

## 光パケット交換機のトラフィック理論（その 2）

— 一般分布パケット長に対する近似解法 —

### A Traffic Theory for Optical Packet Switches (Part 2)

– Approximation Formulas for Generally Distributed Packet Length –

村上 泰司\*

Yasuji Murakami

#### Abstract

An all-optical network still remains a long way from realistic deployment. However, all-optical packet switches, in which optical packets are buffered and routed in optical form, are still expected to solve the problems of electronic bottlenecks and large power consumption in electronic routers. An approximation is presented for blocking probabilities and delays of optical buffers, where optical packets arrive in Poisson distribution at the inputs of the optical buffers and are generally distributed in packet length. The approximation aims to provide a simple calculation tool for optical buffer designs without requiring computer simulations or extensive iterative computations.

#### 1. はじめに

前世紀末よりインターネットトラフィックが毎年 1.5 倍の伸び率で増大している状況に対応するため、伝送装置、交換機など情報通信ネットワークの設備投資が世界中で活発に行われている。光波長多重伝送技術が進歩した結果、これら設備投資によりネットワークの高いスループットと高度な柔軟性を得る結果となっている。しかしながら、光伝送技術の驚異的な発展に対して、交換機、ルータなどのネットワークノードでは未だ電気処理のままであるため、転送能力の限界が顕在化するようになった。また、IP ルータの電力消費量もこのまま増大を続ければ、電力コストが運用コストの大きな比重を占めるようになるとともに、地球温暖化を助長する結果となる[1]。大きくはこの 2 つの問題を解決する方法として、光信号のままパケットを処理する光パケット交換機の登場が期待されている。すなわち、光ファイバ通信システムにより 1 回線の伝送速度が 100Gbps に達する状況になると、伝送能力の高い光技術を用いた光交換機が、次世代の IP ルータを担うことになるはずであるという期待である[2-3]。

可変長 IP パケットに対応するため、非同期光パケット交換が次世代インターネットの転送技術に必須であるとされている。出力ポートでのパケット衝突を回避するためには光バッファが必要であり、光バッファには多くの提案がある。実現性からみると光ファイバ遅延線（optical fiber delay lines : FDL）を利用することが近道である。光バッファとしてみた場合、FDL は次のような特徴を持つ。

(1) FDL はその長さに比例した一定量の蓄積時間しか得られない。FDL での蓄積時間は、

---

\*大阪電気通信大学 情報通信工学部 通信工学科

光ファイバ長に比例するので、FDL 長の単位を遅延時間で考える。これを**時間粒度** (time granularity) と呼ぶ。

(2) 衝突回避に間に合わなければ、パケットは廃棄される。

非同期光パケットに対応する光バッファの性能を評価するため、多くの解析方法が提案されている[4-9]。いずれの提案も時間粒度の整数倍の FDL を数多く用意して、時間粒度の最適化を図るものとなっている。すなわち、FDL の長さ分布をどのようにすれば、パケット廃棄率を抑えることができるか、という問題である。これに対して、近似数値解[4-5]、数値シミュレーション[6-7]、指数関数分布パケット長に対する厳密解[9]などさまざまな取り組みがされているが、見通しのよい理論式を得ているわけではない。

前報告[10]では、指数関数分布パケット長に対して、光パケット交換機バッファの性能、具体的にはパケット廃棄率と遅延に関する見通しのよい近似式を得ることに成功した。本論文は、前報告の結果を踏まえてさらに一般化し、一般分布パケット長に対する近似式を与えている。ここでは、既発表[11]の内容を理解しやすい形に整理するとともに、導出した近似解の精度を一層詳しく説明する。

## 2. モデルと定理

本論文で導出するパケット廃棄率と遅延の近似式は、文献[6]および前報告[10]の結果に基づくものである。したがって、本節ではそれらの論文にて記載された定義と得られた定理を簡潔に記述する。

### 2.1 モデル

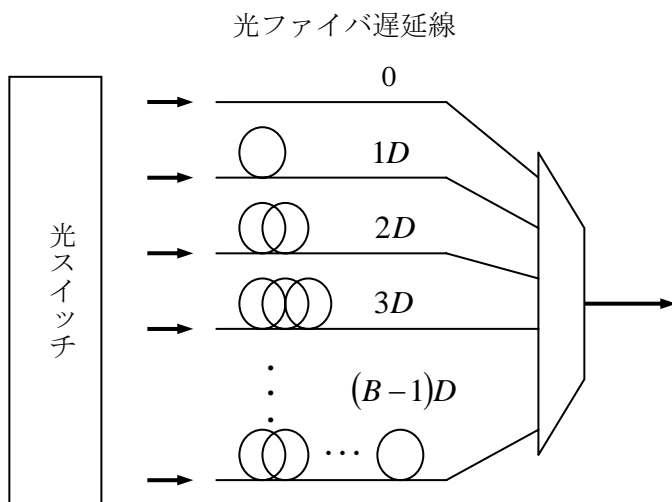


図 1. 光ファイバ遅延線による光バッファ

待ち行列となる出力バッファに FDL を利用する構成を、図 1 に示す。1つの出力に対して光パケットの衝突を回避するため、 $B$ 本の FDL を選択できる構成で、 $i$ 番目の FDL は  $(i-1)D$ ,  $1 \leq i \leq B$  の遅延を生じる。ここで、 $D$  は時間粒度であり、光ファイバの長さ単位を  $L$  とすると、 $D = nL/c$ ,  $n$ : 光ファイバの実効屈折率,  $c$ : 真空中の光速である。したがって、この光バッファでは、 $0, 1D, 2D, \dots, T = (B-1)D$  の離散的

な遅延時間となる到着順処理 (first come first service : FCFS) が行われる。 $T = (B-1)D$  以上の遅延時間が必要となるパケットは破棄される。

一般的には、到着したパケットが、少なくとも  $w$  の待ち時間が必要なとき、このパケ

ットは次のように処理される.

(1)  $(i-1)D \leq w < iD$  のとき,  $(i+1)$  番目の FDL に転送される. このとき, 先頭には

$$\tau = iD - w, \quad \left\lceil \frac{w}{D} \right\rceil = iD, \quad (1)$$

の空期間  $\tau$  が付加される. ここで,  $\lceil x \rceil$  は,  $x$  を超える最小整数を意味する.

(2)  $T = (B-1)D < w$  のとき, 廃棄される.

ポアソン入力過程とした FCFS システムでは, 任意の時間であらたに到着した仮想パケットが受ける待ち時間は, 実際の待ち時間と同じ統計分布に従う. ここで, 実際の待ち時間とは, パケットが到着してから光バッファ内で滞在する時間であり, その統計はパケットごとに数値シミュレーションすることによって得ることができる. 同じ統計となるのは, あくまでポアソン入力過程を仮定しているためであり, **PASTA** (Poisson arrivals see time averages) の関係による.

そこで, 本論文では, 実際の待ち時間分布ではなく**仮想待ち時間** (virtual waiting time)  $x$  に対する確率分布を扱うこととする. また, 仮想待ち時間を, 光バッファ内に滞在する時間と定義すると, 光バッファを1つのシステムと見た場合, これはサービス時間を含めた**滞在時間** (sojourn time) となる. パケットが到着すると, サービス終了までに  $x$  時間かかる.

パケットが光バッファを経由する(1)の場合, 空期間が付加される分, 交換機にかかるパケット負荷は実際の負荷より過剰となる. 空期間は, 光バッファが空のとき到着するパケットには付加されないが, 光バッファにパケットが蓄積されているときには付加される. そこで, 空期間を含めたパケットをあらたに「**ぱけっと**」という名称で定義する. すなわち, **ぱけっと**には,

- ① 光バッファが空のとき到着するパケット. これを, **初期到着パケット** (first arrival packets) と呼び, 空期間を持たない.
- ② 光バッファにパケットが蓄積されているとき到着するパケット. これを, **非初期到着パケット** (non-first arrival packets) と呼び, 空期間を含んだ長さとなる.

