

1 次元接続有限状態セルオートマトン上で動作する 1 階線形回帰数列生成アルゴリズムについての考察

A Note on Sequence Generation Algorithm for First-order Linear Recurrence Sequence on One-dimensional Finite-state Cellular Automata

上川 直紀 *

Naoki Kamikawa*

Abstract

A model of cellular automata (CA) is considered to be a well-studied non-linear model of complex systems in which an infinite one-dimensional array of finite state machines (cells) updates itself in a synchronous manner according to a uniform local rule. A sequence generation problem on the CA model has been studied for a long time and a lot of generation algorithms has been proposed for a variety of non-regular sequences such as $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, prime, and Fibonacci sequences, etc. In this paper, we propose a real-time generation algorithm for first-order linear recurrence sequence on the CA.

1 はじめに

セルオートマトン (Cellular Automaton, 以下では CA と略す.) は生物固有の能力である自己増殖, 自己複製機能を形式的に記述するモデルとして, J. von Neumann [10] により考案された並列計算モデルであり, 現在では, 複雑系などの多くの分野で研究がなされている. CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され, セルは自らと, 隣接するセルの内部状態という局所的な情報を元に, 自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない. この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし, CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ. CA は生命現象の知られざる秘密を探りたいという目的で提案され, 発展し, 現在では, 複雑系などの多くの分野で研究がなされている. CA の応用例として脇田, 清水, 玉城, 北 [13] らの交通流のシミュレーションが挙げられる.

CA の研究課題の 1 つとして, 実時間数列生成問題が挙げられる. Wolfram [14], Shackleford et al. [12], Pazo-Roblesa and Fuster-Sabaterb [11] らは 2 状態の CA による乱数生成器について考察を行なった. これらの研究では, 1 次元の 2 状態 CA のパターンにより 2 進数を表現し, 時間経過により生成される乱数列について言及した. 一方, 有沢 [1], Korec [9], Kamikawa and Umeo [2, 4, 5] らは上記の研究とは異なり, 1 次元 CA の左端のセルの内部状態で数列を表現する形式で, CA 上の数列生成問題について考察を行った. 有沢 [1] は CA 上の素数列, Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムを, Korec [9] は素数列の生成アルゴリズムを明らかにした. 有沢 [1] が明らかにしたアルゴリズムは, 最適となる数列生成時間に対して 2 倍の生成時間が必要となる 2 線形時間生成アルゴリズムであり, Korec [9] が明らかにしたアルゴリズムは, 生成時間について最適となる実時間生成アルゴリズムである. Kamikawa and Umeo [4, 5] は有沢 [1] のアルゴリズムを発展させ, CA 上の Fibonacci 数列, 数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを設計し, その正当性について明らかにした. また,

* 大阪電気通信大学 情報学研究所事務室

Kamikawa and Umeo [4], 上川, 梅尾 [6] は特定の数列生成アルゴリズムについて考察を行うのではなく, 1 状態および 2 状態の CA で生成可能な数列を明らかにした. これらの研究では, CA の計算能力について考察が行われており, 有限状態数の CA で生成 (計算) 可能である多くの数列が明らかにされている. 素数列, Fibonacci 数列, 冪乗数列等の数列は, 自然現象, 社会現象, 生命現象, 経済現象などに頻繁に出現することが知られており, CA 上の数列生成アルゴリズムは, これらの様々な現象のシミュレーションやモデリングに利用可能であると考ええる.

本研究では, b_1, c_1 を $b_1 \geq 2, c_1 \geq 2$ となる自然数とした場合, $a_n = b_1 \cdot a_{n-1}, a_1 = c_1$ としてあらわされる 1 階線形回帰数列を生成する 1 次元接続 CA 上のアルゴリズムについて考察を行う. CA 上の線形回帰数列生成アルゴリズムについては, Kamikawa and Umeo [3] が言及しているが, Kamikawa and Umeo [3] が示したのは, アルゴリズム設計のアウトラインのみである. 上川, 梅尾 [8] は $b_1 = c_1$ の場合, すなわち, $\{c_1^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ として表される冪乗数列の生成アルゴリズムについて考察を行い, すべての c_1 の場合の冪乗数列 $\{c_1^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が有限状態の 1 次元接続 CA で生成可能であることを示した. 本稿では, Kamikawa and Umeo [3], 上川, 梅尾 [8] の研究を発展させ, すべての b_1, c_1 の場合の 1 階線形回帰数列が有限状態の 1 次元接続 CA で生成可能であることを示す.

2 セルオートマトン上の数列生成問題

CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンの有限個のアレイで構成される. 図 1 参照.

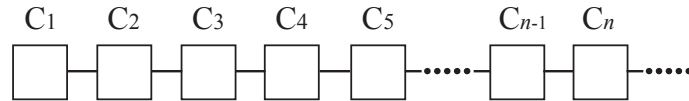


図 1 1 次元接続セルオートマトン

$n \geq 1$ とした場合, 左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ. 有限状態オートマトンは $A = (Q, \delta, c, a)$ と定式化され, Q, δ, c, a はそれぞれ以下の意味を持つ.

1. Q は内部状態の有限集合である.
2. δ は状態遷移関数であり, 次のように定義される.

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

この場合の状態遷移関数 $\delta(a, b, c) = d$ ($a, b, c, d \in Q$) は次の意味を持つ.

あるステップ t 時に, セル C_i の内部状態が b であり, セル C_{i-1} の内部状態が a , セル C_{i+1} の内部状態が c であると, 次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が d に遷移する.

左端のセル C_1 は左側からの入力として常に状態 $\$$ が入力される. $\$$ は外界を表す特殊な状態であり, セル C_1 の左側からの入力にのみ用いられる. また静止状態 $q (q \in Q)$ は隣接する左右のセルの状態が q の場合, q を維持し続けるという特徴を持つ. すなわち, 遷移規則 $\delta(q, q, q) = q, \delta(\$, q, q) = q$ が定義される.

3. 状態 $c (c \in Q)$ は初期計算状況時にセル C_1 がとる状態である.
4. 状態 $a (a \in Q)$ は数列生成に使用する状態である.

次に、セル空間を記述する記法を導入する． i, j, n を正の自然数， t を正の整数とし， $1 \leq n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j, t \geq 0$ とする．時刻 t 時のセル C_i の内部状態を s_i^t とし，時刻 t 時の n 個のセルからなるセル空間を以下の様に表す．

$$t : s_1^t \dots s_n^t$$

また，時刻 t 時にセル C_1 からセル C_{i-1} の $i-1$ 個のセル全ての内部状態が 0 ，セル C_i からセル C_j の $j-i+1$ 個のセル全ての内部状態が S ，セル C_{j+1} 以降のセル全ての内部状態が U の場合，以下の様にまとめて記述する．

$$t : \overbrace{0 \dots 0}^{[1, i-1]} \overbrace{S \dots S}^{[i, j]} \overbrace{U \dots U}^{[j+1, \dots]}$$

次にセル空間の 1 ステップの変化を表す演算記号 “ \Rightarrow ” を導入する．以下の様に， \Rightarrow の左右にセル空間の状態を記述した場合， \Rightarrow の左側のセル空間の状態が変化前の状態で，右側が 1 ステップ後のセル空間の状態となる．

$$t : \overbrace{0}^{[1]} \overbrace{SS \dots}^{[2, \dots]} \Rightarrow t+1 : \overbrace{00}^{[1, 2]} \overbrace{SS \dots}^{[3, \dots]}$$

また，遷移規則の簡略記法も導入する．遷移規則 $\delta(w, x, y) = z$ の場合，省略して $w \times y \rightarrow z$ と記述する．

初期計算状況，すなわち，時刻 $t=0$ 時のセル空間は以下に示す通り，セル C_1 の内部状態は c をとり， C_1 以外のセルの内部状態は静止状態 q をとる．

$$t=0 : \overbrace{c}^{[1]} \overbrace{q \dots}^{[2, \dots]}$$

r, n を自然数とし， $r \geq 1, n \geq 1$ とする． $\{t(n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とすると，すべての n について， $s_1^{r \cdot t(n)} = a$ ，すなわち， $t = r \cdot t(n)$ 時のみにセル C_1 の内部状態が a を取ると， $r \cdot$ 線形時間で，数列 $\{t(n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う．特に， $r = 1$ の時は数列生成時間について最適となり，実時間で数列 $\{t(n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う．

3 1 次元接続有限状態セルオートマトンによる 1 階線形回帰数列生成の実現

本項では 1 次元接続セルオートマトンを用いた 1 階線形回帰数列の生成について述べる． b_1, c_1 を自然数とし， $b_1 \geq 2, c_1 \geq 2$ とする．生成する 1 階線形回帰数列を a_n とすると， a_n は以下の漸化式として表すことができる．

$$a_n = b_1 \cdot a_{n-1}, \quad a_1 = c_1$$

本稿では，Kamikawa and Umeo[3]，上川，梅尾 [8] の数列生成アルゴリズムを発展させ，すべての b_1, c_1 について，数列 a_n の実時間生成を実現する．

3.1 実時間 1 階線形回帰数列生成アルゴリズム

ℓ を自然数とし, $\ell \geq 1$ とする. 1 階線形回帰数列の実時間生成の実現について, 次に示す 5 つの場合に分けて考える.

