

光パケット交換機のトラフィック理論（その 1）

— 指数関数分布パケット長に対する近似解法 —

A Traffic Theory for Optical Packet Switchers (Part 1)

– Approximate Solutions for Exponential Distribution Packet Length –

村上 泰司*

Yasuji Murakami

Abstract

Optical packet switchers are expected for future IP network core nodes, to overcome the throughput bottlenecks and the huge power consumptions of electronics nodes. Various optical packet switch architectures have been proposed, in which fiber delay lines (FDLs) are used for optical buffers. In this paper, a traffic theory for optical packet switchers is presented, and especially, approximate solutions for exponential distribution packet length are driven. The solutions are useful to calculate packet loss probabilities and mean packet delay times.

1. はじめに

インターネットトラフィックが毎年前年比 1.5 倍の伸び率で増大していく状況において、電子処理による IP ルータでは転送能力に必ず限界が現れる。また、IP ルータの電力消費量もこのまま増大を続けられれば、電力コストが運用コストの大きな比重を占めるようになるとともに、地球温暖化を助長する結果となる。大きくはこの 2 つの問題を解決する方法として、光信号のままパケットを処理する光パケット交換機の登場が期待されている。すなわち、光ファイバ通信システムにより 1 回線の伝送速度が 100Gbps に達する状況になると、伝送能力の高い光技術を用いた光交換機が、次世代の IP ルータを担うことになるはずであるという期待である。

光は、もともとビット情報を小さいパワーで転送することは得意であるが、光自身を制御することは得意ではない。光パケットを光のまま転送処理するパケット交換機は、多くの研究者の期待を背負いその実現に向けて精力的な研究が続けられている[1-2]が、まだまだ道は遠いのが現状である。メモリや論理演算など、明らかに光技術では不得意な分野があるからである。少なくとも、論理演算は電氣的に行うことで解決を図るのであろう。

メモリには、遅い光 (slow lights) など精力的に研究されているものがあるが、実現性からみると光ファイバ遅延線 (optical fiber delay lines : FDL) を利用することが近道である。FDL は、電気 RAM と異なる次のような特徴を持つ。

- (1) RAM では任意の蓄積時間と任意時刻での読み出しが実行できるが、FDL はその長さ に比例した一定量の蓄積時間しか得られない。FDL での蓄積時間は、光ファイバ長に比例するので、FDL 長の単位を遅延時間で考える。これを**時間粒度** (time granularity) と呼ぶ。

*大阪電気通信大学 情報通信工学部 通信工学科

(2) 衝突回避に間に合わなければ、パケットは廃棄される。

光パケット交換機においてパケット廃棄率や平均遅延時間などの設計値を求めるトラフィック理論の多くは、FDLを利用した光バッファ構成を扱っている。光バッファ構成には多くの提案があるが、通常は時間粒度の整数倍のFDLを数多く用意して、時間粒度の最適化を図るものとなっている[3-6]。すなわち、FDLの長さ分布をどのようにすれば、パケット廃棄率を抑えることができるか、という問題である。これに対して、近似数値解[3-4]や数値シミュレーション[5-6]などさまざまな取り組みがされているが、いずれも繰り返し計算を必要とし、見通しのよい理論式を得ているわけではない。

本論文は、光パケット交換機のトラフィック理論に関するいままでの成果を踏まえ、文献[5]の記述に沿った内容を理解しやすい形に整理するとともに、指数関数分布パケット長に対する待ち時間分布の近似解を与えている。導出した近似解の精度をシミュレーション結果と比較し、さらに低負荷状態における光バッファ構成の検討を行っている。

2. 光バッファモデル

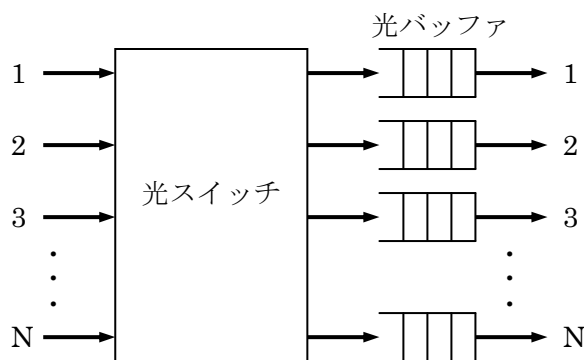


図1. 出力待ち行列形光スイッチの基本構成

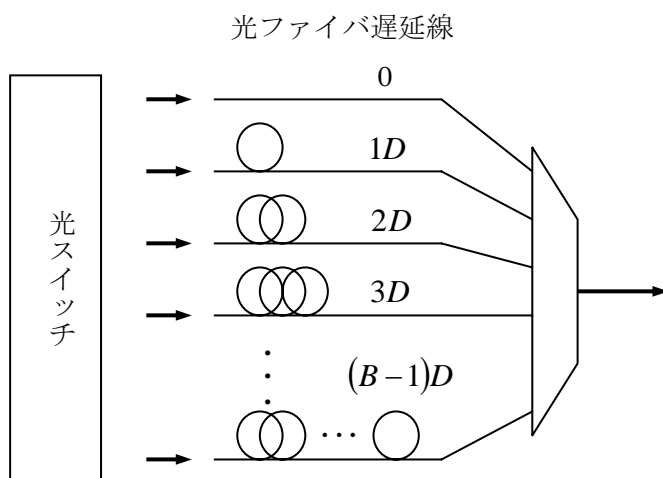
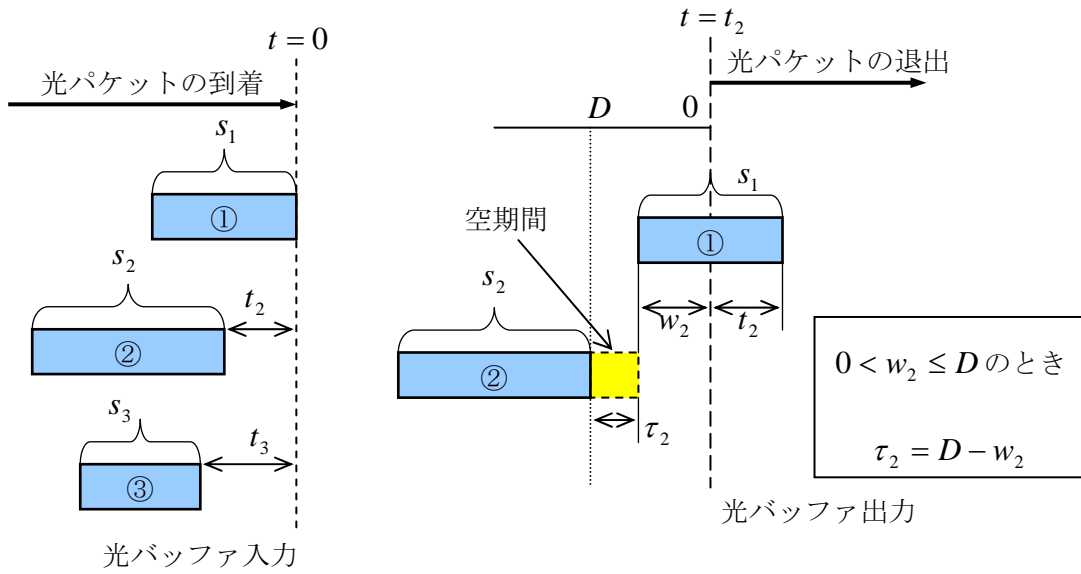