の2種類のパケットがある.

## 2.2 無限長光バッファの理論

本論文に利用する確率変数と定理について, 前報[10]に従い, 簡潔に記述する. 最初に無限長光バッファの場合, すなわち  $B \rightarrow \infty$  の場合であり, パケット廃棄はない.

$\lambda$ : ポアソン入力における到着率.

$s_0$ : 実パケット長.

$g_0(x)$ :  $s_0$  の確率密度関数 (pdf: probability density function).

$G_0(x)$  :  $s_0$  の蓄積分布関数 (CDF : Cumulative Distribution Function).

$$\bar{s}_0 : \text{平均パケット長, したがって, } \bar{s}_0 = \int_0^{\infty} x g_0(x) dx. \quad (2)$$

$\rho$  : 光パケットの負荷, したがって,  $\rho = \lambda \bar{s}_0$ .

$l(x)$ ,  $L(x)$  :  $\tau$  の確率密度関数 (pdf) と蓄積分布関数 (CDF).

$s_v$  : 非初期到着パケットの実効パケット長, したがって,  $s_v = s_0 + \tau$ .

$g(x)$ ,  $G(x)$  :  $s_v$  の確率密度関数 (pdf) と蓄積分布関数 (CDF), したがって,

$$g(x) = g_0(x) \otimes l(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x-y) l(y) dy. \quad (3)$$

ここで,  $\otimes$  は畳み込み積分 (convolution integral) である.

$\bar{s}_v$  : 非初期到着パケットの平均パケット長, したがって,

$$\bar{s}_v = \int_0^{\infty} x g(x) dx = \bar{s}_0 + \bar{\tau} = \bar{s}_0 + \frac{D}{2}. \quad (4)$$

$v(x)$  : **ぱけつ**との仮想待ち時間  $x$  における確率密度関数 (pdf).

$V(x)$  : **ぱけつ**との仮想待ち時間  $x$  に対する蓄積分布関数 (CDF).

$Q$  : 光バッファが繁忙期間にないとき, すなわち空のときの確率.

$\rho_{eq} = 1 - Q$  : **ぱけつ**に対する等価負荷で, 空期間を負荷に取り込んだもの.

システムが定常状態 (steady-state) にあると仮定して, 次の定理が得られている [6,10].

補助定理 1 : 等価負荷と実負荷は次式の関係となる.

$$\rho_{eq} = \frac{\rho}{1 - \frac{D}{2\bar{s}_0} \rho} \quad (5)$$

式(5)は,  $D > 0$  であれば  $\rho_{eq} > \rho$  であること,  $\rho < 1$  の場合でも  $\rho_{eq} > 1$  となることがあることを意味する.

定理 1 : **ぱけつ**との仮想待ち時間  $x$  における確率密度関数 (pdf)  $v(x)$  は, レベル交差法 [12]

による解析から求められる。システムが安定状態にあるとき、すなわち  $\rho_{eq} < 1$  のとき、

$v(x)$  のラプラス変換  $v^*(\theta)$  は次式となる。

$$v^*(\theta) = \frac{\lambda Q [1 - g_0^*(\theta)]}{\theta - \lambda [1 - g^*(\theta)]} \quad (6)$$

ここで、 $g_0^*(\theta)$ 、および  $g^*(\theta)$  は、それぞれ  $g_0(x)$ 、および  $g(x)$  のラプラス変換である。

式(6)は、M/G/1 システムにおけるポラツェック・ヒンキン変換方程式 (the Pollaczek-Khinchin transform equation) に対応する。分母が  $\theta$  のべき乗であらわせるのであれば、逆変換のためには因数分解できることが望ましい。

### 2.3 有限光バッファの理論

有限長光バッファでは、仮想待ち時間  $x$  が最大許容遅延時間である  $T = (B-1)D$  を超えると、**ばけつ**とは廃棄される。あらためて、**ばけつ**とを分類すると、次の3種類となる。

- (i) 初期到着パケット；バッファは空であるので  $x=0$  であり、通過パケットである、
- (ii) 非初期到着パケットでかつ通過パケット、すなわち  $0 < x \leq T$ 、
- (iii) 非初期到着パケットでかつ廃棄されるパケット、 $T < x$ 。

有限長光バッファにおける関数を、以下のように、下付  $T$  を添えて無限長光バッファのそれらと区別する。廃棄された**ばけつ**とはバッファ内に存在しないことが、無限長バッファモデルとの違いである。

$\bar{w}_T$  : 通過した実パケットのみ、すなわち(i)と(ii)、を対象とし、空期間を含まない平均遅延時間、

$\bar{S}_T$  : 通過**ばけつ**のみを対象とした平均**ばけつ**と長、

$P_B$  : 到着全パケットに対する閉塞確率、およびパケット廃棄率、損失率、

定理 3 :  $\rho_{eq} < 1$  のとき、通過する実パケットのみの平均遅延時間は次式となる。

$$\bar{w}_T = T - \int_0^T \frac{V(x)}{V(T)} dx + \frac{D}{2} \left[ 1 - \frac{Q}{V(T)} \right] \quad (7)$$

ここで、右辺の第三項は通過**ばけつ**の空期間により生じた遅延であり、これはタイプ(ii)**ばけつ**の packets 長延長分である。

定理 4 :  $\rho_{eq} < 1$  のとき、パケット廃棄率は次式で与えられる。

$$P_B = 1 - \frac{V(T)}{Q + \lambda \bar{s}_T V(T)} \quad (8)$$

ここで

$$\bar{s}_T = \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \left[ 1 - \frac{Q}{V(T)} \right]. \quad (9)$$

である。式(8)の右辺第二項は、有限長光バッファにおいて、仮想待ち時間が最大許容遅延時間  $T = (B-1)D$  となる確率で与えられる。この項は、結局  $T = (B-1)D$  における無限長光バッファの仮想待ち時間 CDF の値  $V(T)$  の関数としてあらわされる。

### 3. 近似解法

#### 3.1 疑似負荷による廃棄率の導出

式(5)より、光バッファが空となる確率  $Q$  は

$$Q = 1 - \rho_{eq} = 1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \rho_{eq} \right)$$

であるので、式(9)を用いると、式(8)の右辺第二項の分母は、

$$\begin{aligned} Q + \lambda \bar{s}_T V(T) &= 1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \rho_{eq} \right) + \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} - \frac{D}{2} \frac{Q}{V(T)} \right) V(T) \\ &= 1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} (\rho_{eq} + Q) \right) + \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) V(T) = 1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) [1 - V(T)] \end{aligned} \quad (10)$$

となる。その結果、次式を得る。

$$P_B = \frac{\left[ 1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) \right] [1 - V(T)]}{1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) [1 - V(T)]} \quad (11)$$

無限長光バッファでの変数のみであらわされる式が得られた。したがって、無限長光バッファモデルでの解を求めれば、有限長光バッファでの解を得ることができる。

式(11)は、近似計算を実行するにあたり、多くの示唆を含む関係式である。あらたに疑似負荷  $\rho'$  を次式のように定義する。

$$\rho' \equiv \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) = \rho \left( 1 + \frac{D}{2\bar{s}_0} \right) \quad (12)$$

擬似負荷を用いると、式(11)は

$$P_B = \frac{(1-\rho')[1-V(T)]}{1-\rho'[1-V(T)]} \quad (13)$$

となる。M/G/1/Kシステムの廃棄率  $P_K$  が

$$P_K = \frac{(1-\rho)q_K}{1-\rho q_K} \quad (14)$$

で表される[13-14]ことを考慮すると、廃棄率を計算する際には、 $\rho$ に代わって $\rho'$ を用いることを示唆している。ここで、式(14)の $q_K$ は、M/G/1システムにおいてシステム内客数が $K-1$ 以上となる確率を示す。