- $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$
- $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$
- $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$
- $b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$
- $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$

M_{b_1, c_1} を有限状態 CA とし, $M_{b_1, c_1} = (Q_{b_1, c_1}, \delta_{b_1, c_1}, c, a)$ とする. M_{b_1, c_1} が数列 a_n を生成するとき, 有限状態集合 Q_{b_1, c_1} は以下の通り定める.

$$Q_{b_1, c_1} = \begin{cases} \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}\} & (b_1 = 2, c_1 = 2\ell) \\ \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, \overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{b_1-2}}^{b_1-2}\} & (b_1 > 2, c_1 = 2\ell) \\ \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, f\} & (b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1) \\ \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, \overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{b_1-2}}^{b_1-2}, \overbrace{o_1, o_2, \dots, o_{b_1-2}}^{b_1-2}, f\} & (b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1) \\ \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, \overbrace{o_1, o_2, \dots, o_{b_1-2}}^{b_1-2}, f\} & (b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1) \end{cases}$$

$$|Q_{b_1, c_1}| = \begin{cases} c_1 + 3 & (b_1 = 2, c_1 = 2\ell) \\ b_1 + c_1 + 1 & (b_1 > 2, c_1 = 2\ell) \\ c_1 + 4 & (b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1) \\ 2b_1 + c_1 & (b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1) \\ b_1 + c_1 + 2 & (b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1) \end{cases}$$

• $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合: 最初に $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合を考える. まず, $b_1 = 2, c_1 = 2$ として, 数列生成アルゴリズムの実現の上で重要となる時間-空間図と状態の伝播による波について説明を行う. $b_1 = 2, c_1 = 2$ の場合, 生成する数列は $a_n = 2^n$ となり, a_n は以下の漸化式で表すことができる.

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

この場合, 有限状態集合 $Q_{2,2}$ は $Q_{2,2} = \{q, a, b, c, d_1\}$ となる. 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ は図 2 に示す状態遷移規則集合により生成される.

表の最初の行 (列) はそれぞれ, 右 (左) 側に隣接するセルの状態を示し, 表内のそれぞれのエントリーは 1 ステップ後のセルの内部状態を示す. エントリーの無い入力については遷移規則は定義されておらず, 使用されることはない. 図 2 に示す状態遷移規則集合により, $M_{2,2}$ の各セルは図 3 に示す様に遷移する.

図 3 の横軸はセル空間であり, 左端から C_1, C_2, C_3, \dots , それぞれの内部状態を表す. 縦軸は時間軸であ

図 2 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための状態遷移規則集合

q		Right State				
Left State	q	a	b	c	d ₁	
	q	q	q	c		
	a	q				
	b	q				
	c	a				
	d ₁					
	\$	q	q	a		

a		Right State				
Left State	q	a	b	c	d ₁	
	q			q	q	
	a					
	b					
	c	b				
	d ₁	b				
	\$			q	q	

b		Right State				
Left State	q	a	b	c	d ₁	
	q	c				
	a	c				
	b	c				
	c	c				
	d ₁					
	\$					

c		Right State				
Left State	q	a	b	c	d ₁	
	q	c			c	
	a		a		a	
	b					
	c	c	c	c	c	
	d ₁					
	\$	d ₁				

d ₁		Right State				
Left State	q	a	b	c	d ₁	
	q					
	a					
	b					
	c					
	d ₁					
	\$		a			

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	c	q	q	q	q	q	q	q	q	q
1	d ₁	a	q	q	q	q	q	q	q	q
2	a	b	q	q	q	q	q	q	q	q
3	q	c	q	q	q	q	q	q	q	q
4	a	c	a	q	q	q	q	q	q	q
5	q	a	b	q	q	q	q	q	q	q
6	q	q	c	q	q	q	q	q	q	q
7	q	c	c	a	q	q	q	q	q	q
8	a	c	c	b	q	q	q	q	q	q
9	q	a	c	c	q	q	q	q	q	q
10	q	q	a	c	a	q	q	q	q	q
11	q	q	q	a	b	q	q	q	q	q
12	q	q	q	q	c	q	q	q	q	q
13	q	q	q	c	c	a	q	q	q	q
14	q	q	c	c	c	b	q	q	q	q
15	q	c	c	c	c	c	q	q	q	q
16	a	c	c	c	c	a	q	q	q	q
17	q	a	c	c	c	c	b	q	q	q
18	q	q	a	c	c	c	c	q	q	q
19	q	q	q	a	c	c	c	a	q	q
20	q	q	q	q	a	c	c	b	q	q
21	q	q	q	q	q	a	c	c	q	q
22	q	q	q	q	q	q	a	c	a	q
23	q	q	q	q	q	q	q	a	b	q
24	q	q	q	q	q	q	q	q	c	q

図 3 時刻 $t = 24$ までのシミュレーション状況

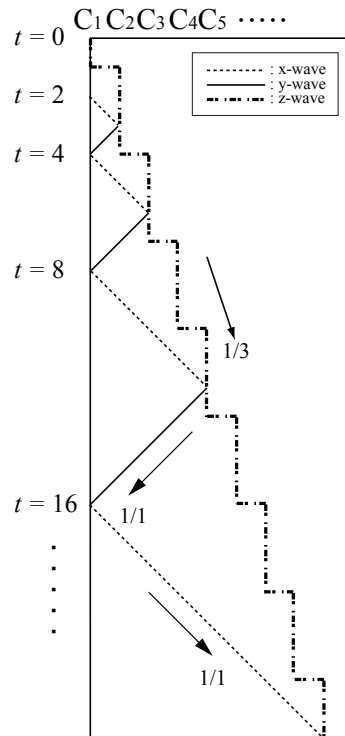


図 4 数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間-空間図

り，上端を時刻 $t = 0$ として，下方向に向かって時間の経過を表す．図 3 より，内部状態がセル空間を伝播していることが見て取れる．このセル空間上の状態の伝播を波と呼ぶ．CA のアルゴリズムは，状態の伝播を波として表現し，時間-空間図を用いて幾何学的に設計を行う．図 4 に数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムの時間-空間図を示す．

時間-空間図の横軸はセル空間，縦軸は時刻を表し，時間-空間図は時間の経過におけるセル空間の変化を表す．時間-空間図に示す線はセル空間上の波を示す．数列 $\{2^n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成には 3 種類の波，x 波，y 波，z 波を用いる．図 4 参照．

時刻 $t = 0$ 時に、セル C_1 上で z 波が生成され、3 ステップにつき 1 ステップだけ右方向に進む。すなわち、 z 波の速さは $1/3$ となる。時刻 $t = 2$ 時に、セル C_1 の内部状態が a に遷移し、セル C_1 上で x 波が生成され、 $1/1$ の速さで右方向に進む。 x 波がセル空間上を右方向に進み、 z 波と衝突する。この時、 z 波は右方向に進み続け、 x 波は消滅し、衝突したセル上で y 波が生成され、 $1/1$ の速さで左方向に進む。時刻 $t = 4$ 時、 y 波がセル C_1 に到達すると、 y 波が消滅し、 x 波が生成され、セル C_1 の内部状態が a に遷移する。このように、 x 波、 y 波をセル C_1 と z 波間を往復運動させ、 y 波がセル C_1 に到達した時刻にセル C_1 の内部状態が a に遷移する。セル C_1 の内部状態が a となる時刻は、 $t = 2, 4, 8, \dots, 2^n$ 時となる。

ここからは、 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ として考える。 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合、有限状態集合は $Q_{b_1, c_1} = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{2\ell-1}}^{2\ell-1}\}$ となる。 m を任意の自然数とし、 $m \geq 2$ とする。時刻 $t = 0$ 時に、セル C_1 上で z 波が生成され、時刻 $t = m$ 時にセル C_1 の内部状態が a をとり、セル C_1 上で x 波が生成されたとした時、 z 波と x 波の衝突により生成された y 波がセル C_1 に到達する時刻を考える。ここでは、 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ であるので、 m が偶数の場合を考える。 N を自然数の集合とし、 $P_z(t) : N \cup \{0\} \rightarrow N$ を時刻 t 時に z 波の存在するセルの位置を表す関数とすると、 $P_z(t) = \lceil \frac{t}{3} \rceil + 1, t \geq 0$ となる。 p を $p \geq 1$ となる自然数とし、時刻 $t = m + p$ 時に z 波と x 波はセル $C_{P_z(m+p)}$ 上で衝突したとする。図 5 参照。

x 波は 1 ステップにつき 1 セルだけ伝播する波、すなわち、速さ $1/1$ の波であるので、時刻 $t = m + p$ 時にセル C_{p+1} に存在する。よって、 $P_z(m+p) = p+1$ となり、 $p = \frac{m}{2}$ となる。以上より、 m が偶数の場合、 z 波と x 波は時刻 $t = m + \frac{m}{2}$ 時にセル $C_{\frac{m}{2}+1}$ で衝突する。 y 波の速さも $1/1$ であるので、時刻 $t = m + \frac{m}{2}$ から $\frac{m}{2}$ ステップ後、すなわち、時刻 $t = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{2} = 2m$ 時に y 波はセル C_1 に到達し、セル C_1 の内部状態は a に遷移する。また、状態 $\overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{2\ell-1}}^{2\ell-1}$ については、 a_1 の生成の実現、すなわち、セル C_1 を最初に状態 a に遷移させるために用いる。時刻 $t = 0$ にセル C_1 の内部状態は c をとり、1 ステップごとに $d_1, d_2, \dots, d_{2\ell-1}$ に遷移し、時刻 $t = 2\ell$ 時にセル C_1 は状態 a に遷移する。この様に、セル C_1 - z 波間の x 波、 y 波の往復運動により、 $t = 2\ell, 2 \cdot 2\ell, 4 \cdot 2\ell, 8 \cdot 2\ell, \dots$ 時にセル C_1 の内部状態が a となり、 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ とする 1 階線形回帰数列が実時間で生成される。図 6 に $b_1 = 2, c_1 = 2$ の場合の、図 7 に $b_1 = 2, c_1 = 6$ の場合のシミュレーション結果を示す。