図2. 光ファイバ遅延線による光バッファ

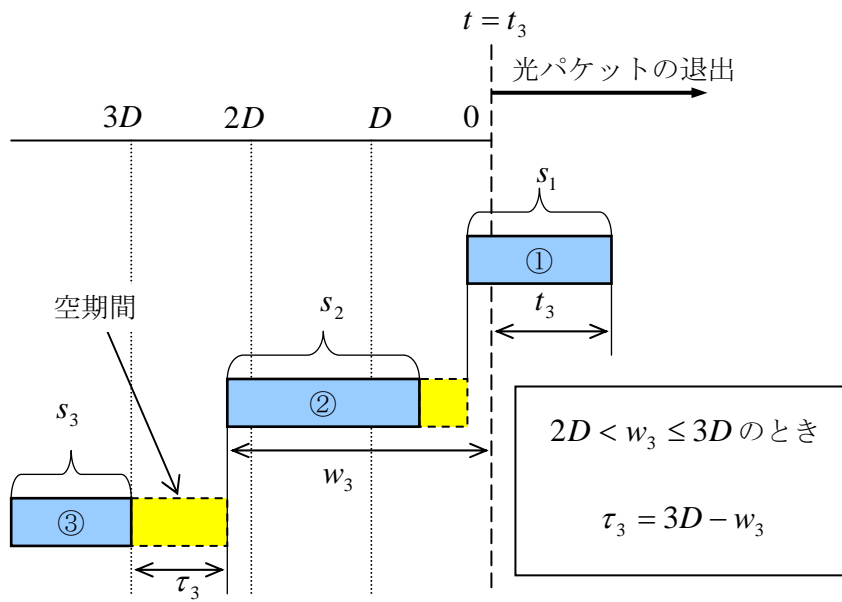
光交換機の構成として、図1に示すように、スループット制限のない出力待ち行列形[7]を考える。光スイッチの実現方法には、空間スイッチ[1]と波長スイッチ[2]が提案されており、前者は空間多重方式を後者は波長多重方式を利用している。いずれも、出力待ち行列形光交換機を実現できる。

待ち行列となる出力バッファにFDLを利用する構成を、図2に示す。1つの出力に対して光パケットの衝突を回避するため、 B 本のFDLを選択できる構成で、 i 番目のFDLは $(i-1)D$ 、 $1 \leq i \leq B$ の遅延を生じる。ここで、 D は時間粒度であり、光ファイバの長さ単位を L とすると、 $D = nL/c$ 、 n ：光ファイバの実効屈折率、 c ：真空中の光速である。したがって、この光バッファでは、0、

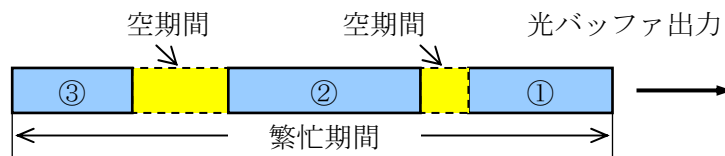


(a) パケット①の到着 ($t = 0$)

(b) パケット②の到着 ($t = t_2$)



(c) パケット③の到着 ($t = t_3$)



(d) パケット①～③の出力

図 3 光ファイバ遅延線バッファにおけるパケットの流れ

$1D, 2D, \dots, T = (B-1)D$ の離散的な遅延時間となる到着順処理 (first come first service : FCFS) が行われる. $T = (B-1)D$ 以上の遅延時間が必要となるパケットは破棄される.

図2の光バッファにおいて, 光パケットが流れる様子を図3に示す. 今, 図(a)に示すように, ①, ②, および③の3個の光パケットが, 光バッファの入力部にそれぞれ時刻0, t_2 , および t_3 に到着することとする. また, 光パケット①は十分に長いので, 後続する光パケット②と③とは出力で衝突するとする. そこでは, 衝突を回避するため次のような処置が取られる.

図(b)に示すように, 時刻 t_2 において, パケット②は少なくとも w_2 , $0 < w_2 \leq D$ の待ち時間が必要であるとき, ②は2番目のFDLに転送される. このとき, FDL長が離散的であるために $\tau_2 = D - w_2$ の空期間 (void periods) が必要となる.

時刻 t_3 においては, 図(c)に示すように, パケット③は w_3 , $2D < w_3 \leq 3D$ の待ち時間が必要であるとなると, ③は4番目のFDLに転送される. パケット②とは, $\tau_3 = D - w_3$ の空期間をもつ. したがって, ①から③までの光パケットは, 図(d)に示すように, パケット②, ③の先頭に空期間がついた状態で出力される. この空期間は, FDLが時間粒度 D を単位とする離散的な値であるため, FDLに転送されるパケットに必ず付加されるものである. 結果的に, パケット①から③までは連続したパケット列とみなすことができ, この期間を**繁忙期間** (busy period) という.

一般的には, 図4に示すように, 到着したパケットが, 少なくとも w の待ち時間が必要

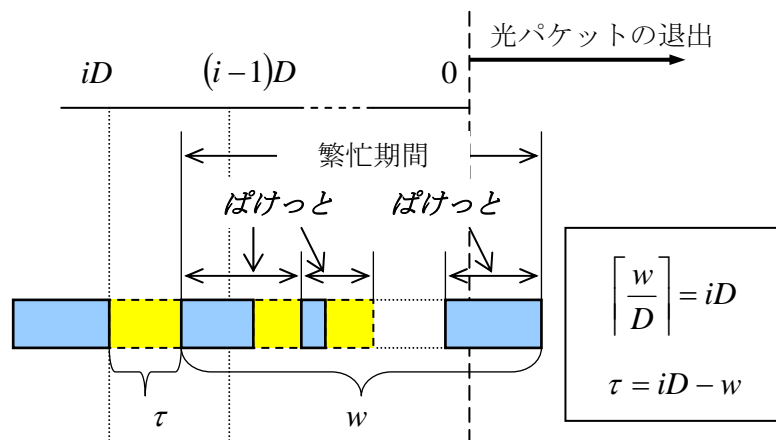


図4 光バッファにおける待ち行列

なとき、このパケットは次のように処理される。

(1) $(i-1)D \leq w < iD$ のとき、 $(i+1)$ 番目の FDL に転送される。このとき、先頭には

$$\tau = iD - w, \quad \left\lceil \frac{w}{D} \right\rceil = iD, \quad (2.1)$$

の空期間 τ が付加される。ここで、 $\lceil x \rceil$ は、 x を超える最小整数を意味する。

(2) $T = (B-1)D < w$ のとき、廃棄される。

空期間が付加される分、交換機にかかるパケット負荷は実際の負荷より過剰となる。空期間は、光バッファが空のとき到着するパケットには付加されないが、光バッファにパケットが蓄積されているときには付加される。そこで、空期間を含めたパケットをあらたに「**ばけつと**」という名称で定義する。すなわち、**ばけつと**には、

- ① 光バッファが空のとき到着するパケット。これを、**初期到着パケット** (first arrival packets) と呼び、空期間を持たない。
- ② 光バッファにパケットが蓄積されているとき到着するパケット。これを、**非初期到着パケット** (non-first arrival packets) と呼び、空期間を含んだ長さとなる。

の2種類のパケットがある。これら**ばけつと**が隙間なく連続して出力される期間が、繁忙期間となる。

3. トラヒック理論解析

IP パケットトラヒックの到着過程においては、多くのトラヒックを集線する基幹ネットワークにおいて統計的な性質がポアソン分布に収束することが知られており、近似的にマルコフ過程であるとして設計問題に利用することができる。パケット長は 58、594、1518 バイトなどにピークをもつ分布となっており、不定形である[8]。したがって、M/D/1/K システムが光パケット交換機モデルにふさわしいと思われるが、M/D/1/K システムとの違いは次の2点にある。

- ① 非初期到着パケットに、空期間が付加されること、
- ② システム容量に制限があるのではなく、蓄積時間に制限があること。

以下では、光パケット廃棄率と平均遅延時間の一般解を求める。

3.1 等価負荷

到着する光パケットはマルコフ過程に従うとし、その到着率を λ 、パケット長を s_0 とおく。 s_0 の分布について次の関数を定義する。

$g_0(x)$: s_0 の確率密度関数 (pdf : probability density function),

$G_0(x)$: s_0 の蓄積分布関数 (CDF : Cumulative Distribution Function), または確率

分布関数 (PDF : probability distribution function).

