

高エネルギー電子散乱断面積と原子核電荷分布の形状との関係

藤原 勲*, 元場 俊雄**, 福田 共和**

High-Energy Electron Scattering Cross Sections and Nuclear Charge Distribution

Isao Fujiwara*, Toshio Motoba** and Tomokazu Fukuda**

Abstract

Angular dependence of the electron scattering cross section is closely related with the nuclear charge density distribution. Assuming several types of the charge densities, the theoretical cross sections have been estimated within the first Born approximation. The typical examples are discussed in detail for possible discrimination of the charge densities.

1. はじめに

原子核に関する最初の情報は、歴史的には 1911 年に Rutherford による実験により得られた。すなわち、原子の中心部に質量の大部分が集中している芯(原子核)があり、その大きさは 10^{-15} m 程度であるという事実である。その後、原子核の大きさの直接的な見積もりは、二つの隣接する鏡映核(例えば、 $^{11}_6\text{C}$ と $^{11}_5\text{B}$ のように一方の陽子数が他方の中性子数に等しい原子核)の間の Coulomb エネルギーの違いから核半径が計算できることを 1938 年に Bethe が示した^[1]。それによると、核の密度は極めて大きい、体積が質量数(陽子数+中性子数)にほぼ比例することが分かり、半径 R は、 $R=r_0 A^{1/3}$ として、 $r_0=1.28\pm 0.05$ fm であることが分かってきた。

そこで、大きさのある核の電荷分布の形状がどのようなものであるか、それを知らう方法があるかどうかは極めて興味のある課題である。原子核の大きさ、電荷分布の形状を探求するのに、高速の粒子を原子核で散乱させ、得られた情報から解析する方法がある。過去に、電子散乱に関する多くの研究が行われてきたが、対象となる原子核の電荷分布に関して多彩な分布についてはなされていない。そこで本研究においては、考えられる多くの電荷分布の形状について理論的解析を試みるものである。

高エネルギー電子散乱において、散乱波の干渉による干渉縞の谷を与える角度が、原子核の形状や電荷分布の状態によってどのような影響を受けるのか、また、谷を与える角度の違いによって原子核の形状、電荷分布の型の違いをどの程度区別する事が可能なのかについて、散乱理論にもとづいて解析を行ったものである。

以下、この論文の第 2 章では入射粒子のポテンシャル散乱を扱う量子力学的理論形式、第 3 章には解析の対象とする電荷分布として仮定した種々の形状を提示し、具体的な計算方法を示す。第 4 章では解析結果とその特徴を述べる。特に、電子散乱の角度分布における谷を与える角度と電荷分布の形状との関連について議論する。第 5 章では、散乱断面積を与える電子波の干渉メカニズムについての考察を、第 6 章でまとめを述べるものである。

*大阪電気通信大学大学院工学研究科 総合電子工学専攻

**同大学工学部, 大学院工学研究科

2. 量子力学的散乱理論

原子核の表面は地球の表面のようにはっきりとした境界をもっているわけではなく、外向きに減少していく密度分布をしていると考えられ、その空間的な大きさを決めることは簡単なことではない。この分布の形を見極めるために実施されるのが、散乱実験である。ある入射粒子が原子核によって散乱される状況から角の分布状況等を推定することになる。ここでは、解析に必要な範囲に限って散乱理論について述べる。^[2]

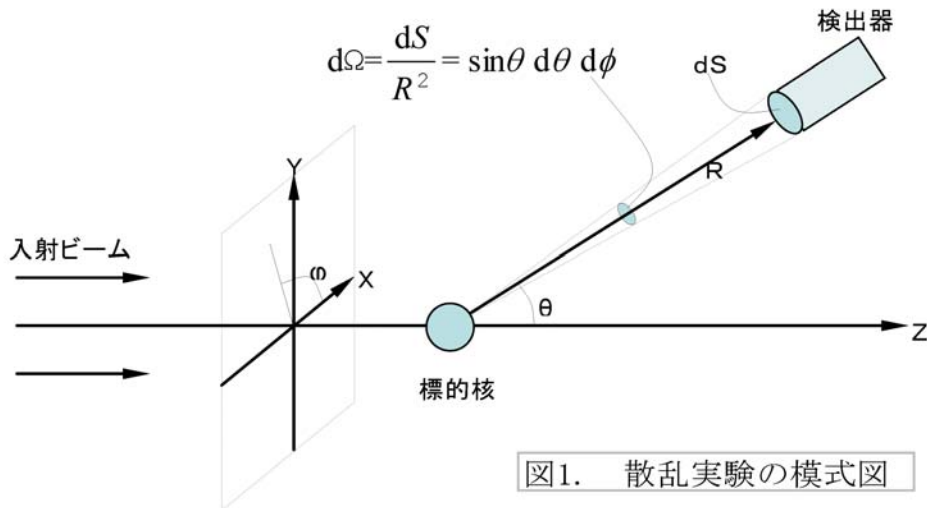
最も基本的な散乱過程とし、散乱の前後で粒子の種類は変化しないし、粒子の内部構造も考えない完全な弾性散乱に限定したものとする。ただし、標的となる原子核は Z 個の陽子と N 個の中性子からなる複合粒子としての多体系波動関数として取り扱う。