• $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合: 次に、 $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合を考える。この場合、有限状態集合は $Q_{b_1, c_1} = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, \overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{b_1-2}}^{b_1-2}\}$ となる。図 8 に $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合の時間-空間図を示す。

$b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合は、 x 波、 y 波、 z 波に加え、その場に留まり続ける速さ 0 の波である w_e 波を使用する。 x 波、 y 波、 z 波の伝播については、 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合と同一であるが、異なるのは、 z 波と x 波が衝突した際に、衝突したセル上に w_e 波を生成し、セル C_1 - w_e 波間に $b_1 - 1$ 回の往復運動を行う x 波、 y 波を生成する点である。 s を任意の自然数とし、 $s \geq 1$ とする。時刻 $t = 0$ 時にセル C_1 上で z 波が生成され、時刻 $t = a_s$ 時にセル C_1 の内部状態が a をとり、 x 波が生成されたとすると、 w 波はセル $C_{\frac{a_s}{2}+1}$ 上に生成される。セル C_1 -セル $C_{\frac{a_s}{2}+1}$ 間を速さ $1/1$ の波が 1 往復するには a_s ステップ必要である。以上より、 $t = a_s$ 時にセル C_1 で生成された x 波により始まる $b_1 - 1$ 回の往復運動により、 $t = a_s + \overbrace{a_s + a_s + \dots + a_s}^{b_1-1} = b_1 \cdot a_s$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移する。また、 w_e 波は $b_1 - 1$ 回目の往復運動の際に消滅する。 $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合の内部状態集合は、 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合の内部状態集合に対して、内部状態 $\overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{b_1-2}}^{b_1-2}$ が追加となっている。これらの状態は、 $b_1 - 1$ 回の往復運動を実現するために用いられる。1 回目の往復運動には状態 a, e_1 が、2 回目の往復運動には状態 b, e_2 が、 \dots , $b_1 - 2$ 回目の往復運動には状態 b, e_{b_1-2} が、 $b_1 - 1$

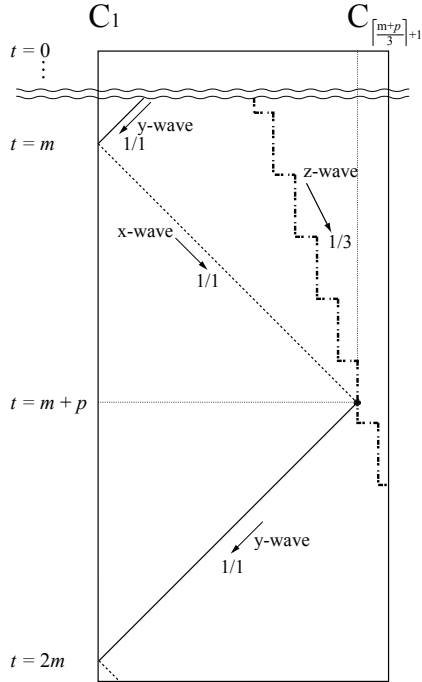


図5 z波とx波の衝突 (m が偶数の場合)

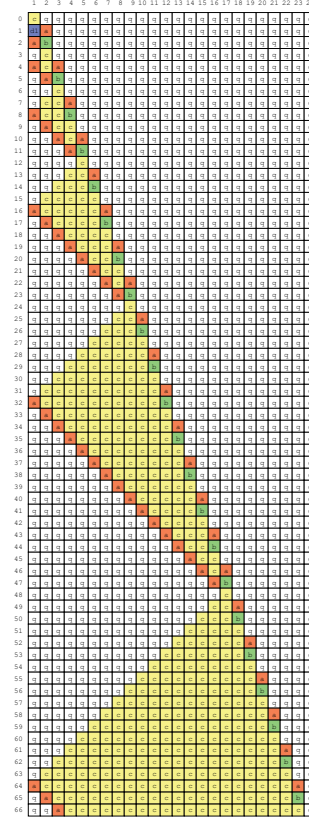


図6 $b_1 = 2, c_1 = 2$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

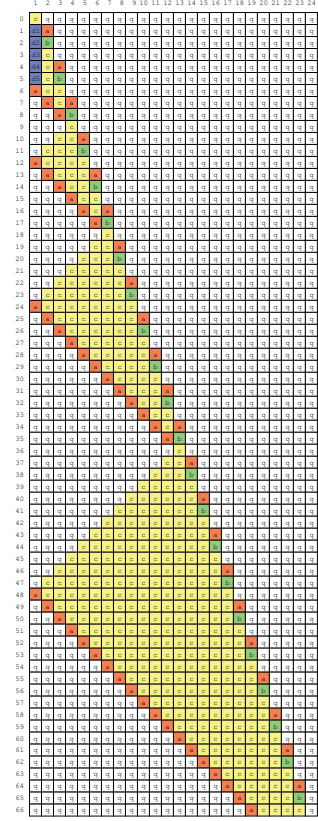


図7 $b_1 = 2, c_1 = 6$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

回目の往復運動には状態 b, c がそれぞれ用いられる．以上より, $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合も 1 階線形回帰数列が実時間で生成される．例として, 図 9 に $b_1 = 3, c_1 = 4$ の場合の, 図 10 に $b_1 = 6, c_1 = 6$ の場合のシミュレーション結果を示す．

• $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合: 次に, $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合を考える．この場合, 有限状態集合は $Q_{b_1, c_1} = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, f\}$ となる．図 11 に $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合の時間-空間図を示す．

この場合も, $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合と同様に, セル C_1 -z 波間の x 波, y 波の往復運動を行うことで, 1 階線形回帰数列の生成を実現する．しかしながら, $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合と比較して, x 波と z 波が衝突するセルの位置が異なり, また, y 波がセル C_1 に到達して x 波を生成するまで 1 ステップの遅延が発生する．

時刻 $t = m + p$ 時に z 波と x 波はセル $C_{P_z(m+p)}$ 上で衝突したとする．図 12 参照． $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合, m は奇数となるので, $P_z(m+p) = \lceil \frac{m+p}{3} \rceil + 1 = p+1$ より, $p = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \frac{m-1}{2}$ となる．以上より, m が奇数の場合, z 波と x 波は時刻 $t = m + \frac{m-1}{2}$ 時にセル $C_{\frac{m-1}{2}+1}$ で衝突し, セル $C_{\frac{m-1}{2}+1}$ で生成された速さ $1/1$ の y 波は時刻 $t = m + \frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{2} = 2m - 1$ 時にセル C_1 に到達する．到達した 1 ステップ後である時刻 $t = 2m$ 時に x 波を生成する．この場合, a_2 以降は偶数となるので, a_2 以降の生成は $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合と同様となる．例として, 図 13 に $b_1 = 2, c_1 = 5$ の場合のシミュレーション結果を示す．

• $b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合: 次に, $b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合を考える．この場合, 有限状態集合は