したがって, 平均パケット長 \bar{s}_0 は次式となり,

$$\bar{s}_0 = \int_0^{\infty} x g_0(x) dx \quad (3.1)$$

光パケットの負荷 ρ は次式となる.

$$\rho = \lambda \bar{s}_0 \quad (3.2)$$

次に, 空期間 τ の分布を考える. τ の確率密度関数 (pdf) を $l(x)$, 蓄積分布関数 (CDF) を $L(x)$ とおく. パケットの到着はポアソン分布で, パケット長には依存しないとしているので, τ は $[0, D]$ の間で均一に分布しているとすることができる. したがって, τ の平均値 $\bar{\tau}$ は次式となる.

$$\bar{\tau} \equiv \int_0^D x l(x) dx = \frac{D}{2} \quad (3.3)$$

さらに, 非初期到着パケットの **ばけつと** 長, すなわちサービス時間 s_v は, パケット長 s_0 と空期間 τ の合計

$$s_v = s_0 + \tau \quad (3.4)$$

であるので, s_v の確率密度関数 (pdf) を $g(x)$, 蓄積分布関数 (CDF) を $G(x)$ とおくと,

$$g(x) = g_0(x) \otimes l(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x-y) l(y) dy \quad (3.5)$$

で求められる. ここで, \otimes は畳み込み積分 (convolution integral) である.

非初期到着 **ばけつと** の平均サービス時間 \bar{s}_v は

$$\bar{s}_v = \int_0^{\infty} x g(x) dx \quad (3.6)$$

より求められるが, **ばけつと** の負荷で定義される **等価負荷** ρ_{eq} を用いると,

$$\rho_{eq} = \lambda \bar{s}_v \quad (3.7)$$

より求められる場合がある. 等価負荷は, 空期間を負荷に取り込んだものである.

3.2 無限長光バッファ

(a) 収束条件

最初に、 $B \rightarrow \infty$ とした無限長光バッファを考える．ここでは、無限の蓄積時間が提供されるので、パケットの廃棄はない．すなわち、パケット損失のない状態である．このシステムにおける仮想待ち時間分布より、有限長バッファにおける解が求められる．

今、光バッファが繁忙期間にないとき、すなわち空のときの確率を Q とおくと、G/G/1システムにおいて

$$\rho_{eq} = 1 - Q \quad (3.8)$$

が成立する[9]．初期到着パケットの平均サービス時間が \bar{s}_0 であるのに対して、非初期到着

パケットのそれは式(3.3)より $\bar{s}_0 + D/2$ であるので、それぞれを加重平均して

$$\bar{s} = Q\bar{s}_0 + (1-Q)\left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2}\right) = \bar{s}_0 + \rho_{eq} \frac{D}{2} \quad (3.9)$$

を得る．ここで、式(3.8)を用いた．さらに、式(3.7)に代入すると次式を得る．

$$\rho_{eq} = \frac{\rho}{1 - \frac{D}{2\bar{s}_0}\rho} \quad (3.10)$$

$D > 0$ である限り、 $\rho_{eq} > \rho$ である．また、時間粒度 D が大きくなると、 ρ_{eq} は増加する．システムが収束するための条件は、 $\rho_{eq} < 1$ であり、式(3.10)を用いると、これは

$$\lambda\left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2}\right) < 1 \quad (3.11)$$

とする条件となる．実際の負荷 $\rho = \lambda\bar{s}_0$ が1より小さい場合でも、 $\rho_{eq} > 1$ となることがあることに注意する必要がある．そこで、擬似負荷 ρ' を

$$\rho' = \lambda\left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2}\right) \quad (3.12)$$

と定義すると、 $\rho' < 1$ が、 $\rho_{eq} < 1$ と同等なシステム収束条件である．

擬似負荷 ρ' は、すべての到着パケットに平均空期間 $D/2$ を加えた負荷であるため、

$$\rho' - \rho_{eq} = \lambda \frac{D}{2} Q \quad (3.13)$$

となり，非初期到着パケットに平均空期間 $D/2$ を付加した分， ρ_{eq} より大きな値となる．

(b) 仮想待ち時間分布

無限長光バッファにおける **ぱけつと** の仮想待ち時間 (virtual waiting time) に関して，定常状態における確率分布として次の関数を定義する．

$v(x)$: **ぱけつと** の仮想待ち時間 x における確率密度関数 (pdf)，および

$V(x)$: **ぱけつと** の仮想待ち時間 x に対する蓄積分布関数 (CDF)．

ここで，「仮想」待ち時間と呼ぶのは，現実にはない無限長光バッファを想定しているためである．また，**ぱけつと** 到着をポアソン分布としているため，PASTA (Poisson arrival see time average) の関係[10]より，到着，退出などの時間要素を消去して定常状態を仮定した．したがって， $v(x)$ と $V(x)$ は時間平均である．規格化条件より

$$V(\infty) = Q + \int_{+0}^{\infty} v(\xi) d\xi = 1, \text{ および}$$

$$V(x) = V(0) + \int_{+0}^x v(\xi) d\xi \tag{3.14}$$

より，次式を得る．

$$V(0) = Q, \text{ および } v(0) = \lambda Q \tag{3.15}$$

ここで，待ち時間のないパケットの確率密度はバッファが空のとき到着するパケット数であるので，第2式が成立する．

待ち行列モデルにおいて待ち時間分布を解析的に求める場合には，サンプル時間に到着する客の挙動を丹念に追い，その挙動の経過時間から微積分方程式を求める方法が一般的であるが，理解が難しくかつ煩雑である．より直感的に求める方法に，**レベル交差法** (level crossing method) [11]がある．特に，ポアソン到着過程でかつ FCFS 処理規則のモデルには有効である．

図5に，レベル交差法を理解するため，経過時間に対する仮想待ち時間変化を示す．実線で示したサンプル挙動をみると，仮想待ち時間は**ぱけつと**の到着ごとに垂直に上昇するが，到着がないときには時間の経過に比例して下降する．そこで，任意の待ち時間 x に着目し，そのレベルを図には横点線で示した．観測時間 $[0, t]$ において，サンプル挙動が垂直上昇してレベル x を交差する点の数を $N_{up}(t)$ ，下降して交差する点の数を $N_{down}(t)$ とおくと，単位時間あたりの交差点数は， $t \rightarrow \infty$ において次式となることが証明されている．

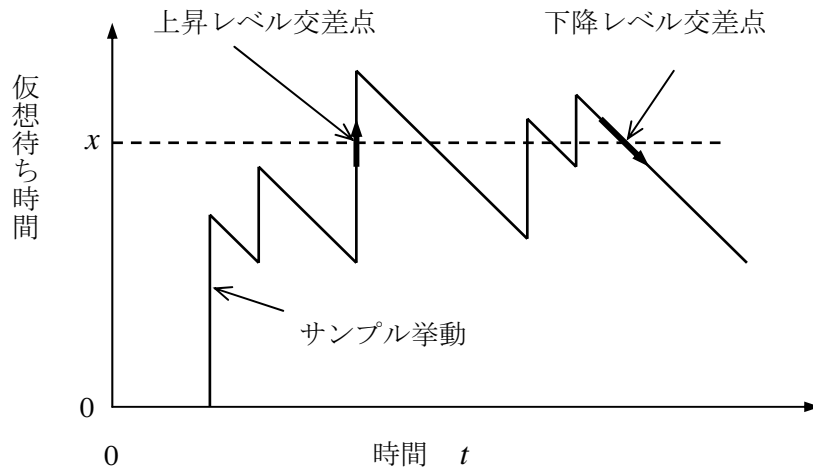


図5 経過時間に対する仮想待ち時間（レベル交差法）

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{up}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_{down}(t)}{t} = v(x) \quad (3.16)$$

すなわち、

- (1) 時間当たりの上昇交差点数と下降交差点数は、 $t \rightarrow \infty$ において等しい、
- (2) この時間当たりの交差点数は、レベル x における確率密度関数に等しい。