2.1 散乱断面積

図1に散乱実験の模式図を示す。 z 軸上の原点に静止している標的核に z 軸の負の方向から一様な強度の入射粒子が飛来し、標的核によって散乱される。

標的核を原点にとり、原点からの距離 R で、 z 軸からの偏角 θ の方向に粒子の検出器があり、検出器の測定口の面積を dS とする。標的核から見た検出器の立体角は $d\Omega = dS/R^2$ であり、散乱された入射粒子の内一部のものはこの検出器で検出される。この割合を算定する。

図1において、毎秒 N 個の粒子を入射させるとして、 z 軸からの偏角 θ の方向に設置された検出器の立体角 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ 内に散乱される粒子の個数を毎秒 dN 個とする。 dN は入射粒子の強度 N と立体角の大きさ $d\Omega$ に比例する。すなわち、



$dN = \sigma(\theta, \phi) N d\Omega$ と書けるはずであり、

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = \sigma(\theta, \phi) d\Omega \quad (1)$$

は散乱粒子が立体角 $d\Omega$ 内に検出される割合を示している。実際の実験では検出器の測定角度 (θ, ϕ) を変化させて $d\sigma$ を測定することになるが、これの立体角に対する割合

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta, \phi) \quad (2)$$

は面積の次元をもっており、微分散乱断面積という。

2.2 中心力ポテンシャルによる散乱

2.4 節以降の計算では相対論的な取り扱いをするが、2.2～2.3 節では一般式を呈示する。いま、散乱の境界条件を満たす解は、波数 k_0 の入射平面波と、散乱波の重ね合わせ、すなわち

$$\psi_{k_0}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \phi_{k_0}(\mathbf{r}) \quad (3)$$

で表される。この式を

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right\} \psi_{k_0}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_{k_0}(\mathbf{r}) \quad (4)$$

に代入すると、 $\Delta e^{ik_0 z} = -k_0^2 e^{ik_0 z}$ であるから、 $\phi_{k_0}(\mathbf{r})$ の満たす方程式は

$$\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta + k_0^2) \phi_{k_0}(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) \{ e^{ik_0 z} + \phi_{k_0}(\mathbf{r}) \} \quad (5)$$

となる。次に、グリーン関数 $G(\mathbf{r})$ を用いて散乱波 $\phi_{k_0}(\mathbf{r})$ を

$$\phi_{k_0}(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6)$$

と表す。ここで、

$$(\Delta + k_0^2) G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (7)$$

である。(6)式を(5)式の左辺に代入し、(7)式を使うと

$$f(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \{ e^{ik_0 z} + \phi_{k_0}(\mathbf{r}) \} = \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \psi_{k_0}(\mathbf{r}) \quad (8)$$

となって、散乱波は

$$\phi_{k_0}(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_{k_0}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (9)$$

で表され、散乱の境界条件を満たす解 $\psi_{k_0}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \phi_{k_0}(\mathbf{r})$ は、

$$\psi_{k_0}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_{k_0}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (10)$$

という形で表される。ここで、グリーン関数は

$$G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (11)$$

となることを示すことができる。

次に、この $G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ の漸近形を考える。(9)式の \mathbf{r}' についての積分は $V(\mathbf{r}') \neq 0$ の限られた範囲にのみ寄与する。今、 $|\mathbf{r}| \gg L > |\mathbf{r}'|$ という十分な遠方を考える。(L はポテンシャル $V(\mathbf{r}')$ が寄与する範囲) $r \rightarrow \infty$ においては、

$$G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{e^{ik_0 r}}{4\pi r} e^{-ik_0 \cdot \mathbf{r}'} \quad (12)$$

となることを示すことができる。

このグリーン関数を(10)式に代入すると

$$\psi_{k_0}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} - \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int \frac{e^{ik_0 r}}{r} e^{-ik_0 \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_{k_0}^+(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (13)$$

となり, ここで

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik \cdot r'} V(\mathbf{r}') \psi_{k_0}^+(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (14)$$

とおくと,

$$\psi_{k_0}^+(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad (15)$$

を得る.