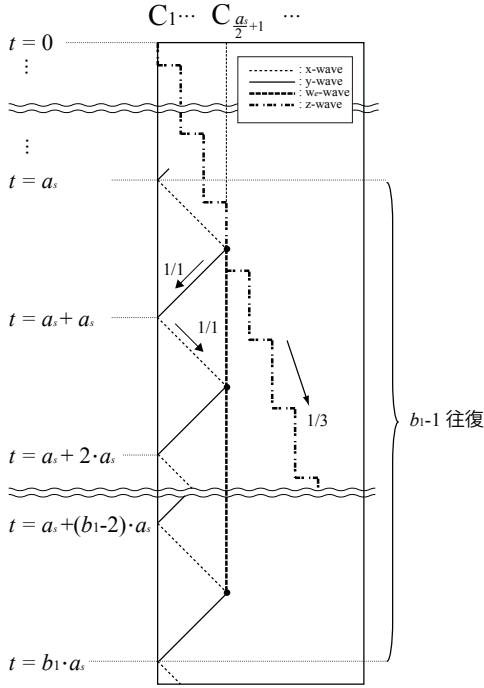


図8 $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合の時間-空間図

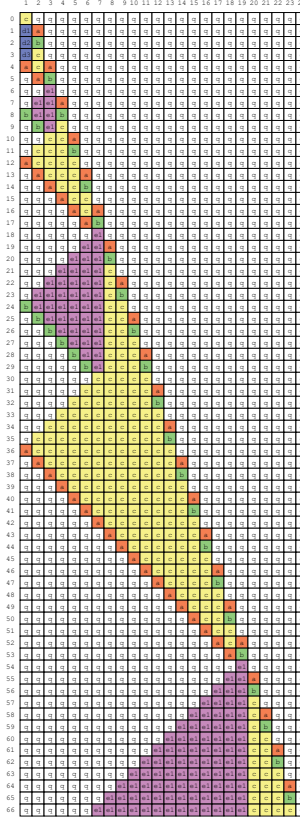


図9 $b_1 = 3, c_1 = 4$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

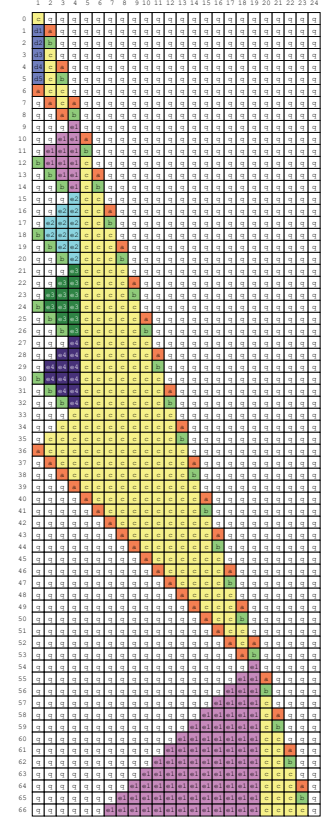


図10 $b_1 = 6, c_1 = 6$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

$Q_{b_1, c_1} = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, \overbrace{e_1, e_2, \dots, e_{b_1-2}}^{b_1-2}, \overbrace{o_1, o_2, \dots, o_{b_1-2}}^{b_1-2}, f\}$ となる. 図14に $b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合の時間-空間図を示す.

$b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合は, z波とx波が衝突した際に, 衝突したセル $C_{\frac{m-1}{2}+1}$ 上に w_o 波を生成し, セル C_1-w_o 波間に $b_1 - 1$ 回の往復運動を行うx波, y波を生成する. セル C_1-w_o 波間の際, y波がセル C_1 に到達してx波を生成するまで1ステップの遅延が発生する. また, この場合も a_2 以降は偶数となるので, a_2 以降の生成は $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合と同様となる. $b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合の内部状態集合は, $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合の内部状態集合に対して, 内部状態 $\overbrace{o_1, o_2, \dots, o_{b_1-2}}^{b_1-2}, f$ が追加となっている. これらの状態は, a_2 を生成するための $b_1 - 1$ 回の往復運動を実現するために用いられる. 1回目の往復運動には状態 a, o_1 が, 2回目の往復運動には状態 b, o_2 が, ..., $b_1 - 2$ 回目の往復運動には状態 b, o_{b_1-2} が, $b_1 - 1$ 回目の往復運動には状態 b, f がそれぞれ用いられる. 以上より, $b_1 = 2\ell + 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合も1階線形回帰数列が実時間で生成される. 例として, 図15に $b_1 = 4, c_1 = 3$ の場合のシミュレーション結果を示す.

• $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合: 最後に, $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合を考える. この場合, 有限状態集合は $Q_{b_1, c_1} = \{q, a, b, c, \overbrace{d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}}^{c_1-1}, \overbrace{o_1, o_2, \dots, o_{b_1-2}}^{b_1-2}, f\}$ となる. 図16に $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合の時間-空間図を示す.

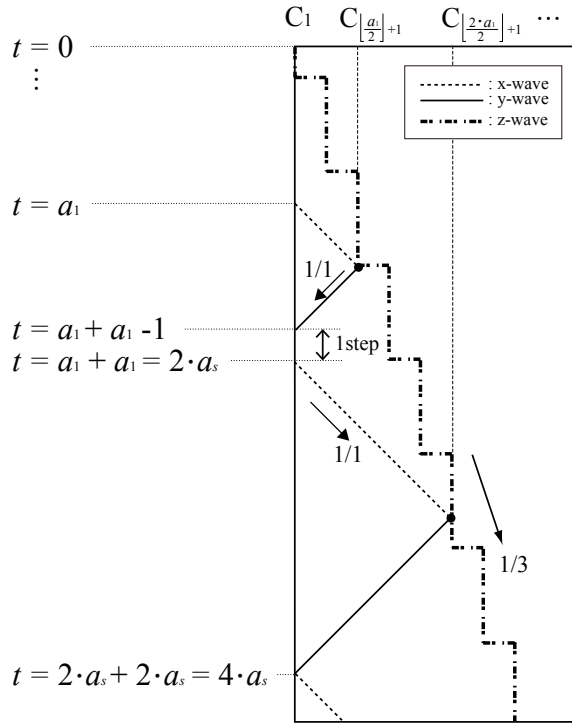


図 11 $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合の時間-空間図

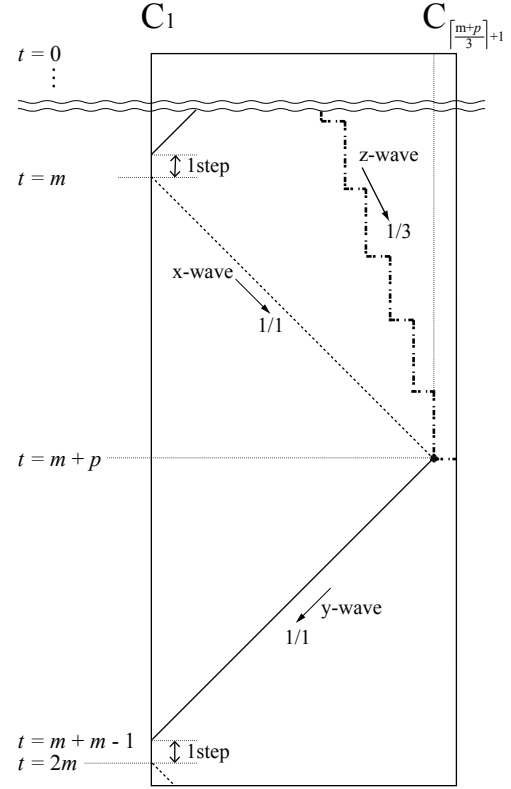


図 12 z 波と x 波の衝突 (m が奇数の場合)

この場合も、z 波と x 波が衝突した際に、衝突したセル $C_{\frac{m-1}{2}+1}$ 上に w_o 波を生成し、セル C_1-w_o 波間に $b_1 - 1$ 回の往復運動を行う x 波、y 波を生成する。セル C_1-w_o 波間の際、y 波がセル C_1 に到達して x 波を生成するまで 1 ステップの遅延が発生する。また、 $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合は、生成する数列 a_n は必ず奇数となるので、内部状態 $\overbrace{o_1, o_2, \dots, o_{b_1-2}}^{b_1-2}$, f を用いた x 波、y 波の往復運動のみが行われる。以上より、 $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合も 1 階線形回帰数列が実時間で生成される。例として、図 17 に $b_1 = 3, c_1 = 5$ の場合の、図 18 に $b_1 = 5, c_1 = 3$ の場合のシミュレーション結果を示す。

3.2 実時間 1 階線形回帰数列生成アルゴリズムの正当性の証明

次に、実時間 1 階線形回帰数列生成アルゴリズムの正当性について形式的に証明を行う。 $t = 0$ 時、 M_{b_1, c_1} は以下に示す初期計算状況をとる。

$$t = 0 : \underbrace{[1]}_c \underbrace{[2, \dots]}_{q \dots}$$

図 19 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_z により、3 ステップにつき 1 セル、右方向に状態 a, b, c が伝播する。この伝播を z 波と呼ぶ。

時刻 t 時に z 波はセル $C_{P_z(t)}$ 上に存在する。その時のセル $C_{P_z(t)}$ の内部状態 $\mathbf{s}_{P_z(t)}^t$ は以下の通りとなる。

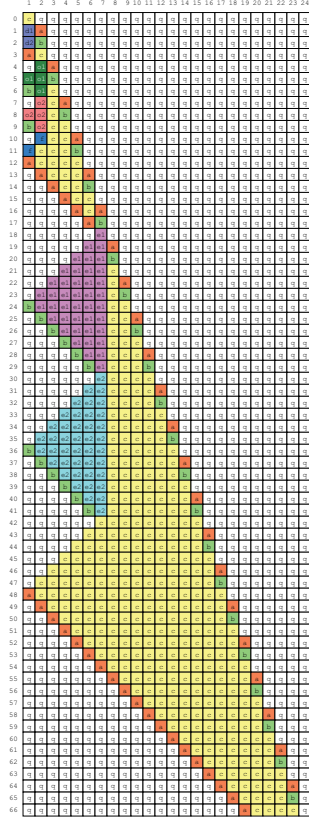


図 15 $b_1 = 4, c_1 = 3$ の場合のシミュレーション結果 (時刻 $t = 66$ まで)