式 (3.16) を用いて、仮想待ち時間分布関数に関する方程式を求める。今、図3に示すパケット①、②、および③の到着を仮想待ち時間であらわすと、図6となる。ここで、上昇交差点のみを考える。

パケット①は初期到着パケットであるので、レベル0から垂直に立ち上がる。この上昇がレベル x を交差するには、パケット長が x 以上である必要がある。単位時間に λ 個到着するパケットの長さ CDF が $G_0(x)$ であるので、交差する時間割合は $\lambda[1 - G_0(x)]$ となる。

一方、時間 t_2 で到着するパケット②は非初期到着パケットであるので、その**ばけつと**長 CDF は $G(x)$ である。 t_2 における仮想待ち時間を ξ とすると、パケット②の到着によりレベル x を交差する時間割合は $\lambda[1 - G(x - \xi)]$ となる。レベル0である存在確率は Q 、レベル ξ である存在確率は $v(\xi)$ であるので、加重平均をとると式 (3.16) は

$$v(x) = \lambda[1 - G_0(x)]Q + \lambda \int_{+0}^x [1 - G(x - \xi)]v(\xi)d\xi \quad (3.17)$$

と求まる。ここで、右辺第2項は、 $+0 < \xi \leq x$ の範囲にある ξ 全体に加重平均した。

式(3.17) は pdf に対する積分方程式であり、これをラプラス-スチュルチェス変換

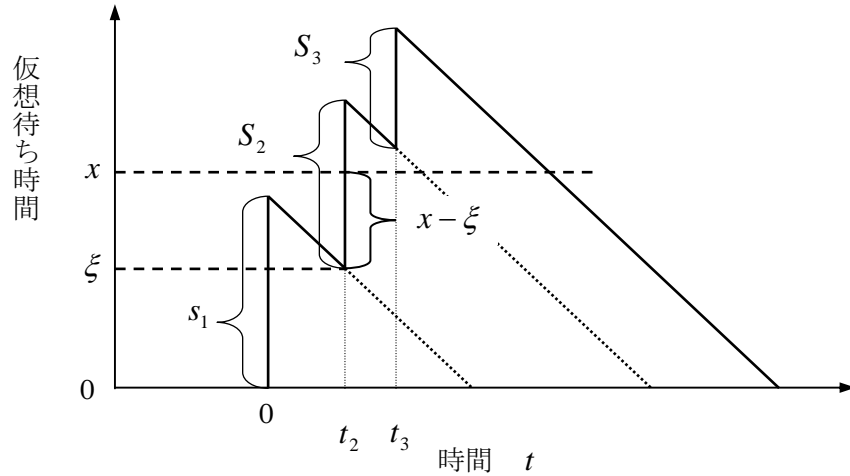


図6 仮想待ち時間の推移

(Laplace-Stieltjes transform : LST) で求める. 定数項を除去するため, x で微分して,

$$\frac{dv(x)}{dx} = -\lambda Q g_0(x) + \lambda v(x) - \lambda \int_{+0}^x g(x-\xi) v(\xi) d\xi \quad (3.18)$$

を得, さらに LST を実行して

$$\theta v^*(\theta) - v(0) = -\lambda Q g_0^*(\theta) + \lambda v^*(\theta) - \lambda g^*(\theta) v^*(\theta) \quad (3.19)$$

を得る. ここで, * は各関数のラプラス変換を示す. $v(0) = \lambda Q$ を用いると, 最終的に

$$v^*(\theta) = \frac{\lambda Q [1 - g_0^*(\theta)]}{\theta - \lambda [1 - g^*(\theta)]} \quad (3.20)$$

となる. 式(3.20)をラプラス逆変換すると, 仮想待ち時間 x に対する pdf 実関数を得ることができる.

3.3 有限長光バッファ

(a) 関数とその定義

有限長光バッファでは, 仮想待ち時間 x が最大許容遅延時間である $T = (B-1)D$ を超えると, **ぱけつ**とは廃棄される. あらためて, **ぱけつ**を分類すると, 次の3種類となる.

- (i) 初期到着パケット; バッファは空であるので $x=0$ であり, 通過パケットである,
- (ii) 非初期到着パケットでかつ通過パケット, すなわち $0 < x \leq T$,
- (iii) 非初期到着パケットでかつ廃棄されるパケット, $T < x$.

有限長光バッファにおける関数を, 以下のように, 下付 T を添えて無限長光バッファのそれらと区別する. 廃棄された **ぱけつ**とはバッファ内に存在しないことが, 無限長バッファモデルとの違いである.

$v_T(x)$: 到着 **ぱけつ** と全体 (上記分類で(i), (ii), および(iii)) に対して定義され, 無限長バッファモデルでの仮想待ち時間 x を変数とする確率密度関数 pdf. $v(x)$ との違いは, 廃棄された **ぱけつ** が存在するので, バッファ内における実際の **ぱけつ** と密度はより小さい. このため, 空となる確率 Q_T が Q より大きくなる点である.

$V_T(x)$: $v_T(x)$ の蓄積分布関数 CDF,

$W_T(x)$: 通過 **ぱけつ** と (すなわち(i)と(ii)) のみを対象とした, 仮想待ち時間 x に関する蓄積分布関数 CDF. この定義により, 次式が成立する.

$$W_T(x) = \frac{V_T(x)}{V_T(T)} \quad (3.20)$$

\bar{W}_T : 通過 **ぱけつ** とのみを対象とした平均遅延時間,

\bar{w}_T : 通過した実パケットのみを対象とし, 空期間を含まない平均遅延時間,

\bar{S}_T : 通過 **ぱけつ** とのみを対象とした平均 **ぱけつ** と長,

P_B : 到着全パケットに対する閉塞確率, およびパケット廃棄率, 損失率,

Q_T : バッファが空である確率. すなわち,

$$Q_T = V_T(0). \quad (3.21)$$

廃棄された **ぱけつ** があると, 空の割合は増加する. 負荷はその分減少するので, 式(3.7), (3.8)に代わりに次式が成立する.

$$1 - Q_T = (1 - P_B) \lambda \bar{S}_T \quad (3.22)$$

(b) 平均遅延時間と平均 **ぱけつ** と長

$x \leq T$ で到着する **ぱけつ** とに対しては, レベル交差法を利用すると, 式(3.17)と同様に

$$v_T(x) = \lambda [1 - G_0(x)] Q_T + \lambda \int_{+0}^x [1 - G(x - \xi)] v_T(\xi) d\xi \quad (3.23)$$

が成り立つ. 式(3.17)と同じ方程式であるため, $[0, T]$ にある x に対しては, $v_T(x)$ と $v(x)$ 解の形は同じであり, 相互に比例関係にある. そこで, 次式とおく.

$$v_T(x) = \alpha v(x), \quad \alpha > 0, \quad \text{および } 0 \leq x \leq T \quad (3.24)$$

式(3.24)を式(3.23)に代入して、式(3.17)と比較すると、

$$\alpha = \frac{Q_T}{Q} = \frac{V_T(0)}{V(0)} \quad (3.25)$$

となる。式(3.25)より、仮想待ち時間分布に関する次の関係式を得る。

$$v_T(x) = \frac{Q_T}{Q} v(x), \quad V_T(x) = \frac{Q_T}{Q} V(x), \quad x \leq T \quad (3.26)$$

式(3.20)、(3.26)を用いると、通過**ばけつと**に対する遅延時間 CDF は、

$$W_T(x) = \frac{V(x)}{V(T)}, \quad x \leq T \quad (3.27)$$

となり、その平均遅延時間は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{w}_T &= \int_0^T x dW_T(x) = \int_0^T x \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{V(T)} = \left[x \frac{V(x)}{V(T)} \right]_0^T - \int_0^T \frac{V(x)}{V(T)} dx = T - \int_0^T \frac{V(x)}{V(T)} dx \\ &= T - \int_0^T \frac{V(x)}{V(T)} dx \end{aligned} \quad (3.28)$$