(14)式の $f(\theta, \phi)$ が散乱振幅であり, $|f(\theta, \phi)|^2$ が微分断面積である.

$$\phi_{k_0}(\mathbf{r}) = f(\theta, \phi) \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad (16)$$

は散乱波であり, これは外向きに進行する球面波であって, $f(\theta, \phi)$ がその振幅ということである.

従って, 入射平面波+外向きの散乱波という境界条件を満たす解を持つ積分方程式は, (10)式の右辺のグリーン関数として(11)式を用いた式, すなわち

$$\psi_{k_0}^+(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_{k_0}^+(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (17)$$

ということである.

(θ, ϕ) 方向の面積要素 $dS = r^2 d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$ を通過する散乱波の確率流れ密度は $j_r dS = v_0 |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega$ であり, (θ, ϕ) 方向の立体角 $d\Omega$ に単位時間に散乱される粒子数 dN は, $dN = nj_r r^2 d\Omega = nv_0 |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega$ である.

一方, 入射粒子の z 方向の確率流れ密度は v_0 と等しく, 単位時間, 単位面積あたりの入射粒子数 N は, $N = nv_0$ (n : 比例定数) である. 従って,

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (18)$$

であり, 微分散乱断面積は(19)式の通りとなる.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (19)$$

3 Born 近似

(17)式の右辺を, 右辺第2項に現れる $\psi_{k_0}^+(\mathbf{r}')$ に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \psi_{k_0}^+(\mathbf{r}) &= e^{ik_0 z} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') e^{ik_0 z'} d\mathbf{r}' \\ &+ \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^2 \int \int G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'') V(\mathbf{r}'') \psi_{k_0}^+(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \end{aligned} \quad (20)$$

この式の右辺第3項の $\psi_{k_0}^+(\mathbf{r}'')$ に(17)式の右辺を代入する, というのを繰り返すと $\psi_{k_0}^+(\mathbf{r})$ の $V(\mathbf{r})$ による無限級数展開ができる. ここでもし, ポテンシャルの効果が少ない, 上式の第3項が無視できるなら, 波動関数は

$$\psi_{k_0}^+(\mathbf{r}) \approx \psi_{k_0}^{(1)}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}') V(\mathbf{r}') e^{ik_0 z'} d\mathbf{r}' \quad (21)$$

ということになる。これが第1 Born 近似である。

ボルン近似の波動関数の漸近形は、 $G^+(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ の漸近形を(21)式に代入して得られる。すなわち、

$$\psi_{k_0}^{(1)}(\mathbf{r}) = e^{ik_0 z} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \int V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \quad (22)$$

である。ただし、 $\hbar\mathbf{K} = \hbar(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$ は移行運動量である。したがって、Born 近似での散乱振幅は、波動関数 $(\psi_{k_0}^{(1)}(\mathbf{r}) - e^{ik_0 z})$ を $e^{ik_0 r}/r$ で除して、

$$f^{(1)}(\theta, \phi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \quad (23)$$

を得る。

2.4 電子散乱断面積の角度分布 (相対論的表示)

100MeV を超える高エネルギーにおける原子核による電子の散乱では、点状原子核にもとづく理論によるものと実際に観測された散乱とは大きな違いがある。ここからは、原子核の大きさをも考慮した電子散乱の第1 Born 近似について述べる。^[3]

まず、電子も原子核もスピンを持たないと仮定して議論する。座標 \mathbf{R}_k ($k=1, 2, \dots, Z$) をもつ Z 個の点状陽子を含む標的原子核は、 i という状態の波動関数 Φ_i ($i=0, 1, 2, \dots$) によって記述される。基底状態は $\Phi_0(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_Z)$ である。

入射電子は運動量が \mathbf{P}_0 でエネルギーが E_0 であるとする (式(34)参照)。これが遮へいを考慮したクーロンポテンシャル下で、運動量 P エネルギー E の終状態に散乱される単位時間あたりの確率(遷移確率)は、時間に依存する摂動論から導かれ次式の通りとなる。

$$w = \frac{32\pi^3 e^4}{\hbar L^6 s^4} \rho_f |M_{fi}|^2 \quad (24)$$

ただし、

$$M_{fi} = \int_N \Phi_f^*(\mathbf{R}_k) \Phi_0(\mathbf{R}_k) \left[\sum_{k=1}^Z e^{i\mathbf{S}\cdot\mathbf{R}_k} \right] d^3R_k \quad (25)$$