擬似負荷は、到着パケットすべてに空期間が付加されたもので、収束条件 $\rho_{eq} < 1$ を満足する限り等価負荷 $\rho_{eq}$ より大きな値である。すなわち、

$$\rho' - \rho_{eq} = \rho(1 - \rho_{eq}) \frac{D}{2\bar{s}_0} \quad (15)$$

となり、収束条件 $\rho_{eq} < 1$ は $\rho' < 1$ と等価である。図2に、負荷に対する $\rho' - \rho_{eq}$ を示す。

$\rho_{eq} = 1$ となる $\rho$ を $\rho_{max} \equiv 1/(1 + D/2\bar{s}_0)$ とおくと、 $\rho' - \rho_{eq}$ はほぼ $\rho_{max}/2$ で最大となるが、その値は $D$ の1/10程度である。

### 3.2 指数関数分布パケット長

式(13)を用いて廃棄率を計算するには、 $V(T)$ の値が必要である。すなわち無限長バッファモデルにおける仮想待ち時間分布を、待ち時間 $x$ の関数形で求める必要がある。この関数は式(6)の $v^*(\theta)$ をラプラス逆変換して求められるが、実際のところラプラス逆変換で求められる関数形はきわめて限られている。複雑な関数をラプラス逆変換することは一般に困難であり、式(6)を用いて計算した例を著者の知る限りない。文献[6]は、廃棄率や遅延時間の算出にこの式を用いずに数値シミュレーションを行っている。

以下では、光パケット長が指数関数分布する場合での近似解を求める。この場合、空期間が存在するため**パケット**とサービス時間は指数関数分布ではないが、導出が最も簡単なモ

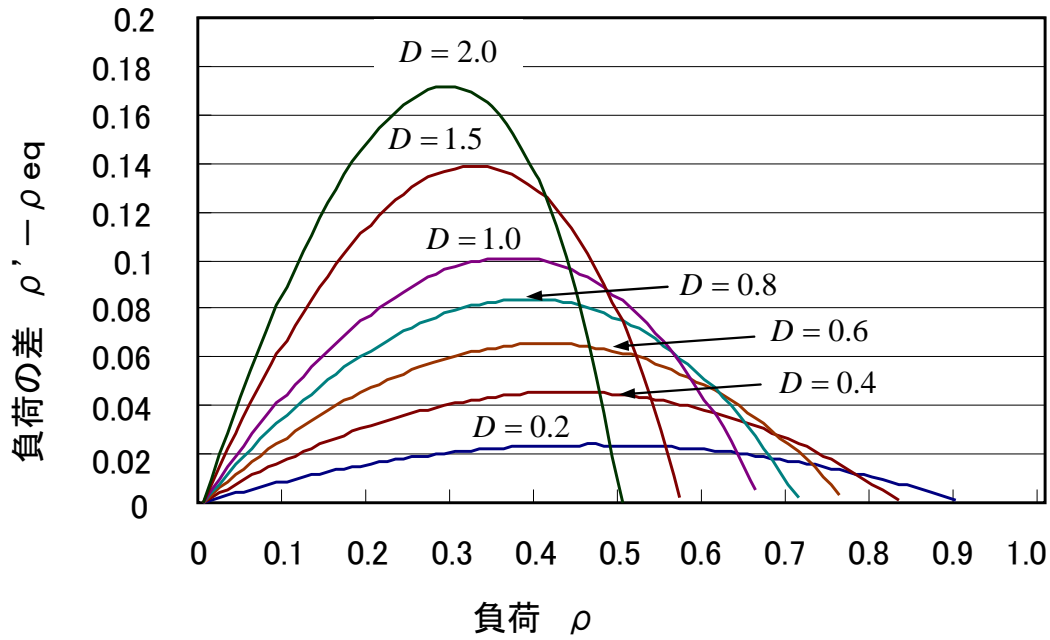


図 2. 擬似負荷と等価負荷との差

デルであると思われる.

図 3 に示すように, 光パケット長は平均値  $\bar{s}_0$  の指数関数分布, 空期間は  $[0, D]$  の間での均一分布と仮定する. 各確率密度関数とそのラプラス変換は, 次式となる.

$$g_0(x) = \frac{1}{\bar{s}_0} e^{-x/\bar{s}_0}, \quad g_0^*(\theta) = \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1}, \quad (16)$$

$$l(x) = \frac{1}{D} [u(x) - u(x-D)], \quad l^*(\theta) = \frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}). \quad (17)$$

ここで,  $u(x)$  は単位ステップ関数である. 式(3)における畳み込み積分は, ラプラス変換では単なる積となるため,

$$g^*(\theta) = g_0^*(\theta) l^*(\theta) = \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1} \frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}) \quad (18)$$

である. 式(16), (18)を式(6)に代入すると次式を得る.

$$v^*(\theta) = \frac{\lambda Q \left[ 1 - \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1} \right]}{\theta - \lambda \left[ 1 - \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1} \frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}) \right]} \quad (19)$$



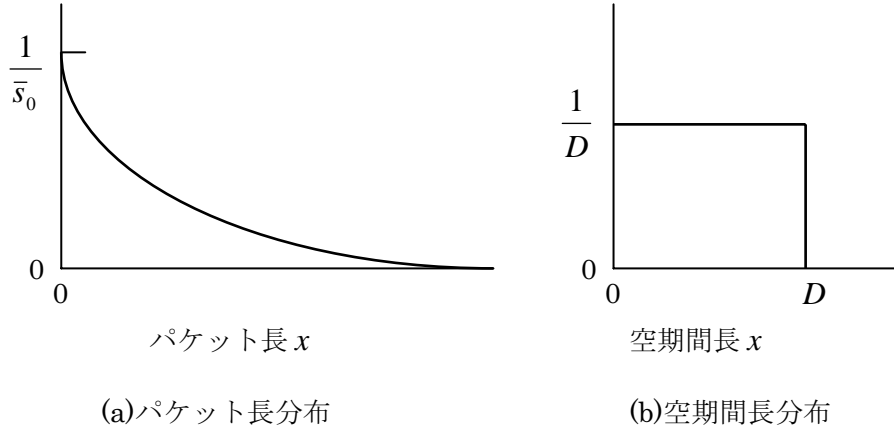


図3 パケット長と空期間長の確率密度分布

式(19)をラプラス逆変換すれば遅延時間に関する確率密度関数を得ることができる。

しかしながら、式(19)の明示的な逆変換を求めることは困難であるので、 $D\theta \ll 1$ とし

$$\frac{1}{D\theta}(1 - e^{-D\theta}) \approx 1 - \frac{D\theta}{2} + O[(D\theta)^2] \quad (20)$$

で近似して、 $(D\theta)^2$ 以上のべき乗を無視する。式(19)はきわめて簡単化されて

$$v^*(\theta) = \frac{\lambda Q}{\theta + \frac{1}{\bar{s}_0} \left[ 1 - \lambda \left( \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) \right]} = \frac{\lambda Q}{\theta + \frac{1}{\bar{s}_0} (1 - \rho')} \quad (21)$$

となり、その逆変換は次式となる。

$$v(x) = \lambda Q e^{-(1-\rho')x/\bar{s}_0} \quad (22)$$

式(21)における近似では $O[(D\theta)^2]$ を無視した。これは、式(22)より $O(((1-\rho')D/\bar{s}_0)^2)$ を

無視することと同等である。この条件は、 $D$ が $\bar{s}_0$ に対して極めて小さいか、負荷 $\rho'$ が1に近く重い場合に相当する。したがって、廃棄率が大きい場合の近似である。

CDFは、式(22)より

$$V(x) = V(0) + \int_{+0}^x \lambda Q e^{-(1-\rho')\xi/\bar{s}_0} d\xi = 1 - \rho_{eq} e^{-(1-\rho')x/\bar{s}_0} \quad (23)$$