通過**ばけつと**のうち、待ち時間が 0 となる確率は、式(3.27)より

$$W_T(0) = \frac{V(0)}{V(T)} = \frac{Q}{V(T)} \quad (3.29)$$

となる。これは、**ばけつと**分類(i)と(ii)に対する(i)の割合である。したがって、**ばけつと**分類(ii)の割合、すなわち通過**ばけつと**のうち非初期到着パケットである確率は $[1 - Q/V(T)]$

である。この非初期到着パケットには、FDL に入力する際、平均 $D/2$ の空期間が加わるため、通過する実パケットのみをみたときの平均遅延時間として次式を得る。

$$\bar{w}_T = T - \int_0^T \frac{V(x)}{V(T)} dx + \frac{D}{2} \left[1 - \frac{Q}{V(T)} \right] \quad (3.30)$$

通過**ばけつと**のみを対象とした平均**ばけつと**長 \bar{S}_T は、次のようにして求めることができる。分類(i) **ばけつと**の平均長は \bar{s}_0 であり、分類(ii) **ばけつと**のそれは $(\bar{s}_0 + D/2)$ であるので、それぞれの存在確率で加重平均をとれば、次式を得る。

$$\bar{S}_T = \bar{s}_0 \frac{Q}{V(T)} + \left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) \left[1 - \frac{Q}{V(T)} \right] = \bar{s}_0 + \frac{D}{2} \left[1 - \frac{Q}{V(T)} \right] \quad (3.31)$$

(c) パケット廃棄率

パケット到着はポアソン過程であるので，PASTA の関係により，パケット廃棄率はパケットが到着したときの閉塞確率に等しい．閉塞は $x = T$ のとき起きるので，

$$P_B = 1 - V_T(T) \quad (3.32)$$

がパケット廃棄率の基本式である．

$V_T(T)$ を求める．式(3.22)と(3.32)，さらに式(3.26) より

$$V_T(T) = \frac{1 - Q_T}{\lambda \bar{S}_T} = \frac{Q_T}{Q} V(T) \quad (3.33)$$

から Q_T について

$$Q_T = \frac{Q}{Q + \lambda \bar{S}_T V(T)} \quad (3.34)$$

を得て，式(3.34)を式(3.33)，(3.26)に代入すると，次式を得る．

$$V_T(x) = \frac{V(x)}{Q + \lambda \bar{S}_T V(T)}, \quad V_T(T) = \frac{V(T)}{Q + \lambda \bar{S}_T V(T)} \quad (3.35)$$

$$P_B = 1 - \frac{V(T)}{Q + \lambda \bar{S}_T V(T)} \quad (3.36)$$

式(3.36)では， \bar{S}_T という有限長光バッファにて定義された変数が含まれている．そこで，式(3.31)，および式(3.2)，(3.7)～(3.9)を用いて変形すると

$$Q + \lambda \bar{S}_T V(T) = 1 - \lambda \left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) [1 - V(T)] \quad (3.37)$$

を得，式(3.36)は結局次式となる．

$$P_B = \frac{\left[1 - \lambda \left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) \right] [1 - V(T)]}{1 - \lambda \left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) [1 - V(T)]} \quad (3.38)$$

無限長光バッファでの変数のみで表される式が得られた．したがって，無限長光バッファモデルでの解を求めれば，有限長光バッファでの解を得ることができる．

(d) 考察

式(3.38)は、式(3.12)の擬似負荷 ρ' を用いると

$$P_B = \frac{(1-\rho')[1-V(T)]}{1-\rho'[1-V(T)]} \quad (3.39)$$

とおける。 $D \rightarrow 0$ のとき、 $\rho' \rightarrow \rho$ であるので、式(3.39)は

$$P_B = \frac{(1-\rho)[1-V(T)]}{1-\rho[1-V(T)]} \quad (3.40)$$

となる。式(3.40)は、M/G/1/K システムの廃棄率に関する一般式である。

M/G/1 システムにおいて系内客数が K 以上となる確率を E_K とおくと、M/G/1/K システムの廃棄率は次式で表される[12].

$$P_B = \frac{(1-\rho)E_K}{1-\rho E_K} \quad (3.41)$$

M/M/1/K システムの例を付録に示す。 K 以内という系内客数制限が、光バッファの場合には T 以下という遅延時間制限に変わり、 E_K を $[1-V(T)]$ に置き換えた形が式(3.40)である。

さらに、負荷を擬似負荷に置き換えると、近似のない式(3.39)となる。したがって、擬似負荷が実効的な負荷であると認識できる。

4. 指数関数分布パケット長での近似解法

式(3.38)を用いて廃棄率を計算するには、 $V(T)$ の値が必要である。すなわち無限長バッファモデルにおける仮想待ち時間分布を、待ち時間 x に関する関数の形で求める必要がある。この関数は式(3.20)の $v^*(\theta)$ をラプラス逆変換して求められるが、実際のところラプラス逆変換で求められる関数形はきわめて限られている。複雑な関数をラプラス逆変換することは一般に困難であり、かつ数値的に計算することもできない。このため、式(3.20)を用いて計算した例を著者の知る限りなく、実際の数値計算では通常この式を用いずに数値シミュレーションを行っている。これでは、式(3.20)を求めた意味がない。

現実のシステムはすべて有限バッファシステムであるが、その解析にあたり、無限バッファモデルにおける解を求めてから式(3.41)を用いて有限バッファシステムに適用するという手法は一般的であり、よく行われている。しかしながら、この場合、待ち時間分布の関数形を求めなければならないという困難さがある。

以下では、光パケット長が指数関数分布する場合での近似解を求め、その精度を数値シミュレーションによる結果と比較する。サービス時間が指数関数分布するシステムは待ち行列モデルでは M/M/1/K に相当し、導出が最も簡単なモデルであるが、廃棄率に関して明示的な表現が得られていない。

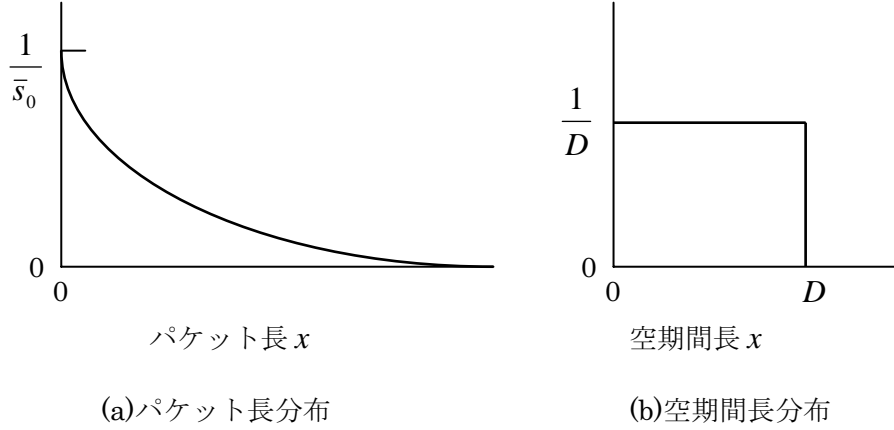


図7 パケット長と空期間長の確率密度分布

4.1 近似式

図7に示すように、光パケット長は平均値 \bar{s}_0 の指数関数分布、空期間は $[0, D]$ の間での均一分布と仮定する。各確率密度関数とそのラプラス変換は、次式となる。

$$g_0(x) = \frac{1}{\bar{s}_0} e^{-x/\bar{s}_0}, \quad g_0^*(\theta) = \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1}, \quad (4.1)$$

$$l(x) = \frac{1}{D} [u(x) - u(x-D)], \quad l^*(\theta) = \frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}) \quad (4.2)$$

ここで、 $u(x)$ は単位ステップ関数である。式(3.5)における畳み込み積分は、ラプラス変換では単なる積となるため、

$$g^*(\theta) = g_0^*(\theta) l^*(\theta) = \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1} \frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}) \quad (4.3)$$