であり、また、

$$\rho_f \approx \frac{L^3 p^2 d\Omega_p}{c (2\pi\hbar)^3} \frac{1}{1 + (2p_0/Mc) \sin^2(\theta/2)} \quad (26)$$

である。

(25)式と(26)式から、微分散乱断面積が次式で表されることが導かれる。

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega_p} = \left(\frac{e^2}{2E_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \frac{|M_{fi}|^2}{1 + \frac{2E_0}{Mc^2} \sin^2(\frac{\theta}{2})} \quad (27)$$

ここで、電子のスピンを考慮し、電子に関する Dirac の方程式を用いると、微分断面積は(28)式の通りとなる。

$$\frac{d\sigma_{el}(\theta)}{d\Omega_p} = \left(\frac{e^2}{2E_0} \right)^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{|F(q)|^2}{1 + \frac{2E_0}{Mc^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (28)$$

ここで $F(q)$ は原子核の形状因子で、次のように表される。

$$F(q) = \int_N |\Phi_0|^2 \sum_{k=1}^Z e^{iq \cdot R_k} d^3R_k \quad (29)$$

弾性散乱を考えているので $\Phi_f = \Phi_0$ としている。 $|\Phi_0|^2$ が規格化されていれば $|F(q)|^2 = Z^2$ となり、電荷 Ze の点状原子核の極限では(28)式は、次の Mott 散乱の式となる。

$$\sigma_{\text{Mott}}(\theta) = \left(\frac{Ze^2}{2E_0} \right)^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{Mc^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (30)$$

有限の大きさを持つ原子核による散乱を考える。 $|\Phi_0|^2$ が全ての陽子の座標を含んでいること、 ϕ_0 が規格化されていることを考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{el}(\theta)}{d\Omega_p} &= \left(\frac{Ze^2}{2E_0} \right)^2 \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{|F(q)|^2}{1 + \frac{2E_0}{Mc^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \sigma_{\text{Mott}}(\theta) |F(q)|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

と書ける。

すなわち、 $|F(q)|^2$ を実測された断面積と点状電荷の断面積 $\sigma_{\text{Mott}}(\theta)$ との比として定義する。また、

$$F(q) = \int_N \rho(\mathbf{R}) e^{iq \cdot \mathbf{R}} d^3R \quad (32)$$

であり、 $\rho(\mathbf{R})$ が球対称な電荷分布の場合には、角度部分の積分は容易に実行できて、

$$F(q) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr) r dr \quad (33)$$

となる。

3. 解析の方法

3.1 電荷分布の形状

原子核を地球の表面のようにはっきりとした境界をもった“塊”と考えるのか、それとも境界のはっきりとしないぼやけたものと見るのか。また、電荷密度の分布も一樣ではないと見るのが妥当であろうと考えられる。そこで、本研究においては、電荷分布の形状を、一樣な分布をも含めて第1表の通り6種類の基本形と、基本形の電荷分布の減少パターンについて数種類の変化パターンを考え、これらについて解析することとした。

表 1 電荷分布の形態

型	基本形	電荷分布の減少のパターン	
A	 A-1 一樣分布	一樣分布とその変形	
		 A-2 Fermi型 d = 0.3	 A-3 台形 ΔR = 1.32
B	 B-1 矩形	中空の球	
		 B-2 Fermi型 d = 0.3	 B-3 内側Fermi型
		 B-4 ガウス分布 ($\mu > 3\sigma$) $\sigma = 1.5$	
C	 C-1 * 1	二重球	
		 C-2 * 1 d = 0.1	 C-3 * 2
		 C-4 * 2 d = 0.1	
D	 D-1 * 1	中空の二重球	
		 D-2 * 1 d = 0.1	 D-3 * 2
		 D-4 * 2 d = 0.1	
E		線形	
		 E-2	
F		ガウス分布	
		 F-2 σ = 3.996	
G	 G-1	二層構造	
		 G-2 d = 0.3	
H	 H-1 調和振動子型		

【備考】

- * 1 二重球の電荷の比を各パターンとも同じ比率にして比較する。
(内/外=0.367/0.633)
- * 2 外殻の最大電荷を内側の最大電荷の1/2 について解析

d :: 表面厚さのパラメーター

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{d}\right)}$$

ΔR : 傾斜部分の半径の差 (A-3)