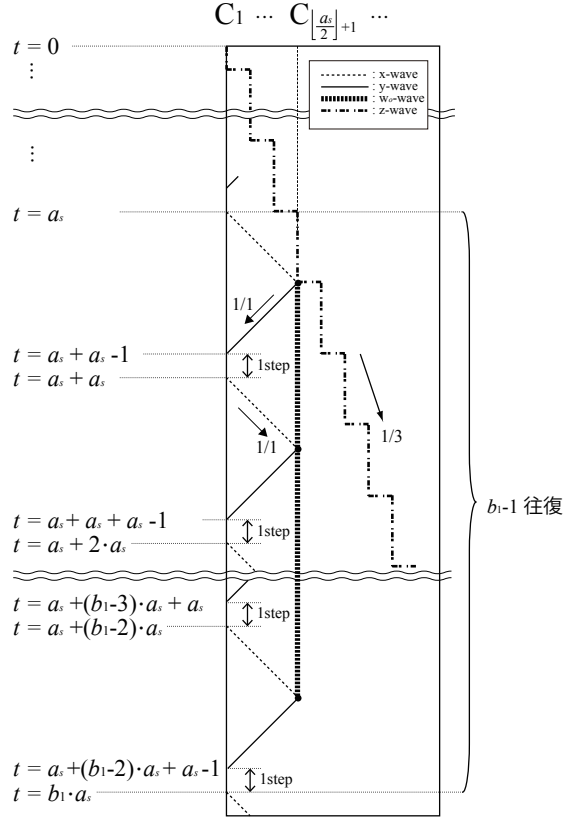


図 16 $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合の時間-空間図

証明

(I) 最初に, $i = 1$ の場合を考える. 時刻 $t = 0 \sim c_1$ の M_{b_1, c_1} の遷移は内部状態のみで実現する. 使用する遷移規則は c_1 により定まり, 遷移規則集合 \mathcal{R}_{B, c_1} として与えられる. 図 20 に $c_1 = 2$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, 2}$ を, 図 21 に $c_1 = 3$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, 3}$ を, 図 22 に $c_1 = 4$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, 4}$ を, 図 23 に $c_1 = 5$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, 5}$ を, 図 24 に $c_1 = 6$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, 6}$ を, 図 25 に $c_1 = 7$ の場合に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, 7}$ を示す. $c_1 \geq 8$ の場合の遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, k}$ については, v を $v \geq 8$ となる自然数とすると, 図 26 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B, v}$ ($v \geq 8$) として与えられる. 図 27 に $c_1 = 2 \sim 7$ それぞれ場合の M_{b_1, c_1} の遷移を示す.

時刻 $t = 0$ にセル C_1 の内部状態は c をとり, 1 ステップごとに $d_1, d_2, \dots, d_{c_1-1}$ に遷移し, 時刻 $t = c_1$ 時にセル C_1 は状態 a に遷移する. セル C_2 より右側のセルでは, z 波が生成され, セル C_1 の状態にかかわらず, z 波は右方向に進み続ける. また, z 波が通過したセルの内部状態は c となり, x 波が通過するまで内部状態 c を維持し続ける.

(II) j を任意の自然数とし, $j \geq 1$ とする. $i = j$ の場合, 時刻 $t = c_1 \cdot b_1^{j-1}$ 時に, M_{b_1, c_1} が以下に示す状態を取ると仮定する.

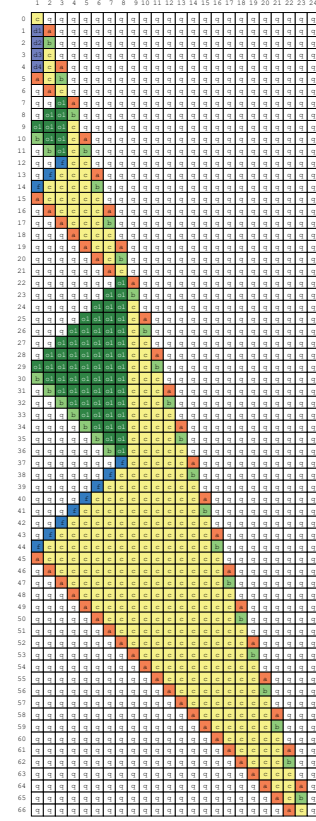


図 17 $b_1 = 3, c_1 = 5$ の場合
のシミュレーション結果 (時
刻 $t = 66$ まで)

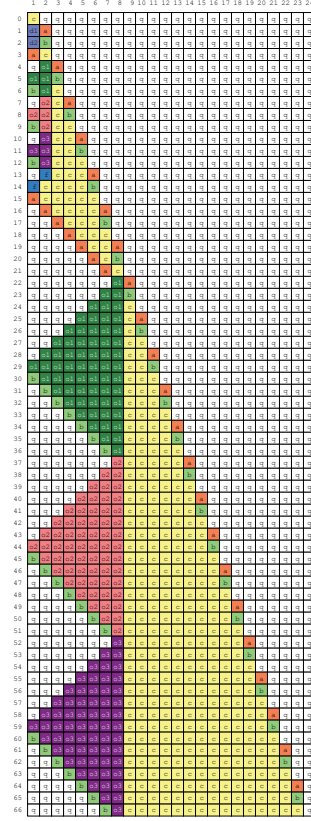


図 18 $b_1 = 5, c_1 = 3$ の場合
のシミュレーション結果 (時
刻 $t = 66$ まで)

図 19 z 波の伝播に使用する遷移規則集合 \mathcal{R}_z

$c \ q \ q \rightarrow a; \quad q \ a \ q \rightarrow b; \quad q \ b \ q \rightarrow c; \quad q \ c \ q \rightarrow c; \quad c \ a \ q \rightarrow b; \quad c \ b \ q \rightarrow c;$ $c \ c \ q \rightarrow c; \quad c \ c \ c \rightarrow c;$
--

図 20 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B,2}$

$q \ q \ q \rightarrow q; \quad a \ q \ q \rightarrow q; \quad c \ q \ q \rightarrow a; \quad d_1 \ a \ q \rightarrow b; \quad \$ \ c \ q \rightarrow d_1; \quad \$ \ d_1 \ a \rightarrow a;$

図 21 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B,3}$

$q \ q \ q \rightarrow q; \quad a \ q \ q \rightarrow q; \quad b \ q \ q \rightarrow q; \quad c \ q \ q \rightarrow a; \quad d_1 \ a \ q \rightarrow b; \quad d_2 \ b \ q \rightarrow c;$ $\$ \ c \ q \rightarrow d_1; \quad \$ \ d_1 \ a \rightarrow d_2; \quad \$ \ d_2 \ b \rightarrow a;$
--

$$t = c_1 \cdot b_1^{j-1} : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

ここでは, $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合, $b_1 = 2, c_1 = 2\ell + 1$ の場合, $b_1 > 2, c_1 = 2\ell$ の場合, $b_1 = 2\ell + 1, c_1 = 2\ell + 1$ の場合に分けて考える.

図 22 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B.4}$

$q q q \rightarrow q;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$	$d_1 a q \rightarrow b;$	$d_2 b q \rightarrow c;$
$d_3 c q \rightarrow c;$	$\$ c q \rightarrow d_1;$	$\$ d_1 a \rightarrow d_2;$	$\$ d_2 b \rightarrow d_3;$	$\$ d_3 c \rightarrow a;$	

図 23 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B.5}$

$q q q \rightarrow q;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$	$d_1 a q \rightarrow b;$
$d_2 b q \rightarrow c;$	$d_3 c q \rightarrow c;$	$d_4 c a \rightarrow c;$	$\$ c q \rightarrow d_1;$	$\$ d_1 a \rightarrow d_2;$	$\$ d_2 b \rightarrow d_3;$
$\$ d_3 c \rightarrow d_4;$	$\$ d_4 c \rightarrow a;$				

図 24 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B.6}$

$q q q \rightarrow q;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$	$d_1 a q \rightarrow b;$
$c b q \rightarrow c;$	$d_2 b q \rightarrow c;$	$d_3 c q \rightarrow c;$	$d_4 c a \rightarrow c;$	$d_5 c b \rightarrow c;$	$\$ c q \rightarrow d_1;$
$\$ d_1 a \rightarrow d_2;$	$\$ d_2 b \rightarrow d_3;$	$\$ d_3 c \rightarrow d_4;$	$\$ d_4 c \rightarrow d_5;$	$\$ d_5 c \rightarrow a;$	