である。式(4.1)、(4.2)を式(3.20)に代入すると次式となる。

$$v^*(\theta) = \frac{\lambda Q \left[1 - \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1} \right]}{\theta - \lambda \left[1 - \frac{1}{\bar{s}_0\theta + 1} \frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}) \right]} \quad (4.4)$$

式(4.4)をラプラス逆変換すれば遅延時間に関する確率密度関数を得ることができる。

しかしながら、式(4.4)の明示的な逆変換を求めることは困難であるので、 $D\theta \ll 1$ とし

$$\frac{1}{D\theta} (1 - e^{-D\theta}) \approx 1 - \frac{D\theta}{2} \quad (4.5)$$

で近似して、 $(D\theta)^2$ 以上のべき乗を無視する。式(4.4)はきわめて簡単化されて

$$v^*(\theta) = \frac{\lambda Q}{\theta + \frac{1}{\bar{s}_0} \left[1 - \lambda \left(\bar{s}_0 + \frac{D}{2} \right) \right]} \quad (4.6)$$

となり、その逆変換は次式となる。

$$v(x) = \lambda Q e^{-[1-\lambda(\bar{s}_0+D/2)]x/\bar{s}_0} = \lambda Q e^{-(1-\rho')x/\bar{s}_0} \quad (4.7)$$

式(4.5)において近似するための条件である $D\theta \ll 1$ は、式(4.7)より $(1-\rho')D/\bar{s}_0 \ll 1$ と

同等である。この条件は、 D が \bar{s}_0 に対して極めて小さいか、負荷 ρ' が1に近く重い場合に相当する。したがって、廃棄率が大きい場合の近似である。

CDFは、式(3.14)より求めることができるので、式(4.7)を代入して

$$\begin{aligned} V(x) &= V(0) + \int_{+0}^x \lambda Q e^{-(1-\rho')\xi/\bar{s}_0} d\xi = Q + \lambda Q \frac{\bar{s}_0}{1-\rho'} \left[-e^{-(1-\rho')\xi/\bar{s}_0} \right]_{+0}^x \\ &= 1 - \frac{\rho}{1 - \frac{D}{2\bar{s}_0}\rho} e^{-(1-\rho')x/\bar{s}_0} = 1 - \rho_{eq} e^{-(1-\rho')x/\bar{s}_0} \end{aligned} \quad (4.8)$$

と、式(3.10)の等価負荷、式(3.12)の擬似負荷を用いるときわめて簡単な式となる。

表1. 負荷に対する最大粒度

負荷 ρ	最大 FDL 粒度 D_{\max} / \bar{s}_0
0.01	198
0.1	18
0.2	8
0.3	4.7
0.4	3
0.5	2
0.6	1.3
0.7	0.86
0.8	0.5
0.9	0.22
0.99	0.02

式(4.8)は、 $D \rightarrow 0$ において $\rho_{eq} \rightarrow \rho$ 、 $\rho' \rightarrow \rho$ であ

るので、

$$V(x) = 1 - \rho e^{-(1-\rho)x/\bar{s}_0} \quad (4.9)$$

となる。式(4.9)は、M/M/1システムにおける客の待ち時間分布関数と同形である[13]。したがって、式(4.8)から、比例係数では等価負荷が、指数係数では擬似負荷が実効的な負荷となっていることが理解される。

式(4.8)を式(3.39)に代入して、廃棄率の近似式を得る。

$$P_B = \frac{(1-\rho')\rho_{eq} e^{-(1-\rho')T/\bar{s}_0}}{1 - \rho'\rho_{eq} e^{-(1-\rho')T/\bar{s}_0}} \quad (4.10)$$

4.2 数値例

式(4.10)により廃棄率の計算をする場合、 $\rho_{eq} < 1$ の収

束条件を確認する必要がある。式 (3.11)により、FDL 粒度 D には次式のような最大制限がある。

$$\frac{D}{\bar{s}_0} < 2 \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \equiv \frac{D_{\max}}{\bar{s}_0} \quad (4.11)$$

負荷に対する最大粒度 D_{\max}/\bar{s}_0 を、表 1 に示す。たとえば、負荷 0.5 では 2、0.8 では 0.5 が制限値となる。

平均パケット長 \bar{s}_0 を 1、すなわち単位時間長としたとき、 D に対する廃棄率 P_B の計算結果を図 8 に示す。実線は式(4.10)による計算値、点は文献[5]の図より読み取ったシミュレーション計算値である。負荷は比較できる $\rho = 0.8$ とした。近似式による計算はシミュレーション計算結果とよい一致をみせた。誤差は $B = 512$ の場合で D が大きいと大きく、最大でも 20% である。また、 D に対する廃棄率の傾向を把握することができている。

各文献にて明らかにされているように[3-6]、

- (1) D が小さいと、最大遅延時間 $T = (B - 1)D$ が小さくなるため、廃棄率は増加する。
- (2) D が大きいと空期間が増え、等価負荷が増加するため廃棄率は増加する。
- (3) したがって、 D の値には廃棄率を最小にする最適値が存在し、最大粒度 D_{\max}/\bar{s}_0 の 1/2 付近にその最適値が存在する。

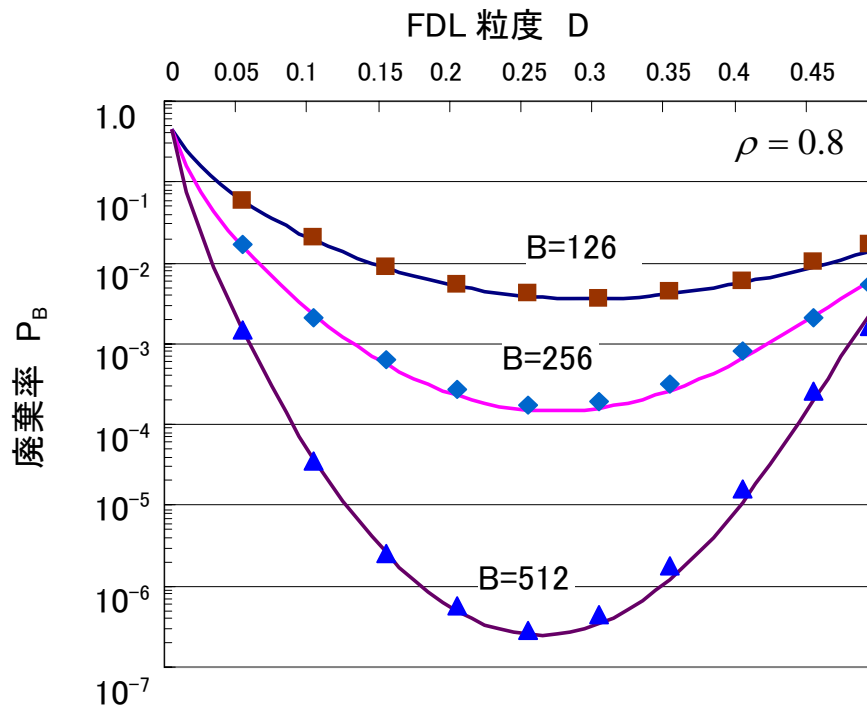


図 8. FDL 粒度 D に対するパケット廃棄率 ($\rho = 0.8$)
(実線は近似式計算，点はシミュレーション計算結果[5])

D に対する通過パケットの平均遅延時間 \bar{w}_T の計算値を、図 9 に示す。 $\bar{s}_0 = 1$, $\rho = 0.8$ とし、実線は式(4.8) , (3.30)を用いた近似計算値であり、点は文献[5]の図より読み取ったシミュレーション計算値である。この場合は、3%以下の誤差で一致した。 D が大きいと、等価負荷が増加するので平均遅延時間は増加する。