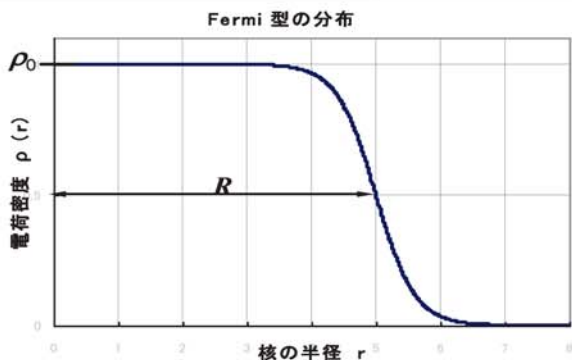
- ・型A 核の中心から連続的に電荷が分布しているもので、電荷密度が一様分布、表面で曲線的に減少する Fermi 分布^{*}、表面の減少が線形の場合、という 3 パターン。
- ・型B 核の中心部が空洞でその周りを電荷の雲が取り巻くような型で、雲の電荷分布が一様分布、内側外側とも Fermi 型、内側だけが Fermi 型で減少、内外ともにガウス分布で減少、という 4 パターン。
- ・型C 型Aの外側に空洞がありその外側を電荷の雲が取り巻く形で、パターンとしては内外とも一様分布、Fermi 型、内外の最大電荷の比を 1:1, 2:1 にした場合というバリエーション。
- ・型D 核の中心部は空洞でその周りを二重に同心球が取り巻くような型で、電荷分布が内外球とも一様分布、Fermi 型、内外の最大電荷の比を 1:1, 2:1 にした場合というバリエーション。
- ・型E 核の中心から外へ向かって直線的に電荷分布が減少するもの。
- ・型F 核の中心からガウス分布で電荷密度が減少するもの。
- ・型G 核の中心部は電荷密度が大きく、その外側は密度が小さいいわゆる二層構造のもの。
- ・型H 調和振動子型ポテンシャルによる電荷密度分布。

3.2 解析の対象とする元素の種類

解析のベースとするため放射性でなく純粋な元素として自然界に安定して存在し、さらに点状核と、大きさや形のある核との違いを鮮明に見分けるという観点から原子番号がある程度大きな元素について解析することとし、存在比率が 100%で安定している元素である $^{197}_{79}\text{Au}$ を解析の対象とした。また、比較の対称として原子番号の若い $^{40}_{20}\text{Ca}$ についても計算を実施した。

* フェルミ分布とは、電荷分布の半密度半径を R 、表面厚さのパラメーターを d 、最大電荷密度を ρ_0 とした場合、半径方向の電荷密度分布が次式で与えられる分布をいい、その形は図の通りである。

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{d}\right)}$$



3.3 入射エネルギー

入射電子の相対論的エネルギー E_0 と運動量 P_0 との関係は

$$E_0^2 = (m_0 c^2)^2 + (c p_0)^2 \quad (34)$$

である。

また、弾性散乱における入射電子の運動量 p_0 と波数 q と散乱角 θ との関係は

$$q = \frac{2p_0}{\hbar} \sin \frac{\theta}{2} \quad (35)$$

で表され、 $q = 2\pi/\lambda$ である。

$^{197}_{79}\text{Au}$ の原子核の大まかな大きさは、半径が 7 fm 程度と考えられ、散乱角 40° 程度以下で、これと同程度の波長とするには 300 MeV 以上のエネルギーの必要である。従って入射エネルギーは 300 MeV を基本とし、さらに細かい形状の違いに対応する必要のあるパターンについては、500 MeV、1 GeV のエネルギーについても解析を行うこととする。