となり、式(5)の等価負荷、式(12)の擬似負荷を用いたきわめて簡単な式となる。

式(23)は、M/M/1システムにおける客の待ち時間分布関数と同形である[15]。ただし、比例係数の負荷 $\rho$ が等価負荷 $\rho_{eq}$ となり、指数部では負荷が擬似負荷 $\rho'$ と置き換わってい

るちがいがある。擬似負荷  $\rho'$  が、仮想待ち時間  $x$  の蓄積分布関数における指数部分（これはいわゆる**末端分布** (tail distribution) に相当する) における負荷となる理由は、以下のように考えられる。

負荷が大きい場合には、すべてのパケットは光バッファを經由して出力される。特に、廃棄される確率を問題とするような場面では、光バッファが常に満杯である状況であるので、パケットには必ず空期間が付加された状態となる。実際、仮想待ち時間  $x$  の確率密度関数に対する基本式(6)では、分母のサービス時間に関する分布関数として、非初期到着パケットのサービス時間関数  $g(x)$  が用いられている。

式(23)を式(13)に代入して、指数関数分布に対する最初の廃棄率近似式  $P_{B,M1}$  を得る。

$$P_{B,M1} = \frac{(1-\rho')\rho_{eq}e^{-(1-\rho')T/\bar{s}_0}}{1-\rho'\rho_{eq}e^{-(1-\rho')T/\bar{s}_0}} \quad (24)$$

### 3.3 一般分布パケット長

指数関数分布においては、待ち時間の累積分布が単純な指数関数となることを前節で明らかにした。GI/GI/1 システムにおいて、待ち時間分布を単純な指数関数で近似することに対して現在までに精力的な研究がなされている[16-20]。GI/GI/1 システムとは、客の到着間隔が独立で均一に分布しており (*iid*: independent and identically distributed), 個々の客のサービス時間も独立で均一に分布しているモデルである。さらに、到着順処理を仮定する。このシステムにおいて、客が到着した時点での仮想待ち時間  $w$  が  $x$  以下である確率  $P(x > w) \equiv W(x)$  を次式で近似する。

$$W_A(x) = 1 - Ce^{-\eta x} \quad (25)$$

ここで、 $\eta$  を減衰率 (decay rate),  $C$  を定数 (constant) と呼ぶ。式(25)は、 $x$  が非常に大きく、負荷  $a$  が重い (1 に近い) 場合にはよい近似であることが明らかにされている。

式(23)では、減衰率は  $(1-\rho')/\bar{s}_0$ , 定数は  $\rho_{eq}$  となっている。もし、

$$W(x) \approx W_A(x) \quad (26)$$

であるならば、平均待ち時間  $\bar{w}$  を用いて、

$$\bar{w} = \int_0^{\infty} x dW_A(x) = \int_0^{\infty} x \frac{dW_A}{dx} dx = C\eta \int_0^{\infty} xe^{-\eta x} dx = \frac{C}{\eta}, \quad (27)$$

$$W_A(0) = 1 - C = 1 - a \quad (28)$$

より、

$$C = a \quad (29)$$

$$\eta = \frac{a}{\bar{w}} \quad (30)$$

を得る．特に，M/G/1 システムでは，平均待ち時間  $\bar{w}$  として次式のポラツェック・ヒンキンの平均値公式 (Pollaczek-Khinchin mean value formula) [21]を得ている．

$$\bar{w} = \frac{\langle s \rangle a (1 + C_b^2)}{2(1 - a)} \quad (31)$$

ここで， $C_b^2$  はサービス時間の分散 (variance) をサービス時間平均  $\langle s \rangle$  の二乗で規格化したものである．したがって，M/G/1 システムにおける仮想待ち時間累積分布は

$$W(x) = 1 - a \exp \left[ -\frac{2(1-a)}{1 + C_b^2} \frac{x}{\langle s \rangle} \right] \quad (32)$$

となる．式(32)を導出するに当たり，用いた近似は式(25)のみである．

式(23)では，定数  $C$  は等価負荷  $\rho_{eq}$  であり，減衰率における負荷は擬似負荷  $\rho'$  を用いている．そこで，式(6)の解として次式で近似する．

$$V(x) = 1 - \rho_{eq} \exp \left[ -\frac{2(1-\rho')}{1 + C_g^2} \frac{x}{\bar{s}_v} \right] \quad (33)$$

ここで，

$$C_g^2 = \left( \langle s_v^2 \rangle - \bar{s}_v^2 \right) / \bar{s}_v^2, \quad (34)$$

式(4)より  $\bar{s}_v = \bar{s}_0 + D/2 = \rho'/\lambda$  である．式(13)の廃棄率は  $1 - V(T)$  にほぼ比例するので，

減衰率が大きいと指数関数状に廃棄率は小さくなる．すなわち，分散値  $C_g^2$  が小さいほど

廃棄率は小さくなる．

式(34)における分散を，各パケット長分布について求める．

#### (1) 指数関数分布

パケット長分布を次式とすると

$$g_0(x) = \frac{1}{\bar{s}_0} e^{-x/\bar{s}_0}$$

式(3) より， $g(x)$  は図 4 に示すように

$$g(x) = \frac{1}{D} \left( 1 - e^{-x/\bar{s}_0} \right) \quad \text{for } 0 \leq x \leq D$$

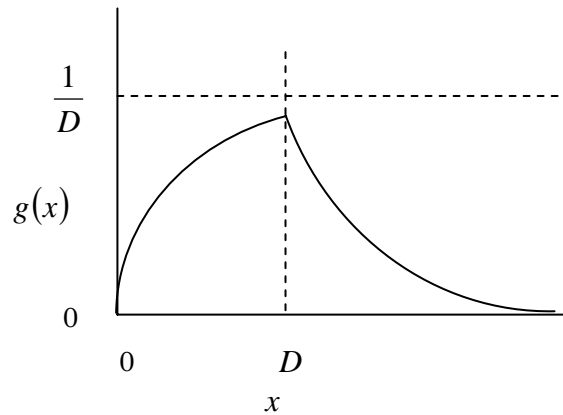


図 4. 指数関数分布における  $g(x)$

$$= \frac{1}{D} (e^{D/\bar{s}_0} - 1) e^{-x/\bar{s}_0} \quad \text{for } D < x$$

となり、次式のように指数関数分布に対する分散  $C_{g,M}^2$  を得る.

$$C_{g,M}^2 = \left[ \bar{s}_0^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right] / \bar{s}_v^2 \quad (35)$$

ここで,

$$(1 + C_{g,M}^2) \bar{s}_v / \bar{s}_0 = 2 + \frac{4}{3} \left( \frac{D}{2\bar{s}_0} \right)^2 / \left( 1 + \frac{D}{2\bar{s}_0} \right) > 2$$

であるので、空期間に関する分散  $O((D/2\bar{s}_0)^2)$  が取り入れられ、減衰率は式(23)の  $(1 - \rho')/\bar{s}_0$  より小さい。また、 $O((D/2\bar{s}_0)^2)$  が取り入れられていることから、式(23)より精度が高いといえる。

### (2) 固定長分布

$$g_0(x) = \delta(x - \bar{s}_0)$$

より、図5に示す

$$g(x) = l(x - \bar{s}_0)$$

となり、その分散は次式となる。

$$C_{g,D}^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{D}{2} \right)^2 / \bar{s}_v^2 \quad (36)$$