図 25 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B.7}$

$q q q \rightarrow q;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$	$d_1 a q \rightarrow b;$
$c b q \rightarrow c;$	$d_2 b q \rightarrow c;$	$c c q \rightarrow c;$	$d_3 c q \rightarrow c;$	$d_4 c a \rightarrow c;$	$d_6 c c \rightarrow c;$
$d_5 c b \rightarrow c;$	$\$ c q \rightarrow d_1;$	$\$ d_1 a \rightarrow d_2;$	$\$ d_2 b \rightarrow d_3;$	$\$ d_3 c \rightarrow d_4;$	$\$ d_4 c \rightarrow d_5;$
$\$ d_5 c \rightarrow d_6;$	$\$ d_6 c \rightarrow a;$				

図 26 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{B.v} (v \geq 8)$

$q q q \rightarrow q;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$	$c b q \rightarrow c;$
$c c q \rightarrow c;$					
$d_1 a q \rightarrow b;$			$\$ c q \rightarrow d_1;$		
$d_2 b q \rightarrow c;$			$\$ d_1 a \rightarrow d_2;$		
$d_3 c q \rightarrow c;$			$\$ d_2 b \rightarrow d_3;$		
\vdots			$\$ d_3 c \rightarrow d_4;$		
$d_{v-2} c q \rightarrow c;$			$\$ d_4 c \rightarrow d_5;$		
$d_{v-1} c c \rightarrow c;$			\vdots		
			$\$ d_{v-2} c \rightarrow d_{v-1};$		
			$\$ d_{v-1} c \rightarrow a$		

- $b_1 = 2, c_1 = 2\ell$ の場合 :

この場合, 図 28 に示す遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.E2}$ により, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} & : \overbrace{a}^{[1]} \overbrace{c \dots c}^{[2, P_z(c_1 \cdot 2^{j-1})-1]} \overbrace{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1})}^{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1})]} \overbrace{q \dots}^{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1})+1, \dots]} \\
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + 1 & : \overbrace{q}^{[1]} \overbrace{a}^{[2]} \overbrace{c \dots c}^{[3, P_z(c_1 \cdot 2^{j-1}+1)-1]} \overbrace{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + 1)}^{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1}+1)]} \overbrace{q \dots}^{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1}+1)+1, \dots]} \\
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + 2 & : \overbrace{qq}^{[1, 2]} \overbrace{a}^{[3]} \overbrace{c \dots c}^{[4, P_z(c_1 \cdot 2^{j-1}+2)-1]} \overbrace{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + 2)}^{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1}+2)]} \overbrace{q \dots}^{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1}+2)+1, \dots]}
 \end{aligned}$$

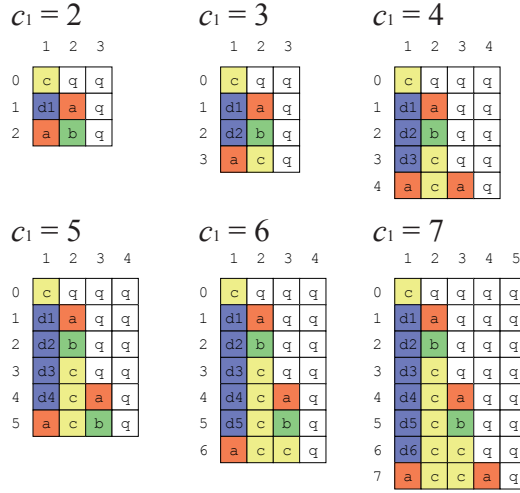


図 27 時刻 $t = c_1$ までの M_{b_1, c_1} の遷移

図 28 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I, E2}$

$q \ c \ q \rightarrow c;$	$\$ \ a \ b \rightarrow q;$	$\$ \ a \ c \rightarrow q;$	$q \ c \ c \rightarrow c;$	$\$ \ q \ q \rightarrow q;$	$\$ \ q \ a \rightarrow q;$
$\$ \ q \ c \rightarrow a;$	$q \ a \ b \rightarrow q;$	$q \ a \ c \rightarrow q;$	$q \ q \ q \rightarrow q;$	$q \ q \ a \rightarrow q;$	$q \ q \ c \rightarrow c;$
$a \ c \ a \rightarrow a;$	$a \ c \ c \rightarrow a;$	$a \ b \ q \rightarrow c;$	$a \ q \ q \rightarrow q;$	$b \ q \ q \rightarrow q;$	$c \ c \ q \rightarrow c;$
$c \ c \ a \rightarrow c;$	$c \ c \ b \rightarrow c;$	$c \ c \ c \rightarrow c;$	$c \ b \ q \rightarrow c;$	$c \ a \ q \rightarrow b;$	$c \ q \ q \rightarrow a;$

1 ステップにつき 1 セル, 右方向に伝播している状態 a を x 波と呼ぶ. x 波が通過したセルは, y 波が到達するまで状態 q を維持し続ける. x 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2}$ 時にセル $C_{\frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1}$ で z 波に追いつき衝突する. 衝突後, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} & : \underbrace{q, \dots, q}_{[1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2}]} \underbrace{c}_{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1]} \underbrace{q \dots}_{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 2, \dots]} \\
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1 & : \underbrace{q, \dots, q}_{[1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} - 1]} \underbrace{cc}_{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2}, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1]} \underbrace{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1)}_{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1)]} \\
 & \quad \underbrace{q \dots}_{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1) + 1, \dots]} \\
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 2 & : \underbrace{q, \dots, q}_{[1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} - 2]} \underbrace{c, \dots, c}_{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} - 1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 1]} \underbrace{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 2)}_{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 2)]} \\
 & \quad \underbrace{q \dots}_{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + 2) + 1, \dots]}
 \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 c を y 波と呼ぶ. y 波が通過したセルは, 状態 c を維持し続ける. y 波はセル空間を左方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1}}{2} = c_1 \cdot 2^j$ 時にセル C_1 に到達し, M_{b_1, c_1} は以下の状態をとる.

図 29 遷移規則集合 \mathcal{R}_{LO2}

\$ a c \rightarrow q\$;	\$ q q \rightarrow q\$;	\$ q a \rightarrow q\$;	f c b \rightarrow c\$;	f c c \rightarrow c\$;	q a c \rightarrow q\$;
q q q \rightarrow q\$;	q q a \rightarrow q\$;	\$ q f \rightarrow f\$;	f a q \rightarrow b\$;	q q f \rightarrow f\$;	a c q \rightarrow f\$;
a c b \rightarrow a\$;	a c c \rightarrow a\$;	a q q \rightarrow q\$;	\$ f c \rightarrow a\$;	q f a \rightarrow c\$;	q f c \rightarrow c\$;
b q q \rightarrow q\$;	c c q \rightarrow c\$;	c c a \rightarrow c\$;	c c b \rightarrow c\$;	c c c \rightarrow c\$;	c b q \rightarrow c\$;
c a q \rightarrow b\$;	c q q \rightarrow a\$;				

$$t = c_1 \cdot 2^j : \quad \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, P_z(c_1 \cdot 2^j) - 1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^j)]}_{S_z(c_1 \cdot 2^j)} \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^j) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

• $b_1 = 2$, $c_1 = 2\ell + 1$ の場合 :

この場合, 図 29 に示す遷移規則集合 \mathcal{R}_{LO2} により, M_{b_1, c_1} は遷移を行う. x 波と z 波の衝突までは $b_1 = 2$, $c_1 = 2\ell$ の場合と同様に遷移を行い, x 波と z 波は時刻 $t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2}$ 時にセル $C_{\frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1}$ で衝突する. 衝突後, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} : & \quad \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2}]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1]}_f \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2}) + 2]}_{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1)} \\
 & \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1) + 3, \dots]}_{q \dots} \\
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1 : & \quad \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} - 1]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2}]}_f \quad \underbrace{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1]}_c \\
 & \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 2)]}_{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1)} \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1) + 3, \dots]}_{q \dots} \\
 t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 2 : & \quad \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} - 2]}_{q, \dots, q} \quad \underbrace{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} - 1]}_f \quad \underbrace{[\frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2}, \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 1]}_{cc} \\
 & \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 2)]}_{S_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 2)} \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 f を y 波と呼ぶ. y 波が通過したセルは, 状態 c を維持し続ける. y 波はセル空間を左方向に速さ 1/1 で進み, 時刻 $t = c_1 \cdot 2^{j-1} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} + \frac{c_1 \cdot 2^{j-1} - 1}{2} = c_1 \cdot 2^j - 1$ 時にセル C_1 に到達し, 1 ステップ後の $t = c_1 \cdot 2^j$ 時に M_{b_1, c_1} は以下の状態をとる.

$$t = c_1 \cdot 2^j : \quad \underbrace{[1]}_a \quad \underbrace{[2, P_z(c_1 \cdot 2^j) - 1]}_{c \dots c} \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^j)]}_{S_z(c_1 \cdot 2^j)} \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot 2^j) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

• $b_1 > 2$, $c_1 = 2\ell$ の場合 :

