 2



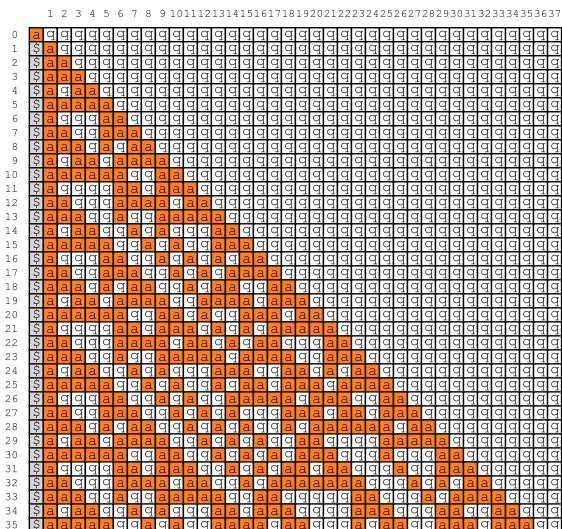
Transition Rule No. 136, Initial Configuration 1



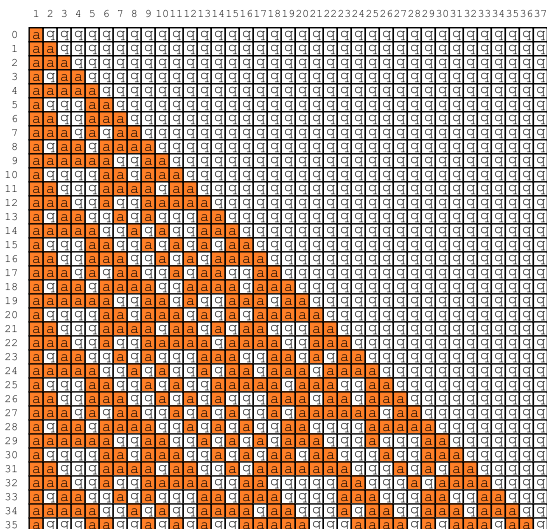
Transition Rule No. 136, Initial Configuration 2



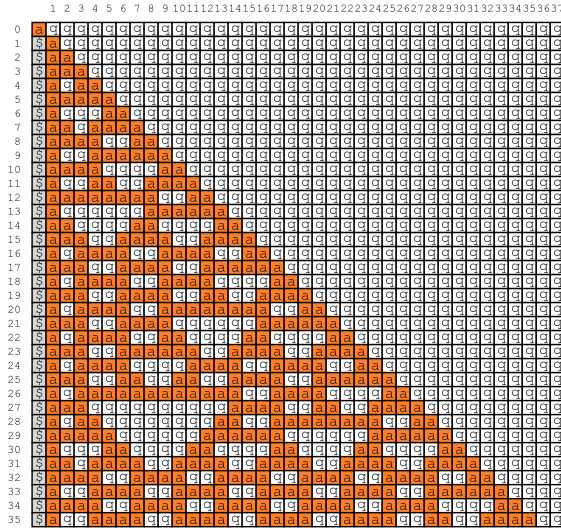
Transition Rule No. 137, Initial Configuration 1



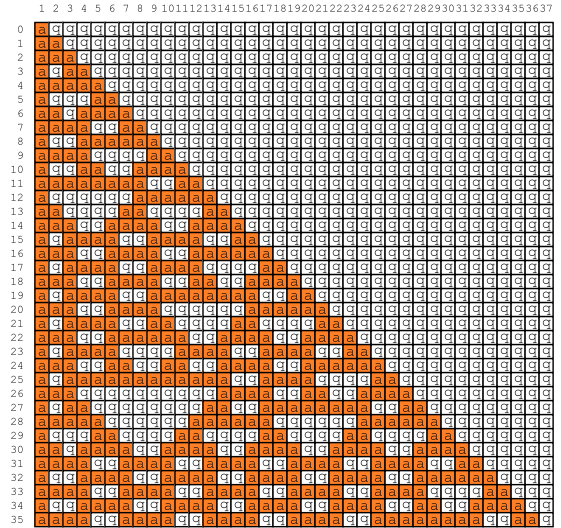
Transition Rule No. 137, Initial Configuration 2