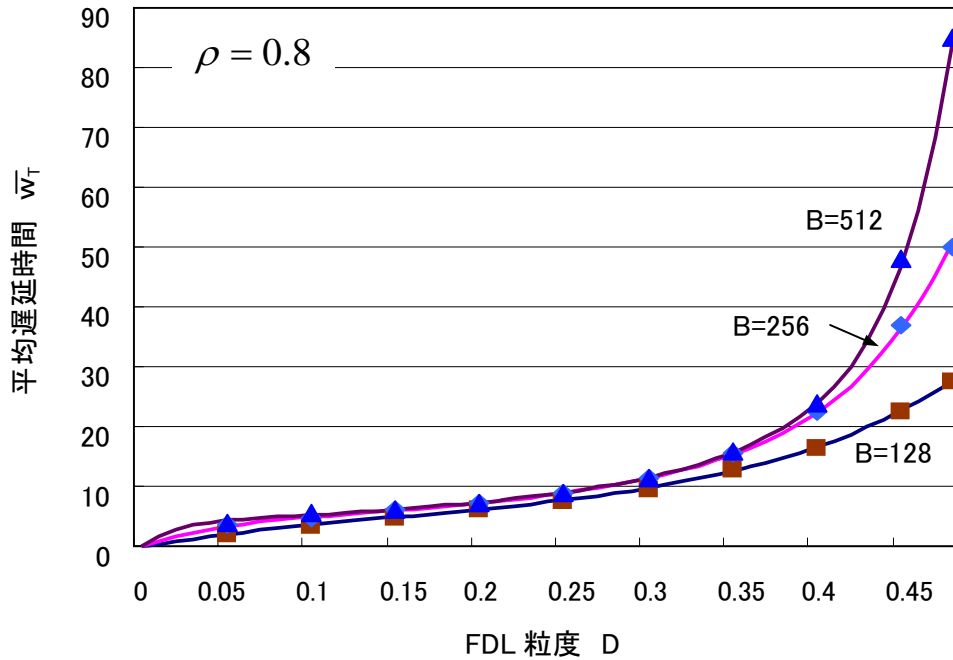


図 9. FDL 粒度 D に対する通過パケットの平均遅延時間 ($\rho = 0.8$)
(実線は近似式計算, 点はシミュレーション計算結果[5])

式(4.10)は精度の高い近似式であることが明らかにされたので、設計条件の把握に利用することとする。たとえば、図 8, 9 において、 $B = 128 \sim 512$ としているが、光スイッチの実現性を考慮すると過剰に大きな値である。また、実際のネットワーク設計では、0.8 という高負荷状態を基本とせず、最大でも負荷 0.5 に制限している。そこで、小さな B 値をもつ光バッファの性能を調べてみる。

図 10 は、 $B = 32$ としたとき D に対する廃棄率 P_B を示す。負荷 ρ を 0.3~0.7 とした。負荷により廃棄率は大きく減少する。負荷 0.5 では $D=1$ 付近にて、0.01%以下の廃棄率が実現される。負荷を 0.5 とし、 B をパラメータとした場合の廃棄率 P_B を、図 11 に示す。

$B = 4$ のとき $D = 1.4$, $B = 64$ のとき $D = 1.2$ にて廃棄率は最小となるが、大きくは変化していない。廃棄率が 0.01%以下となるのは B が 32 以上のときであり、負荷制限を課しても光バッファにはある程度の規模が必要なことがわかる。図 12 は $\rho = 0.5$ としたとき、 D に対する平均遅延時間 \bar{w}_T を示す。 $D = 1.2 \sim 1.4$ であれば、平均遅延時間に大きな増加は

ない。

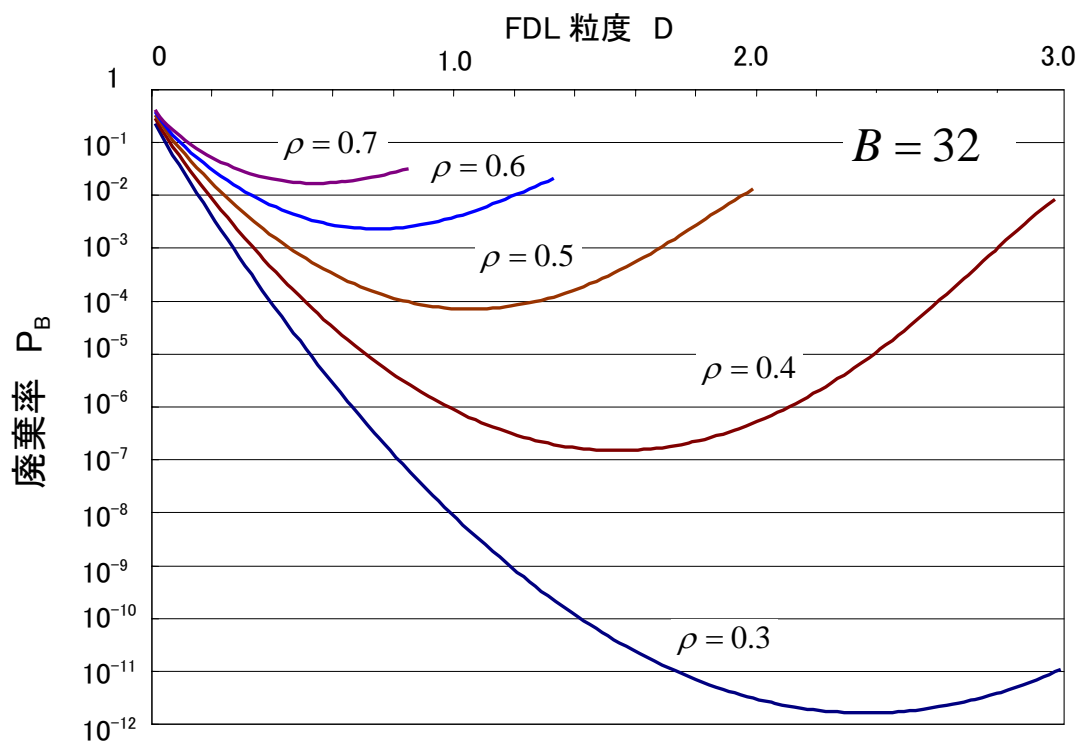


図 10. FDL 粒度 D に対するパケット廃棄率 ($B = 32$)

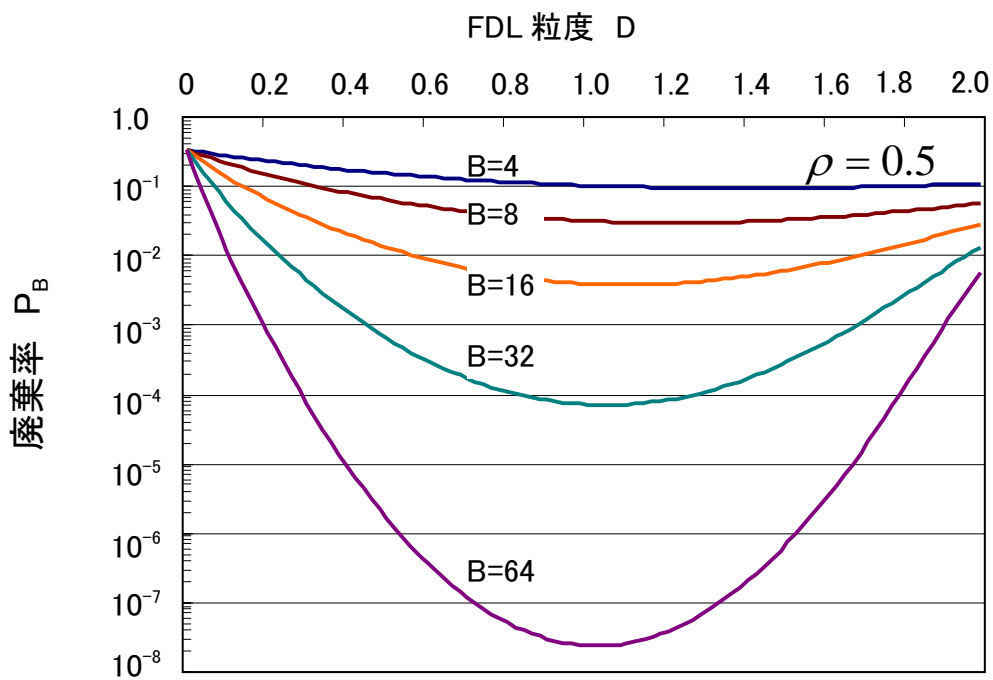


図 11. FDL 粒度 D に対するパケット廃棄率 ($\rho = 0.5$)