### (3) 均一分布

パケット長がある幅  $[0, 2\bar{s}_0]$  の範囲内で均一に分布しているとすると、

$$g_0(x) = \frac{1}{2\bar{s}_0} [u(x) - u(x - 2\bar{s}_0)],$$

さらに  $g(x)$  は図6の台形となり

$$g(x) = \frac{x}{2\bar{s}_0 D} \quad \text{for } 0 \leq x \leq D$$

$$= \frac{1}{2\bar{s}_0} \quad \text{for } D < x \leq 2\bar{s}_0$$

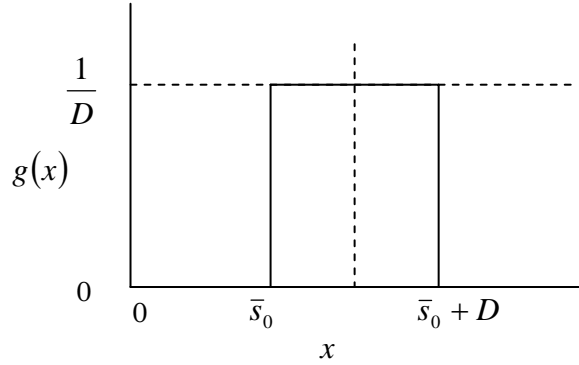


図5. 固定長における  $g(x)$

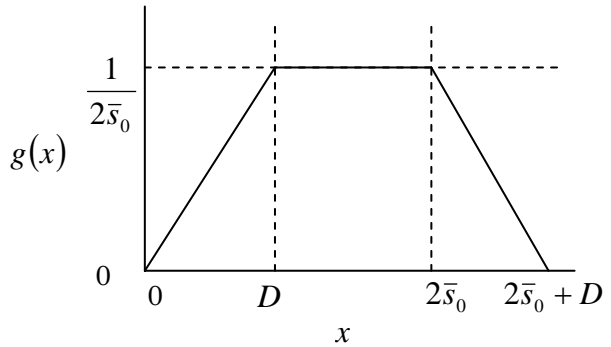


図6. 均一分布における  $g(x)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\bar{s}_0 D} [(2\bar{s}_0 + D) - x] \quad \text{for } 2\bar{s}_0 < x \leq 2\bar{s}_0 + D \\
&= 0 \quad \text{for } 2\bar{s}_0 + D < x,
\end{aligned}$$

その分散は次式となる.

$$C_{g,U}^2 = \frac{1}{3} \left[ \bar{s}_0^2 + \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right] / \bar{s}_v^2 \quad (37)$$

これら 3 つの分散のうち, 式(36)の固定長分布が最小であるので, その廃棄率は最小となる.

#### (4) 複数固定長分布

インターネットで転送される IP パケットでは, 40、552、576、1500 バイトなど特定パケット長のものが圧倒的である[22]. 実際の IP ネットワークを模擬するには, 複数個の特定パケット長のみで転送パケットが構成されていると考える必要がある.

$n$  個の特定パケット長をそれぞれ  $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , それぞれの到着率を  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$

とおく. 密度分布関数は

$$g_0(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - s_i)$$

となる. ここで

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{であり}$$

$$\bar{s}_0 = \sum_{i=1}^n p_i s_i = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i s_i}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda}, \quad \rho \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$$

である. さらに

$$g(x) = \sum_{i=1}^n p_i l(x - s_i)$$

$$1 + C_{g,MD}^2 = \left[ \sum_{i=1}^n p_i \left( s_i + \frac{D}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{D}{2} \right)^2 \right] / \bar{s}_v^2 \quad (38)$$

となる.

## 4. 数値例

### 4.1 近似式の精度

式(33)は、待ち時間  $x$  が十分大きくて、重い負荷 (heavy traffic) の場合での近似である。この計算式の精度を求めるため、文献[6]でのシミュレーション結果および文献[9]での指数関数分布の厳密解と比較する。

待ち時間  $x$  が大きく、重い負荷の場合の例として、 $B=256$ 、 $\rho=0.8$  におけるパケット廃棄率を FDL 粒度  $D$  に対して図 7 に示す。実線はパケット長分布が指数関数分布、破線は均一分布、および点線は固定長の場合の近似計算結果をそれぞれ示す。廃棄率の計算には、式(13)と(33)を用い、各分布の減衰率には式(35)、式(36)、および式(37)の分散式を用いた。また、平均パケット長である  $\bar{s}_0$  を時間単位、すなわち  $\bar{s}_0=1$  とした。丸、バツ、三角の各印は、文献[6]でのシミュレーション結果である。固定長分布の場合の誤差が最も大きい、それでも 25% 以内に収まっており非常によく近似であることが理解される。

図 8 は、負荷に対する廃棄率計算結果を示す。待ち時間  $x$  は比較的小さい場合  $B=32$  として求めた。線と記号の意味は、図 7 と同様である。負荷が軽い (light traffic) とき、指数関数、均一分布、固定長の順に精度の悪い結果となっており、たとえば負荷が 0.3 のとき、均一分布、固定長の廃棄率は、シミュレーション結果より 1 桁程度大きな値である。ただし、負荷が 0.7 以上となるとその誤差は 10% 以内となり、よい近似であることは理解される。指数関数分布の場合には、負荷が小さい場合でも近似精度はよく、すべての場合

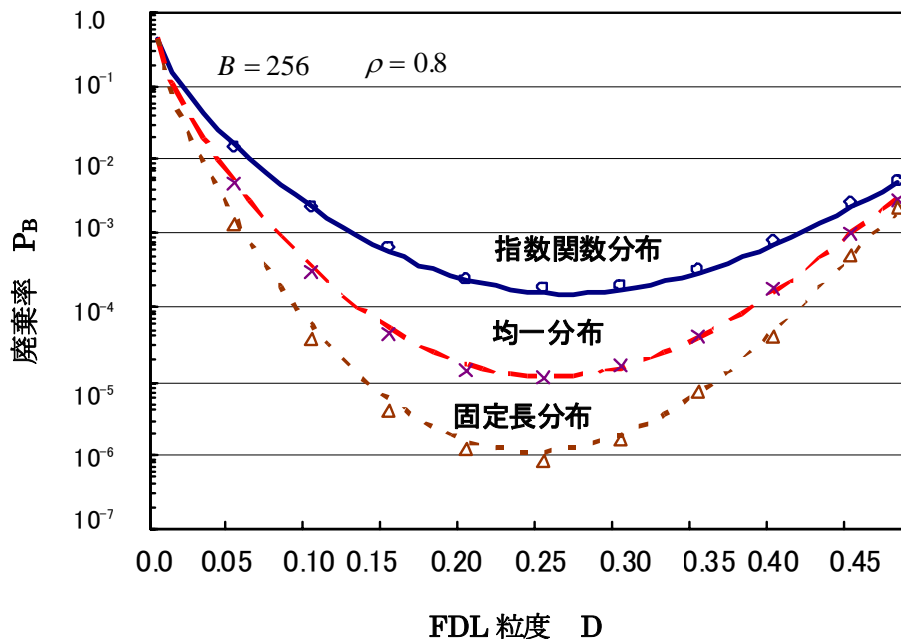


図 7. FDL 粒度  $D$  に対する廃棄率

(実線はパケット長分布が指数関数分布、破線は均一分布、および点線は固定長の場合の近似計算結果を、丸、バツ、三角の各印は文献[6]でのシミュレーション結果それぞれ示す。)