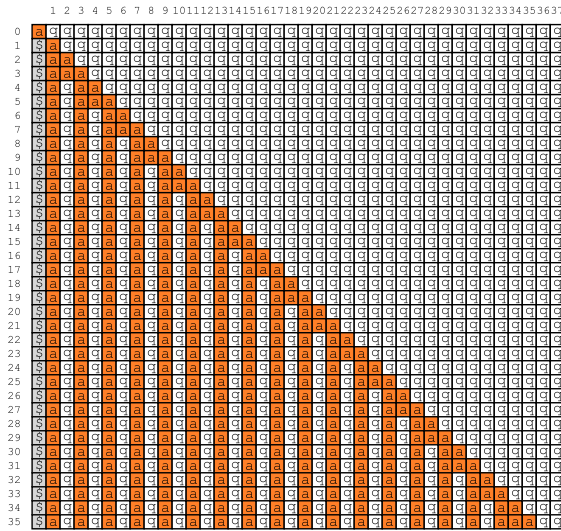
Transition Rule No. 138, Initial Configuration 1



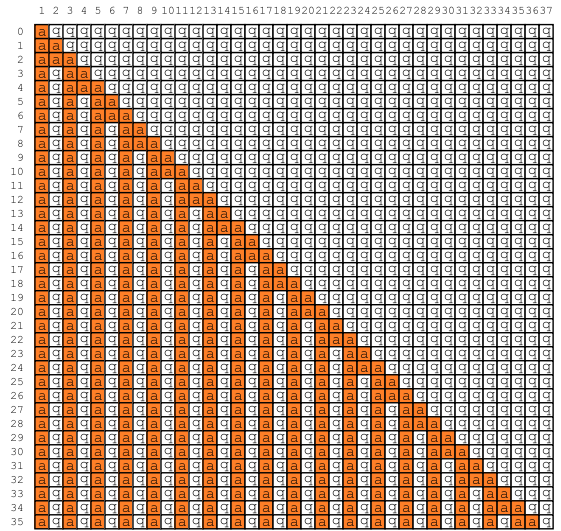
Transition Rule No. 138, Initial Configuration 2



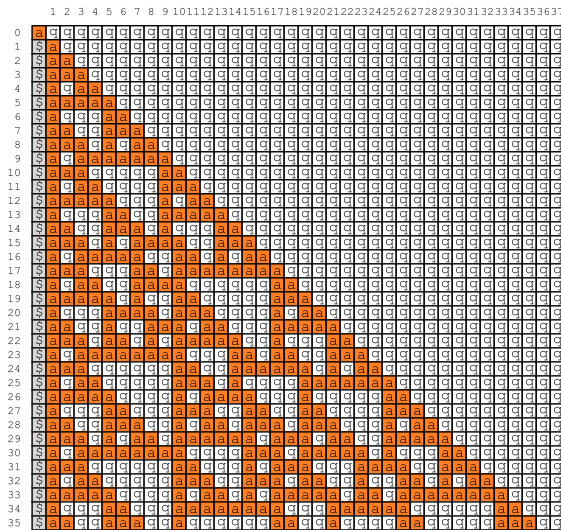
Transition Rule No. 139, Initial Configuration 1



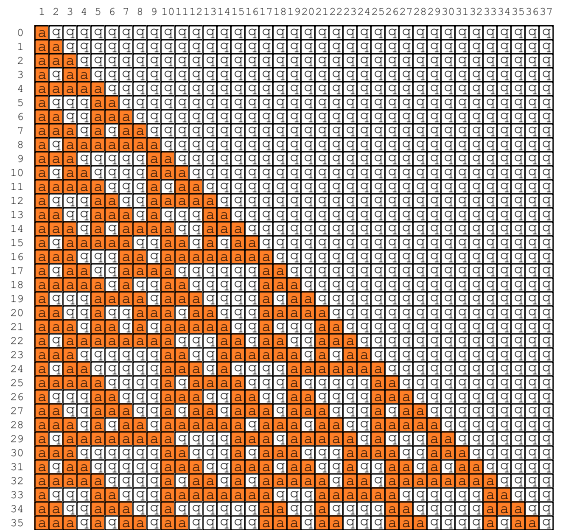
Transition Rule No. 139, Initial Configuration 2