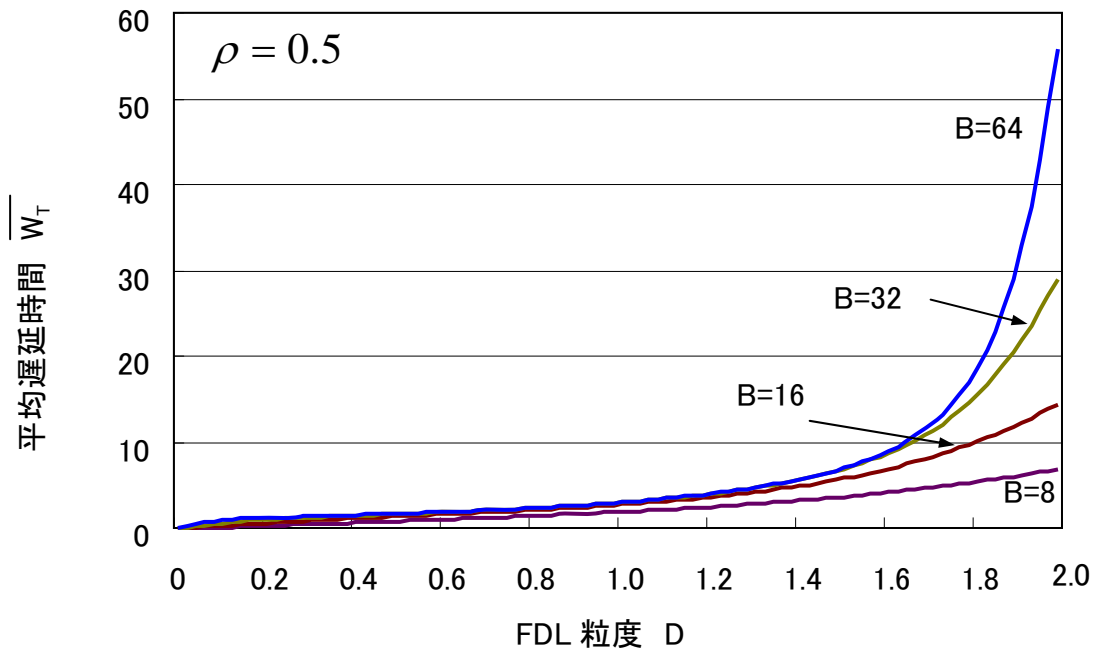


図 12. FDL 粒度 D に対するパケット廃棄率 ($\rho = 0.5$)

4.3 考察

パケット長が指数関数分布にあるとすると、遅延時間制限以上となるパケットに対して長いテールの分布が存在する。IP ネットワークではパケット長には 1518 バイトの制限があるため長いテールはなく、指数関数分布とは最悪値設計となる。文献[5]には、均一分布と固定長の場合における廃棄率がシミュレーション計算結果として記載されているが、指数関数分布と比較して、おのおの 1/15, 1/300 程度廃棄率となっている。したがって、実設計への適応を考えると、指数関数分布のみでは不足で、均一分布と固定長、さらに任意分布のパケット長を想定したトラヒック理論が必要である。

しかしながら、実設計に焦点を当てた場合、シミュレーション計算は煩雑すぎて一般の利用には不向きであると考えられるので、任意分布のパケット長に対して精度の高い近似計算式が望まれる。今後の課題としたい。

5. まとめ

光パケット交換機設計問題を解決するため、パケット廃棄率と遅延時間分布を求めるトラヒック理論を考察した。理論の対象とした光バッファ構成において、FDL 時間粒度の最適化を図ることがその主な目的である。得られた結果は、次のとおりである。

- (1) 指数関数分布パケット長に対して、待ち時間分布と廃棄率を求める近似式を求めた。近似式において擬似負荷を定義し、導入することが式の一般化に有効であることを明らかにした。
- (2) 近似式による計算値は報告されているシミュレーション結果と、廃棄率で 20% 以下、平均遅延時間で 3% 以下の差であり、よい一致をみせた。
- (3) 設計例として、負荷 0.5 における最適化を求め、0.01% 以下のパケット廃棄率とする

ためには、時間粒度を 1.2~1.4, FDL を 32 本以上とする必要があることを明らかにした。

実設計に利用するためには、パケット長について均一分布や固定長、任意分布とした理論式が必要であり、今後の課題とした。

付録 M/M/1/K システムにおける廃棄率

呼量を a とおくと、M/M/1/K システムの廃棄率は次式である[13].

$$B = \frac{(1-a)a^K}{1-a^{K+1}} \quad (\text{付 1})$$

システム内客数 r となる確率を P_r とおくと、その確率が K 以上となる確率 E_K は

$$E_K = \sum_{r=K+1}^{\infty} P_r = \sum_{r=K+1}^{\infty} (a^r) P_0 = a^{K+1} (1+a+a^2+\dots) P_0 = a^K \quad (\text{付 2})$$

となる。ここで、 $P_0 = 1/(1-a)$ を用いた。したがって、式(付 1)は次式で表される。

$$B = \frac{(1-a)E_K}{1-aE_K} \quad (\text{付 3})$$

参考文献

- [1] P. Gambili et al., "Transparent Optical Packet Switching: Network Architecture and Demonstrators in the KEOPS Project," IEEE J. of Selected Area in Commun., Vol. 16, No. 7, pp. 1245-1259, 1998.
- [2] D. K. Hunter et al., "WASPNET: A Wavelength Switched Packet Network," IEEE Commun. Mag., Vol. 37, No. 3, pp. 120-129, 1999.
- [3] F. Callegati, "Optical Buffers for Variable Length Packets," IEEE Commun. Lett., Vol. 4, No. 9, pp. 292-294, 2000.
- [4] Xiaohua Ma, "Modeling and Design of WDM Optical Buffers in Asynchronous and Variable-Length Optical Packets Switches," Optical Commun., No. 269, pp. 53-63, 2007.
- [5] Jianming Liu et al., "Blocking and Delay Analysis of Single Wavelength Optical Buffer with General Packet Size Distribution," J. Lightwave Technol., Vol. 27, No. 8, pp. 955-966, 2009.
- [6] H. E. Kankaya and N. Akar, "Exact Analysis of Single-Wavelength Optical Buffers with Feedback Markov Fluid Queues," J. Opt. Commun. Netw., Vol. 1, No. 6, pp. 530-542, 2009.
- [7] 拙著「やさしい情報交換工学」森北出版（2009年），p.61, 3.3.2節.
- [8] Fei Xue et al., "Design and Experimental Demonstration of a Variable-Length

Optical Packet Pouting System With Unified Contention Resolution,” J. Lightwave Technol., Vol. 22, No. 11, pp. 2570-2581, 2004.

- [9] 拙著「やさしい情報交換工学」森北出版（2009年），p.105，5.3節，式(5.16).
- [10] 同上，p.93，4.5.2節.
- [11] Percy H. Brill, “A Brief Outline of the Level Crossing Method in Stochastic Models,” CORS Bulletin Vol. 34, No. 4, pp. 1-8, 2000.
- [12] 滝根哲哉，伊藤大輔，西尾章治郎著「岩波講座インターネット5 ネットワーク設計理論」岩波書店（2001年），p.58，式(2.42).
- [13] たとえば，同上，p.66，式(2.51).
- [14] 拙著「やさしい情報交換工学」森北出版（2009年），p.112，5.4節，式(5.38).