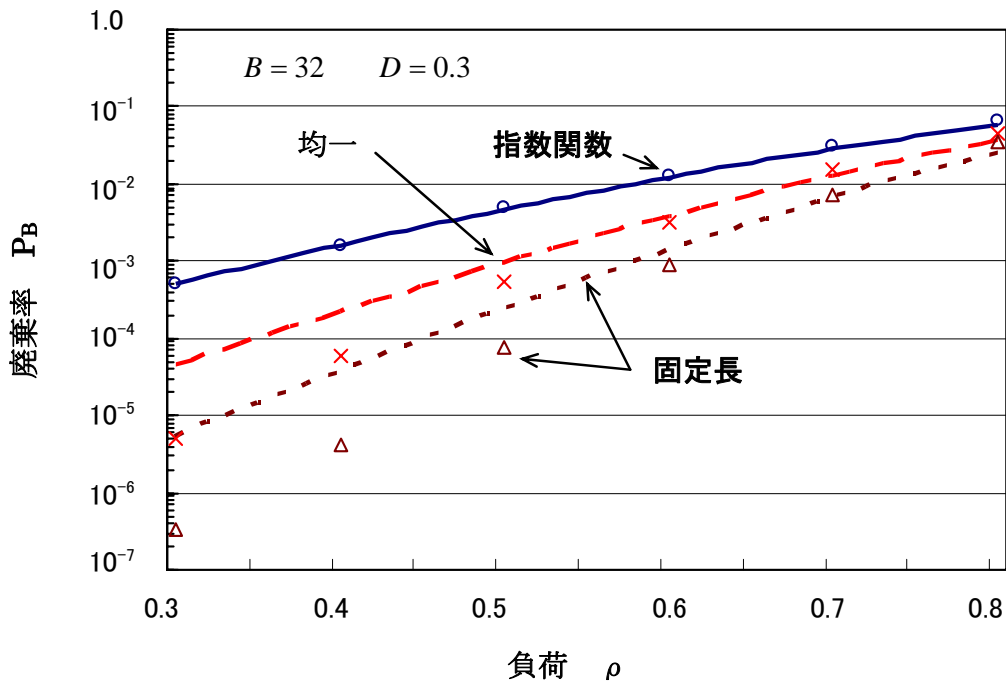


図 8. 負荷  $\rho$  に対する廃棄率  
(実線と記号は図 7 と同じ意味である.)

で 20%以内の精度を得ている. 廃棄率の値としては, シミュレーション結果より大きく計算されることから, 最悪の設計値としては利用できる.

指数関数分布における精度を, さまざまな負荷  $\rho$  と FDL 数  $B$  の値に対して確認した. 図 9 は,  $B=32$  における廃棄率を, さまざまな  $\rho$  と FDL 粒度  $D$  に対して求めた結果である. 無限長光バッファモデルにおける収束条件  $\rho_{eq} < 1$  より,  $D$  には次式の最大値  $D_{max}$  が存在する[10].

$$D_{max} = 2\bar{s}_0(1/\rho - 1) \quad (39)$$

実線は近似計算結果であり, 丸は文献[6]でのシミュレーション結果である. 負荷が軽い  $\rho = 0.4$  の場合でも, 十分な精度を保っている.

廃棄率を最小とする  $D$  の値  $D_{opt}$  は, 負荷の値により異なること,  $D_{opt}$  付近では  $D$  の変化に対して廃棄率は鈍感であること, FDL 数  $B$  の値およびパケット長分布にはあまり影響をうけないこと, などの性質が知られている[6]. 図 7, 図 9 と次に示す図 10 から,  $D_{opt}$  の値とその性質を読み取ることができる. たとえば,  $\rho = 0.8$  において  $D_{opt} \approx 0.25$  であるが,  $\rho = 0.4$  では  $D_{opt} \approx 1.4$  であり, 負荷により  $D$  の最適値は異なる.

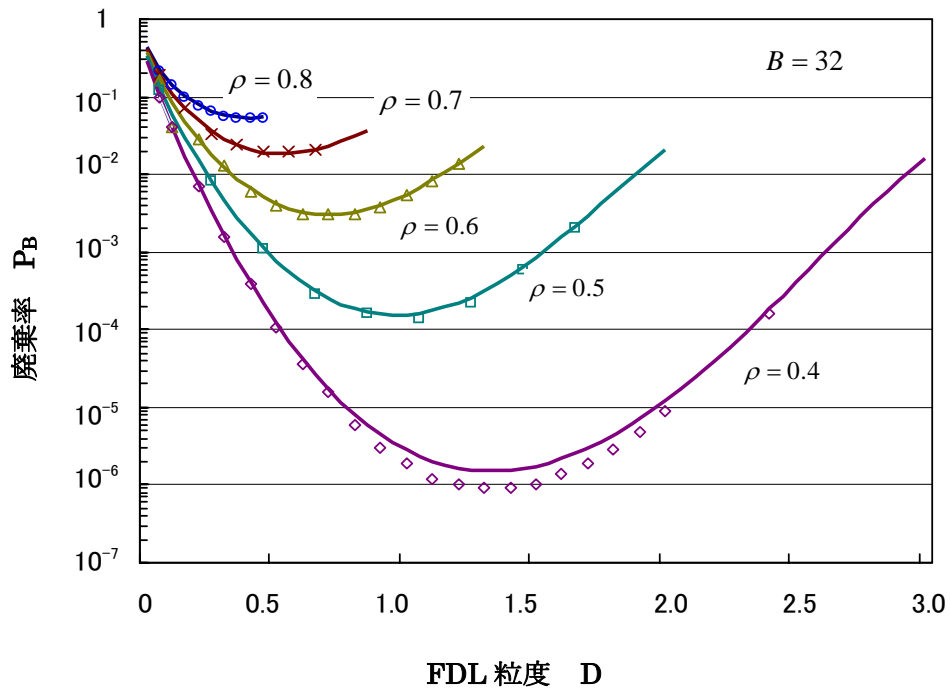


図 9.  $B=32$  における廃棄率  
(実線と近似計算結果, 各記号はシミュレーション結果[6]である.)

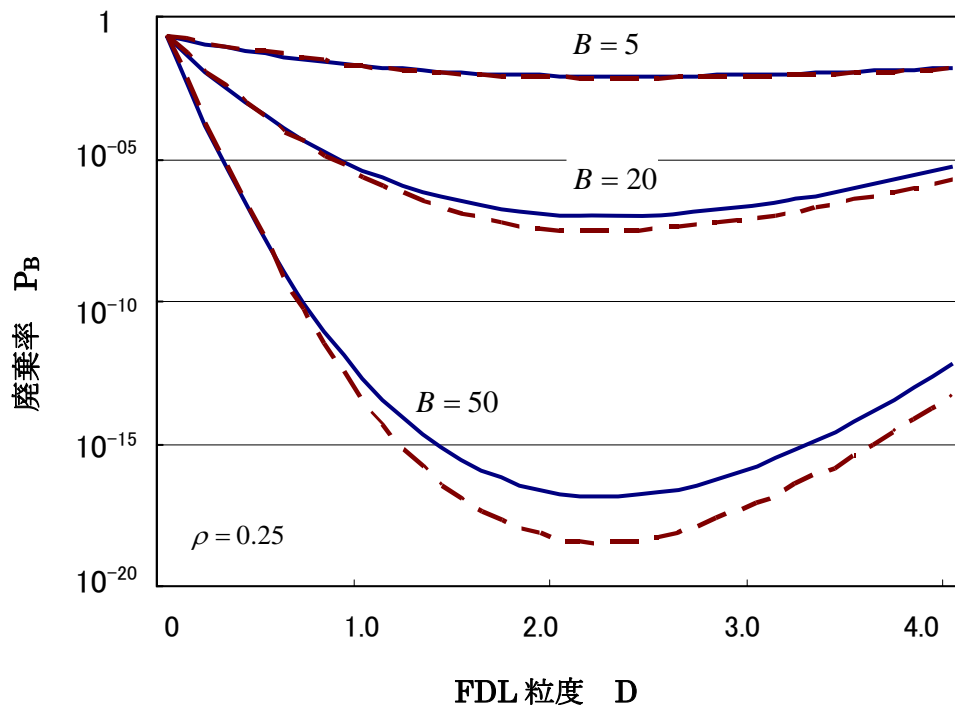


図 10.  $\rho=0.25$  における廃棄率  
(実線は近似計算, 破線は厳密解[9]を示す.)