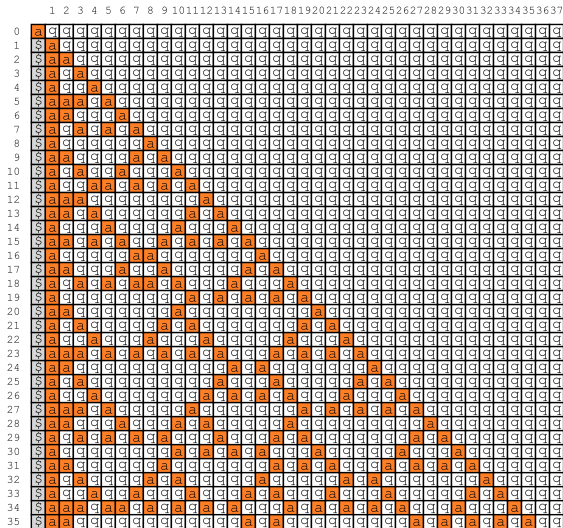
Transition Rule No. 140, Initial Configuration 1



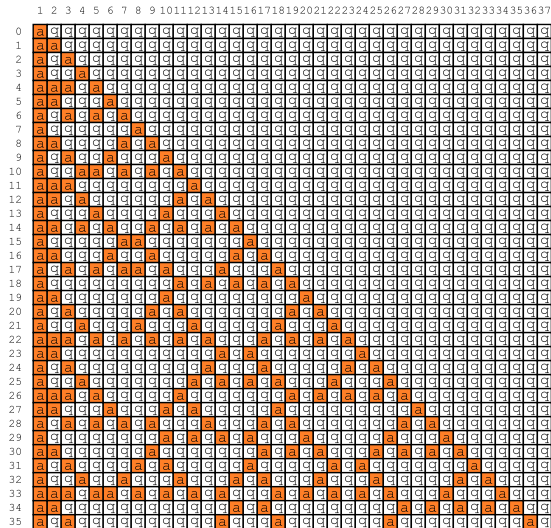
Transition Rule No. 140, Initial Configuration 2



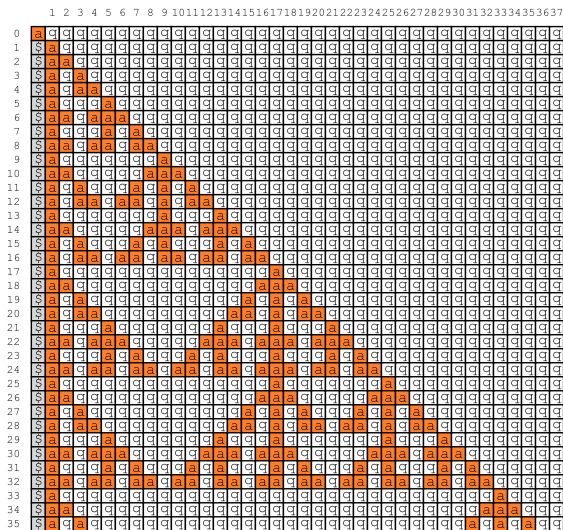
Transition Rule No. 141, Initial Configuration 1