この場合, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{LEb_{1-1}}$, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{LEb_{1-2}}$, ..., 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{LEk \cdot b_{1-1}}$ を使用する. 図 30 に x 波, y 波の 1 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{LEb_{1-1}}$ を, 図 31 に u を $2 \leq u \leq k - 2$ となる

図 30 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.Eb_1-1}$

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q a \rightarrow q;$	$\$ q e_1 \rightarrow b;$	$q q q \rightarrow q;$	$q q a \rightarrow q;$	$q q e_1 \rightarrow e_1;$
$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$	$e_1 q q \rightarrow a;$	$\$ a c \rightarrow q;$	$q a b \rightarrow q;$
$q a c \rightarrow q;$	$c a q \rightarrow b;$	$e_1 a q \rightarrow b;$	$a b q \rightarrow e_1;$	$c b q \rightarrow c;$	$e_1 b q \rightarrow c;$
$a c a \rightarrow a;$	$a c c \rightarrow a;$	$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$	$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$
$e_1 c q \rightarrow c;$	$e_1 c a \rightarrow c;$	$e_1 c b \rightarrow c;$	$e_1 c c \rightarrow c;$	$q e_1 q \rightarrow e_1;$	$q e_1 e_1 \rightarrow e_1;$
$e_1 e_1 a \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 b \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 c \rightarrow e_1;$	$e_1 e_1 e_1 \rightarrow e_1;$		

図 31 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.Eb_1-u} (2 \leq u \leq k-2)$

$b e_{u-1} c \rightarrow e_u;$	$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$	$\$ b e_{u-1} \rightarrow q;$
$e_u c c \rightarrow c;$	$b e_{u-1} e_{u-1} \rightarrow b;$	$q q q \rightarrow q;$	$\$ q e_u \rightarrow b;$
$q q b \rightarrow q;$	$q b e_{u-1} \rightarrow q;$	$q q e_u \rightarrow e_u;$	$a q q \rightarrow q;$
$e_{u-1} e_{u-1} c \rightarrow e_{u-1};$	$e_{u-1} e_{u-1} e_{u-1} \rightarrow e_{u-1};$	$q e_u c \rightarrow e_u;$	$e_u e_u c \rightarrow e_u;$
$q e_u e_u \rightarrow e_u;$	$b q q \rightarrow q;$	$e_u e_u e_u \rightarrow e_u;$	$c c q \rightarrow c;$
$c c a \rightarrow c;$	$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$	$c b q \rightarrow c;$
$c a q \rightarrow b;$	$c q q \rightarrow a;$	$e_{u-1} c c \rightarrow c;$	

図 32 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.Eb_1-b_1-1}$

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$	$\$ q c \rightarrow a;$	$q q q \rightarrow q;$
$q q b \rightarrow q;$	$q q c \rightarrow c;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$
$c q q \rightarrow a;$	$c a q \rightarrow b;$	$\$ b e_{b_1-2} \rightarrow q;$	$q b e_{b_1-2} \rightarrow q;$
$c b q \rightarrow c;$	$q c c \rightarrow c;$	$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$
$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$	$e_{b_1-2} c c \rightarrow c;$	$b e_{b_1-2} c \rightarrow c;$
$b e_{b_1-2} e_{b_1-2} \rightarrow b;$	$e_{b_1-2} e_{b_1-2} e_{b_1-2} \rightarrow e_{b_1-2};$	$e_{b_1-2} e_{b_1-2} c \rightarrow e_{b_1-2};$	

自然数とすると, x 波, y 波の $2 \sim u$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.Eb_1-u} (2 \leq u \leq k-2)$ を, 図 32 に x 波, y 波の $b_1 - 1$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.Eb_1-b_1-1}$ を示す.

1 往復目は遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I.Eb_1-1}$ が使用され, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
 t = c_1 \cdot b_1^{j-1} & : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}) + 1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1 & : \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_a \underbrace{[3, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1)} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \\
 t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2 & : \underbrace{[1, 2]}_{qq} \underbrace{[3]}_a \underbrace{[4, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2)} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
 \end{aligned}$$

x 波がセル空間を右方向に進み, z 波と衝突する. 衝突後, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} & : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2}]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1]}_{e_1} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2, \dots]}_{q \dots} \\
t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1 & : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2}, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1]}_{e_1 e_1} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1)} \\
& \quad \underbrace{P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \\
t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2 & : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} - 2]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} - 1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1]}_{e_1, \dots, e_1} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2)} \\
& \quad \underbrace{P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
\end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 e_1 が y 波となる. また, 内部状態 e_1 を維持するセル $C_{\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1}$ が w_e 波となる. y 波はセル空間を右方向に速さ $1/1$ で進み, 時刻 $t = 2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1}$ 時にセル C_1 に到達し, M_{b_1, c_1} は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1} : \underbrace{[1]}_b \underbrace{[2, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1]}_{e_1 \dots e_1} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2, P_z(2 \cdot 2^j) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(2 \cdot 2^j)]}_{S_z(2 \cdot 2^j)} \underbrace{[P_z(2 \cdot 2^j) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

2 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Eb_{1-2}}$ が使用され, x 波は状態 b , w_e 波, y は状態 e_2 となり, 3 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Eb_{1-3}}$ が使用され, x 波は状態 b , w_e 波, y は状態 e_3 となり, \dots , $b_1 - 1$ 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Eb_{1-b_1-1}}$ が使用され, x 波は状態 b , w_e 波, y は状態 c となり往復運動を繰り返す. また, $b_1 - 1$ 往復目で w_e 波は消滅するので, $b_1 - 1$ 往復目の終了時, すなわち, 時刻 $t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + (b_1 - 1) \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1} = c_1 \cdot b_1^j$ 時に M_k は以下の状態をとる.

$$t = c_1 \cdot b_1^j : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, P_z(c_1 \cdot b_1^j) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^j)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^j)} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^j) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

• $b_1 = 2\ell + 1$, $c_1 = 2\ell + 1$ の場合 :

この場合, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ok_{-1}}$, 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ob_{1-2}}$, \dots , 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ob_{1-b_1-1}}$ を使用する. 図 33 に x 波, y 波の 1 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ob_{1-1}}$ を, h を $2 \leq h \leq k - 2$ となる自然数とすると, 図 34 に x 波, y 波の $2 \sim h$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ob_{1-h}}$ ($2 \leq h \leq b_1 - 2$) を, 図 35 に x 波, y 波の $b_1 - 1$ 往復目の伝播に使用する遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ob_{1-b_1-1}}$ を示す.

1 往復目は遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_Ob_{1-1}}$ が使用され, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

図 33 遷移規則集合 \mathcal{R}_{LOb_1-1}

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q a \rightarrow q;$	$\$ q o_1 \rightarrow o_1;$	$q q q \rightarrow q;$	$q q a \rightarrow q;$	$c q q \rightarrow a;$
$q q o_1 \rightarrow o_1;$	$\$ a c \rightarrow q;$	$q a c \rightarrow q;$	$c a q \rightarrow b;$	$o_1 a q \rightarrow b;$	$c b q \rightarrow c;$
$o_1 b q \rightarrow c;$	$a c q \rightarrow o_1;$	$a c b \rightarrow a;$	$a c c \rightarrow a;$	$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$
$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$	$o_1 c q \rightarrow c;$	$o_1 c a \rightarrow c;$	$o_1 c b \rightarrow c;$	$o_1 c c \rightarrow c;$
$\$ o_1 o_1 \rightarrow b;$	$q o_1 a \rightarrow o_1;$	$q o_1 o_1 \rightarrow o_1;$	$o_1 o_1 b \rightarrow o_1;$	$o_1 o_1 c \rightarrow o_1;$	$o_1 o_1 o_1 \rightarrow o_1;$

図 34 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{LOb_1,h} (2 \leq h \leq k-2)$

$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$	$\$ q o_h \rightarrow o_h;$	$q q q \rightarrow q;$
$q q b \rightarrow q;$	$q q o_h \rightarrow o_h;$	$a q q \rightarrow q;$	$b q q \rightarrow q;$
$c q q \rightarrow a;$	$\$ b o_{h-1} \rightarrow q;$	$q b o_{h-1} \rightarrow q;$	$c b q \rightarrow c;$
$c c c \rightarrow c;$	$o_{h-1} c c \rightarrow c;$	$o_h c c \rightarrow c;$	$b o_{h-1} c \rightarrow o_h;$
$b o_{h-1} o_{h-1} \rightarrow b;$	$o_{h-1} o_{h-1} c \rightarrow o_{h-1};$	$o_{h-1} o_{h-1} o_{h-1} \rightarrow o_{h-1};$	$\$ o_h o_h \rightarrow b;$
$q o_h c \rightarrow o_h;$	$q o_h o_h \rightarrow o_h;$	$o_h o_h c \rightarrow o_h;$	$o_h o_h o_h \rightarrow o_h;$