図 10 は、FDL 数  $B$  をパラメータとして軽い負荷  $\rho = 0.25$  の場合における廃棄率計算結果を示す。  $B$  の値は、厳密解[9]と比較できるように選択した。実線は近似計算、破線は厳密解計算の結果である。  $B = 50$  の場合、厳密解と比較して近似計算結果は最大 50 倍高い値を示すが、  $B$  が小さくなるにつれ、廃棄率が上がるともに精度は増す。

これらの結果より、近似計算は厳密解より常に高い値を示すので、廃棄率の最悪値を求めるには本提案近似計算は有効であることがわかる。また、廃棄率が大きくなると精度が増すことも有利な点である。

平均遅延時間は、式(33)を用いると、式(7)より

$$\bar{w}_T = T \left[ 1 - \frac{1}{V(T)} \right] + \left( \frac{1}{\eta} + \frac{D}{2} \right) \left[ 1 - \frac{Q}{V(T)} \right] \quad (40)$$

より計算できる。待ち時間  $x$  が大きく、重い負荷 (heavy traffic) の場合の例として、  $B=256$ ,  $\rho=0.8$  における平均遅延時間を図 11 に示す。線と記号の意味は、図 7 と同様である。すべての分布においても精度はきわめて高く、誤差は最大でも 2% で読み取り精度程度である。

待ち時間  $x$  が比較的小さい場合  $B=32$  として求めた平均遅延時間を、図 12 に示す。負荷が軽い (light traffic) としほどシミュレーション結果より大きく計算されているが、その差は固定長、負荷 0.4 のときが最大で 20% である。すべて負荷に対して、シミュレーション結果よりわずかに大きく計算されているが、よい一致を見せている。大きい値にシフトしていることから、最悪値を求めることには利用できる。

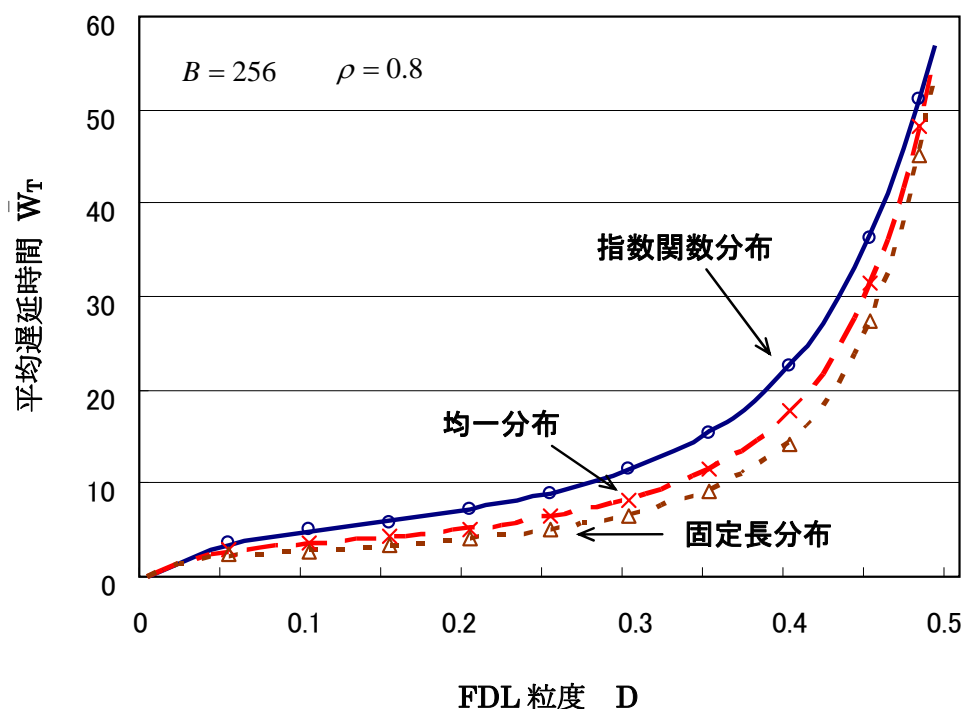


図 11. FDL 粒度  $D$ ,  $B = 256$  に対する平均遅延時間  
(実線と記号は図 7 と同じ意味である.)

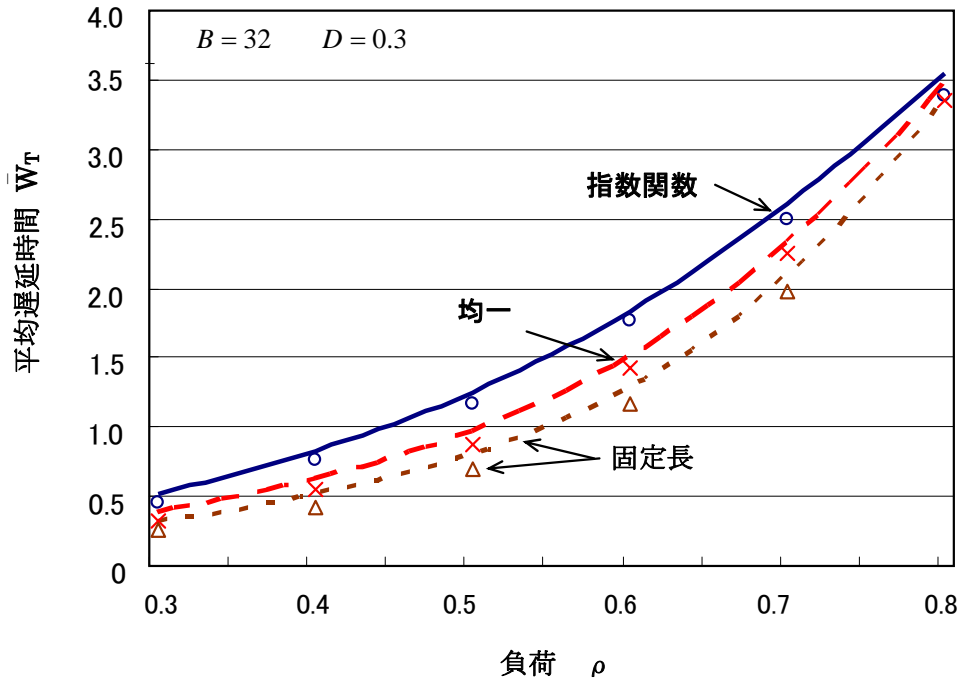


図 12. FDL 粒度  $D$ ,  $B = 32$  に対する平均遅延時間  
(実線と記号は図 7 と同じ意味である.)

## 4.2 実トラヒックへの適用

現実の IP ネットワークでは、特定パケット長にピークを持つ分布となっていることはよく知られている。そこで、複数固定長分布での廃棄率を求める。

Case.1 2 パケット長

$$s_1 = 64 \text{ バイト}, s_2 = 1518 \text{ バイト}, \text{よって } \bar{s}_0 = 791 \text{ バイト}, p_1 = p_2 = 0.5$$

Case.2 3 パケット長

$$s_1 = 64 \text{ バイト}, s_2 = 582 \text{ バイト}, s_3 = 1518 \text{ バイト}, \text{よって } \bar{s}_0 = 721 \text{ バイト},$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$$

ここで、これらのパケットにはレイア 2 におけるイーサネットフレームを想定している。したがって、最短 64 バイト、最長 1518 バイトである。

$B=256$ ,  $\rho=0.8$  におけるパケット廃棄率を、図 13 に示す。太線の実線は 2 パケット長分布、太線の点線は 3 パケット長分布、および細線は図 7 と同様、実線、破線、点線で指数関数、均一分布、固定長の場合をそれぞれ示す。2 パケット長、3 パケット長分布は、指数関数分布と均一分布との間に位置し、2 パケット長分布の方が廃棄率は大きい。パケット長分布における分散が大きいためである。実際の IP ネットワークでは、3 パケット長分布と均一分布を合計した分布となっているため、パケット長分布を実測した結果を正確に反映すると、図 13 に示すように、3 パケット長分布と均一分布との間に位置すると