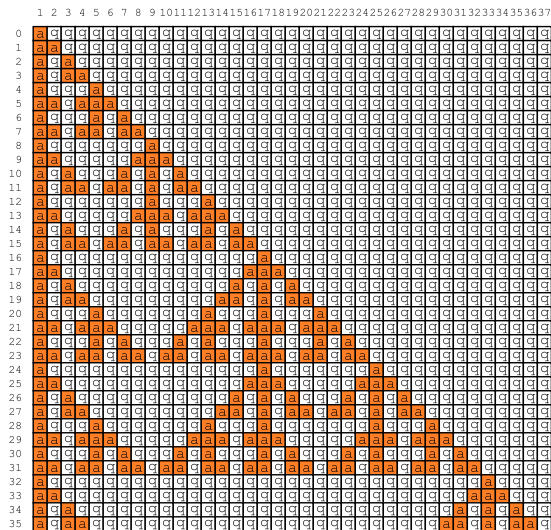
Transition Rule No. 141, Initial Configuration 2



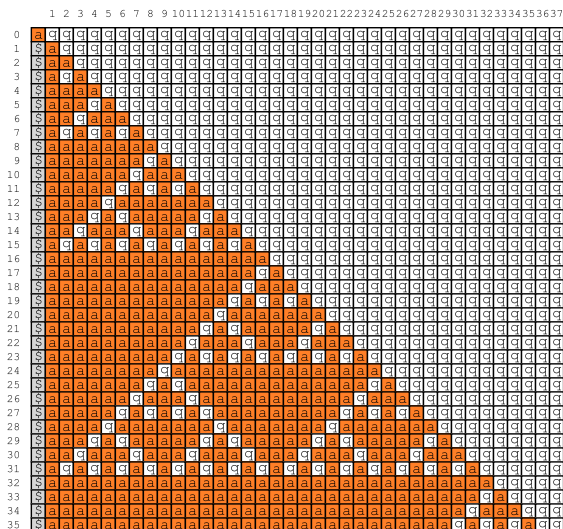
Transition Rule No. 142, Initial Configuration 1



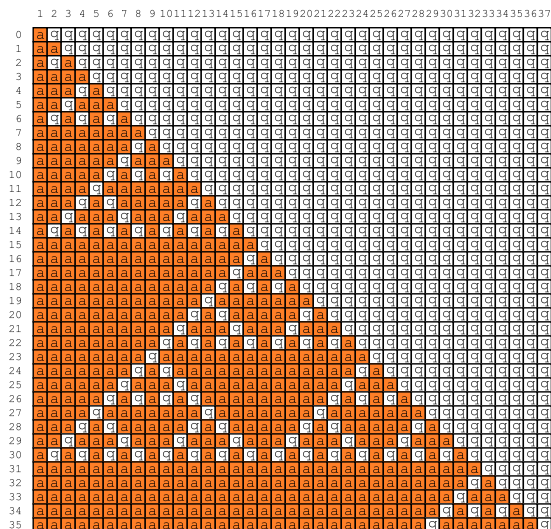
Transition Rule No. 142, Initial Configuration 2



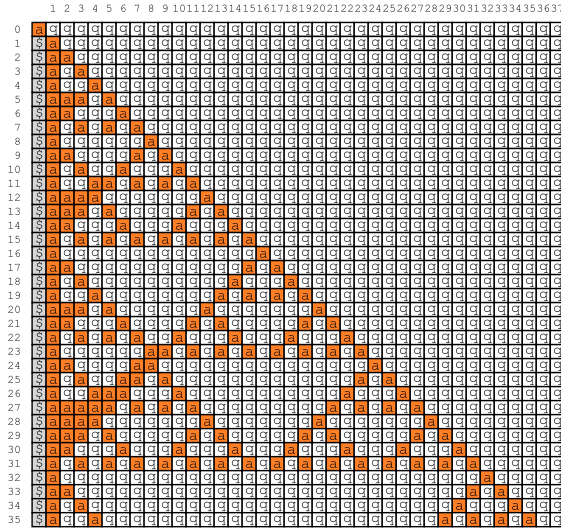
Transition Rule No. 143, Initial Configuration 1