図 35 遷移規則集合 $\mathcal{R}_{LOb_1,b_1-1}$

$b o_{b_1-2} c \rightarrow c;$	$q c c \rightarrow c;$	$\$ q q \rightarrow q;$	$\$ q b \rightarrow q;$
$\$ q c \rightarrow c;$	$\$ b o_{b_1-2} \rightarrow q;$	$b o_{b_1-2} o_{b_1-2} \rightarrow b;$	$o_{b_1-2} c c \rightarrow c;$
$q q q \rightarrow q;$	$q q b \rightarrow q;$	$q q c \rightarrow c;$	$q b o_{b_1-2} \rightarrow q;$
$a q q \rightarrow q;$	$o_{b_1-2} o_{b_1-2} c \rightarrow o_{b_1-2};$	$b q q \rightarrow q;$	$o_{b_1-2} o_{b_1-2} o_{b_1-2} \rightarrow o_{b_1-2};$
$c c q \rightarrow c;$	$c c a \rightarrow c;$	$c c b \rightarrow c;$	$c c c \rightarrow c;$
$c b q \rightarrow c;$	$c a q \rightarrow b;$	$c q q \rightarrow a;$	$\$ c c \rightarrow a;$

$$\begin{aligned}
 t = c_1 \cdot b_1^{j-1} & : \underbrace{a}_{[1]} \underbrace{c \dots c}_{[2, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})-1]} \underbrace{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})}_{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})]} \underbrace{q \dots}_{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1})+1, \dots]} \\
 t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1 & : \underbrace{q}_{[1]} \underbrace{a}_{[2]} \underbrace{c \dots c}_{[3, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}+1)-1]} \underbrace{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 1)}_{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}+1)]} \underbrace{q \dots}_{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}+1)+1, \dots]} \\
 t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2 & : \underbrace{qq}_{[1,2]} \underbrace{a}_{[3]} \underbrace{c \dots c}_{[4, P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}+2)-1]} \underbrace{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + 2)}_{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}+2)]} \underbrace{q \dots}_{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1}+2)+1, \dots]}
 \end{aligned}$$

x 波がセル空間を右方向に進み, z 波と衝突する. 衝突後, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する. 時刻 $t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2}$ 時にセル $C_{\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1}$ で z 波に追いつき衝突する. 衝突後, M_{b_1, c_1} は以下の通り遷移する.

$$\begin{aligned}
t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} & : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2}]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1]}_{o_1} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 2, \dots]}_{q \dots} \\
t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1 & : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2}, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1]}_{o_1 o_1} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1)} \\
& \quad \underbrace{P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1) + 1, \dots]}_{q \dots} \\
t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 2 & : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} - 1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1]}_{o_1, \dots, o_1} \\
& \quad \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 2)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 2)} \underbrace{P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 2) + 1, \dots]}_{q \dots}
\end{aligned}$$

1 ステップにつき 1 セル, 左方向に伝播している状態 o_1 が y 波となる. また, 内部状態 o_1 を維持するセル $C_{\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + 1}$ が w_o 波となる. y 波はセル空間を右方向に速さ 1/1 で進み, 時刻 $t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} + \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1}{2} = 2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1$ 時にセル C_1 に到達し, M_{b_1, c_1} は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1 : \underbrace{[1, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1]}_{o_1 \dots o_1} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2, P_z(2 \cdot 2^j) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1)} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^{j-1} + c_1 \cdot b_1^{j-1} - 1) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

1 ステップ後の時刻 $t = 2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1}$ 時に M_{b_1, c_1} は以下の状態をとる.

$$t = 2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1} : \underbrace{[1]}_b \underbrace{[2, \frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 1]}_{o_1 \dots o_1} \underbrace{[\frac{c_1 \cdot b_1^{j-1}}{2} + 2, P_z(2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1}) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1})]}_{S_z(2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1})} \underbrace{[P_z(2 \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1}) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

2 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_{Ob_1-2}}$ が使用され, x 波は状態 b , w_o 波, y は状態 o_2 となり, 3 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_{Ob_1-3}}$ が使用され, x 波は状態 b , w_o 波, y は状態 o_3 となり, ..., $b_1 - 1$ 往復目では遷移規則集合 $\mathcal{R}_{I_{Ob_1-b_1-1}}$ が使用され, x 波は状態 b , w_o 波, y は状態 c となり往復運動を繰り返す. また, $b_1 - 1$ 往復目で w_o 波は消滅するので, $b_1 - 1$ 往復目の終了時, すなわち, 時刻 $t = c_1 \cdot b_1^{j-1} + (b_1 - 1) \cdot c_1 \cdot b_1^{j-1} = c_1 \cdot b_1^j$ 時に M_{b_1, c_1} は以下の状態をとる.

$$t = c_1 \cdot b_1^j : \underbrace{[1]}_a \underbrace{[2, P_z(c_1 \cdot b_1^j) - 1]}_{c \dots c} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^j)]}_{S_z(c_1 \cdot b_1^j)} \underbrace{[P_z(c_1 \cdot b_1^j) + 1, \dots]}_{q \dots}$$

(I), (II) より, 補題 3.1 が証明される. □

補題 3.1 より, i を $i \geq 1$ となる自然数とした場合, 全ての b_1, c_1 について, セル C_1 の内部状態は時刻 $t = c_1 \cdot b_1^{i-1}$ 時に状態 a をとる. 以上より以下の定理を得る.

定理 3.2 $b_1 \geq 2$, $c_1 \geq 2$ となる自然数について, $a_n = b_1 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = c_1$ としてあらわされる 1 階線形回帰数列を実時間で生成することができる.

4 おわりに

本稿では, CA 上の実時間数列生成問題について考察し, $b_1 \geq 2, c_1 \geq 2$ となる自然数について, $a_n = b_1 \cdot a_{n-1}$, $a_1 = c_1$ としてあらわされる 1 階線形回帰数列の 1 次元接続 CA 上の生成アルゴリズムを設計し, すべての b_1, c_1 の場合の 1 階線形回帰数列が有限状態の CA で実時間生成が可能であることを示した.

今後の課題としては, 1 階線形回帰数列生成アルゴリズムの内部状態数が削減可能であるかの考察を行うこと, 階数が 2 以上の線形回帰数列生成アルゴリズムの内部状態集合, 遷移規則集合についての考察を行うことがあげられる.

参考文献

- [1] 有沢: 有限状態機械の一次元繰返し形配列による数列の生成方式について. 電子通信学会論文誌 C, Vol. 54, No. 8, pp. 759-766, 1971.
- [2] N. Kamikawa and H. Umeo: Some state-efficient algorithms for real-time generation of non-regular sequences on cellular automata, *Proc. of the 13th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.47-50, 2008.
- [3] N. Kamikawa and H. Umeo: A design of algorithms for real-time generation of linear-recursive sequences on cellular automata. The Fourteenth International Symposium on Artificial Life and Robotics, pp.281-286, 2009.
- [4] N. Kamikawa and H. Umeo: A Study on Sequence Generation Powers of Small Cellular Automata. *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol. 5, No. 4, pp. 191-199, DOI: 10.9746/jcmsi.5.191, 2012.
- [5] N. Kamikawa and H. Umeo: A construction of five-state real-time Fibonacci sequence generator. *Artificial Life and Robotics*, Vol. 21, No. 4, pp. 531-539, DOI: 10.1007/s10015-016-0309-2, 2016.
- [6] 上川, 梅尾: 能力の小さい 1 ビットセルオートマトンで生成可能な数列についての考察. 情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用 (TOM), Vol. 10, No. 1, pp. 1-13, 2017.
- [7] 上川, 梅尾: セルオートマトン上の実時間数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの正当性について. 情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用 (TOM), Vol. 11, No. 1, pp. 53-63, 2018.
- [8] 上川, 梅尾: 1 次元接続有限状態セルオートマトンによる冪乗数列生成の実現. 情報処理学会研究報告 数理モデル化と問題解決 (MPS) 2017-MPS-117 (15), pp. 1-6, 2018.
- [9] I. Korec: Real-time generation of primes by a one-dimensional cellular automaton with 9 states, *Proc. of the 2nd International Colloquium on Universal Machines and Computations*, pp.101-116, 1998.
- [10] J. von Neumann: *Theory of Self-Reproducing Automata*, A. W. Burks, Ed., p. 388, Univ. of Illinois Press, 1968.
- [11] M. E. Pazo-Roblesa and A. Fuster-Sabaterb: Modeling pseudorandom sequence generators using cellular automata: The alternating step generator, *Computation in Modern Science and Engineering*,

- Proc. International Conference on Computational Methods in Science and Engineering 2007*, Vol.963, pp.969-972, 2007.
- [12] B. Shackleford, M. Tanaka, R. J. Carter, and G. Snider: FPGA implementation of neighborhood-of-four cellular automata random number generators, *Proc. 2002 ACM/SIGDA Tenth International Symposium on Field-Programmable Gate Arrays*, pp.106-112, 2002.
- [13] 脇田, 清水, 玉城, 北: 合流車両による交通渋滞緩和のためのセルオートマトンシミュレーション, 日本計算数理工学論文集, Vol.10, pp.75-80, 2010.
- [14] S. Wolfram: Random sequence generation by cellular automata, *Advances in Applied Mathematics*, Vol. 7, No. 2, pp. 123–169, 1986.