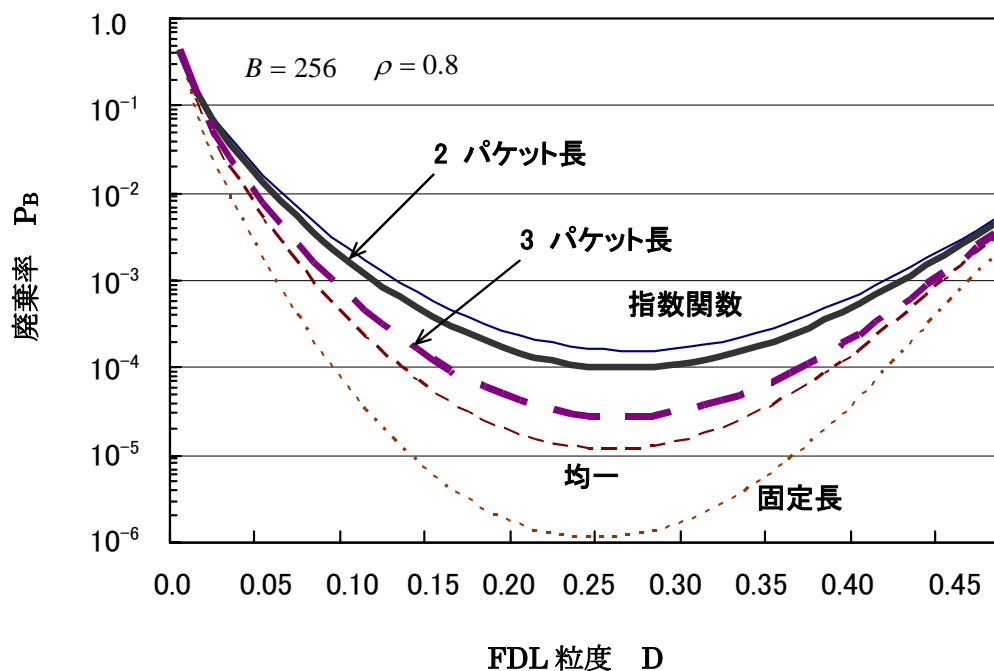


図 13.  $B = 256$ ,  $\rho = 0.8$ における廃棄率

(太線は 2 パケット長, 3 パケット長分布, 細線は指数関数, 均一, 固定長分布をそれぞれ示す.)

考えられる.

## 5. おわりに

本論文では, 一般分布パケット長に対して光パケット交換機バッファにおける廃棄率と遅延時間を与える近似式を確立した. 得られた近似式は, インターネット, NGN (next generation networks: 次世代情報通信ネットワーク) など, 実際のパケットネットワークに利用する光パケット交換機を設計する上で有力な武器になるものと確信している. 得られた結果は以下のとおりである.

- 1) 光バッファにおける廃棄率を簡便に計算する目的から, 擬似負荷をあらたに定義した. この擬似負荷は,  $M/G/1/K$  システムにおける負荷に代わるものである.
- 2) 一般分布パケット長に対して, 仮想待ち時間の蓄積分布関数 CDF を求める近似式を導出した. この近似式は, 待ち時間が十分大きくて, 負荷が重いときほど有効である.
- 3) 負荷が 0.7 以上のとき, 近似式による廃棄率計算結果は, シミュレーション結果や厳密解計算結果と比較して 10%以内の一致をみせた. しかしながら, 負荷が軽い場合には精度が悪く, 負荷 0.3 でシミュレーション結果の 10 倍の値となっている.
- 4) 廃棄率が高いと精度はよくなり, 負荷が軽くて精度が悪い場合においても, 常に厳密解より高い廃棄率であるため, 求めた近似式は最悪値を求めることに有効である.

さらに, 今後の課題と思われるテーマは以下のとおりである.

- i) 軽い負荷における近似計算精度の向上
  - ii)  $\rho > 1$ の重い負荷の場合における廃棄率計算
  - iii) 優先権付き光パケット交換機の構成提案とそのトラヒック理論
  - iv) ネットワーク全体でスループット向上策の提案とそのトラヒック理論
- などである.

## 参考文献

- [1] R. S Tucker, "The Role of Optical and Electronics in High-Capacity Routers," IEEE J. Lightwave Technol., Vol. 24, No. 12, pp. 4655-4673, 2006.
- [2] R. S Tucker et al, "Evolution of WDM Optical IP networks: A Cost and Energy Perspective," IEEE J. Lightwave Technol., Vol. 27, No. 3, pp. 243-252, 2009.
- [3] G. Grasso et al, "Role of Integrated Photonics Technologies in the Realization of Terabit Nodes," J. Opt. Commun. Netw., Vol. 1, No. 3, pp. B111-B119, 2009.
- [4] F. Callegati, "Optical Buffers for Variable Length Packets," IEEE Commun. Lett., Vol. 4, No. 9, pp. 292-294, 2000.
- [5] Xiaohua Ma, "Modeling and Design of WDM Optical Buffers in Asynchronous and Variable-Length Optical Packets Switches," Optical Commun., No. 269, pp. 53-63, 2007.
- [6] Jianming Liu et al., "Blocking and Delay Analysis of Single Wavelength Optical Buffer with General Packet Size Distribution," IEEE J. Lightwave Technol., Vol. 27, No. 8, pp. 955-966, 2009.
- [7] H. E. Kankaya and N. Akar, "Exact Analysis of Single-Wavelength Optical Buffers with Feedback Markov Fluid Queues," J. Opt. Commun. Netw., Vol. 1, No. 6, pp. 530-542, 2009.
- [8] W.Rogiest, D. Fiems, K.Laevens, and H. Bruneel, "Modeling the Performance of FDL Buffers with Wavelength Conversion", IEEE Trans. Commun., Vol. 57, No. 12, pp. 3703-3711, 2009.
- [9] W. Rogiest, and H. Bruneel, "Exact Optimization Method for an FDL Buffer with Variable Packet Length", IEEE Photon. Technol. Lett., Vol. 22, No. 4, pp. 242-244, 2010.
- [10] 村上泰司, "パケット交換機のトラヒック理論 (その1) —指数関数分布パケット長に対する近似解法—", 大阪電気通信大学研究論集(自然科学編), 第46号, p.9-30 (2011)
- [11] Murakami Y., "An Approximation for Blocking Probabilities and Delays of Optical Buffer With General Packet-Length Distributions," IEEE J. Lightwave Technol., Vol. 30, No. 1, pp. 54-66, 2012.
- [12] Percy H. Brill, "A Brief Outline of the Level Crossing Method in Stochastic Models," CORS Bulletin Vol. 34, No. 4, pp. 1-8, 2000.
- [13] for example, Villy B. Iversen, "Teletraffic Engineering and Network Planning", Technical University of Denmark, p. 270, 2010.
- [14] 滝根哲哉、伊藤大輔、西尾章治郎著「岩波講座インターネット5 ネットワーク設計

- 理論」岩波書店（2001年）、p.58、式(2.42)。
- [15] for example, L. Kleinrock, “Queueing Systems, Vol. 1: Theory”, p.203, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [16] W. Feller, “An Introduction to the Theory of Probability and its Applications,” NewYork: John Wiley, 1966, 1971.
- [17] A. A. Fredricks, “A Class of Approximations for the Waiting Time Distribution in a GI/G/1 Queueing System,” Bell Syst. Tech. J. Vol. 61, pp. 295-325, 1982.
- [18] J. Abate, G. L. Choudhury, and W. Whitt, “Exponential approximations for tail probabilities in queues, I: Waiting Times,” Oper. Res., Vol. 43, No. 3, pp. 885-901, 1995.
- [19] Y. Jiang, C-K. Tham, C-C. Ko, “An Approximation for Waiting Time Tail Probabilities in Multiclass Systems,” IEEE Commu. Lett., Vol. 5, No. 4, pp. 175-177, 2001.
- [20] L. Kleinrock, “Queueing Systems, Vol. II: Computer Applications”, John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [21] たとえば, 拙著「やさしい情報交換工学」森北出版（2009年）, p.66, 式(2.51).
- [22] Fei Xue et al., “Design and Experimental Demonstration of a Variable-Length Optical Packet Routing System With Unified Contention Resolution,” IEEE J. Lightwave Technol., Vol. 22, No. 11, pp. 2570-2581, 2004.