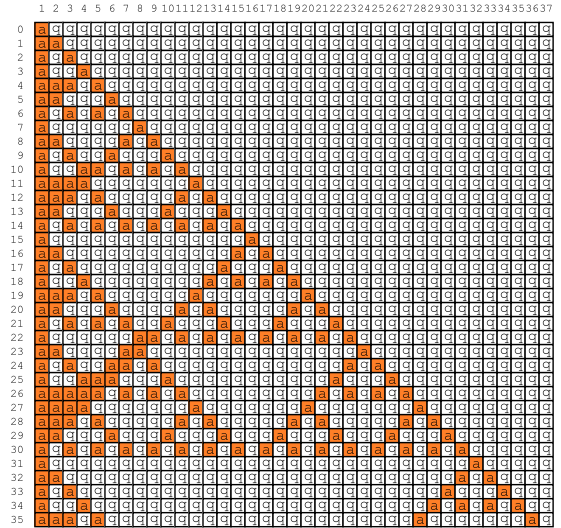
Transition Rule No. 143, Initial Configuration 2



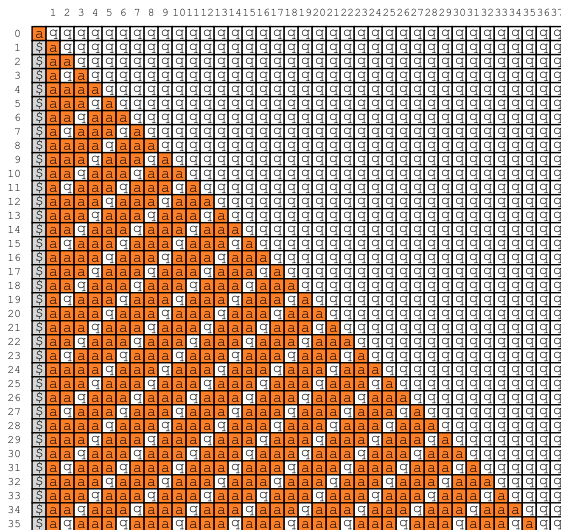
Transition Rule No. 144, Initial Configuration 1



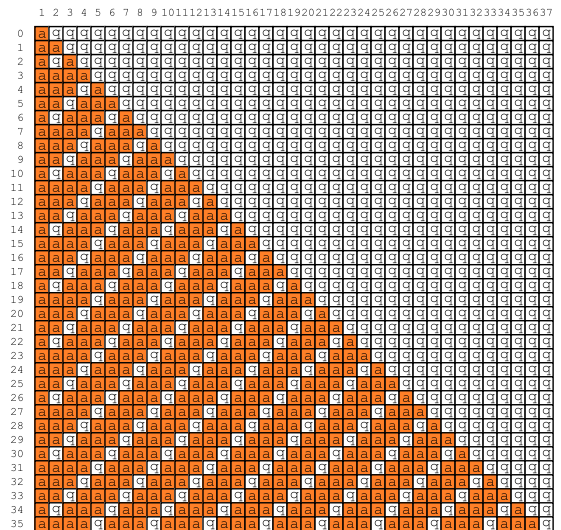
Transition Rule No. 144, Initial Configuration 2



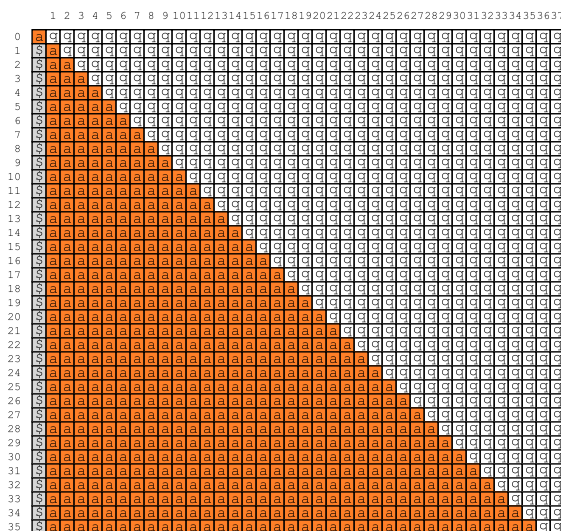
Transition Rule No. 145, Initial Configuration 1



Transition Rule No. 145, Initial Configuration 2



Transition Rule No. 146, Initial Configuration 1



Transition Rule No. 146, Initial Configuration 2