3.4 計算方法

ここでは、具体的な計算方法について述べる。

- ・入射エネルギーに対応した波数： q

入射エネルギーと運動量の関係(34)式から運動量 p_0 を求め、波数 q は(35)式から散乱角 θ の関数として計算する。

- ・電磁形状因子： $F(q)$ ：

(33)式にもとづいて、台形則による数値積分を実施する。

- ・点状原子核の散乱断面積： $\sigma_{\text{Mott}}(\theta)$

散乱角 θ に対応した $\sigma_{\text{Mott}}(\theta)$ を(30)式により計算する。

- ・微分散乱断面積： $d\sigma_{e_1}/d\Omega$

点状原子核の散乱断面積と電磁形状因子の絶対値の 2 乗との積として微分散乱断面積を計算する。

- ・ $\rho(r)$ の規格化

3.1 項で述べた電荷分布の形状に対応した $\rho(r)$ の関数式を組んでその式を規格化する。

規格化は、 $\rho(r)$ の積分値と規格化定数との積が原子番号 Z に一致するように規格化定数を定める。すなわち、規格化定数を N とすると、

$$N = \frac{Z}{\int_0^\infty 4\pi r^2 \rho(r) dr} \quad (36)$$

である。

- ・原子核の半径

$^{197}_{79}\text{Au}$ 原子核の計算上の半径として、155 MeV において $kR = 5.4$ ^[3] というデータから、 $p_0 = 0.517$ eVs/m, $k = 0.785$ fm⁻¹ であり、したがって $R = 6.879$ fm となるので、 $^{197}_{79}\text{Au}$ については半径を 6.88 fm とし解析を行う。また、 $^{40}_{20}\text{Ca}$ については半径を 3.64 fm ^[4] とする。

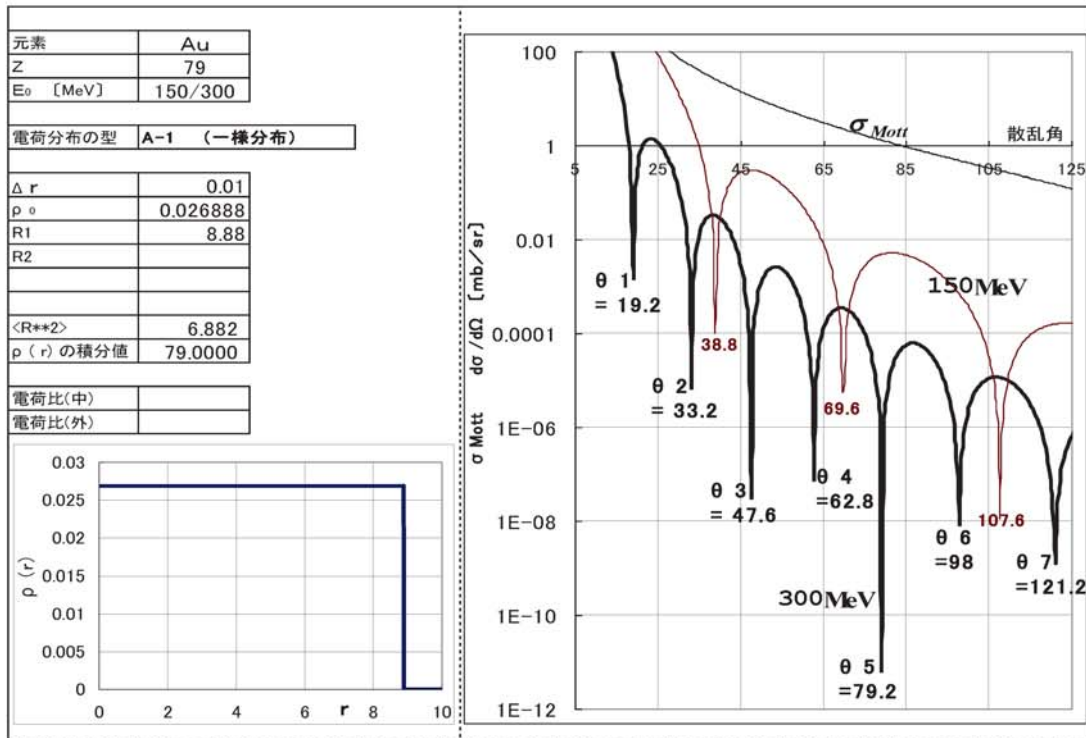


図2 一様電荷分布に対する電子散乱断面積の角分布

4. 計算結果とその特徴

ここでは、先ず、 $^{197}_{79}\text{Au}$ の8通りの型について、解析を実施した結果、電荷分布の型(A~H)の違いにより干渉縞の谷の角度分布(角分布)がどういふ影響を受けるかについて300MeVの計算結果を述べ、その後に入射エネルギー等の条件の違いによる影響ならびに、 $^{40}_{20}\text{Ca}$ についての解析と、実験値との対比について述べることにする。

なお、電子散乱断面積の一様電荷分布に対する計算結果を図2に例として示す。

4.1 電荷分布の型と干渉縞の谷を与える角度の関係

電荷分布の型によって干渉縞の谷を与える角度にどのような違いがあるのかを見るために、6つの基本形(E, Fを含めて8つの型)を比較したものを、表2、図3に示す。ここで、 $\theta_1 \sim \theta_8$ は図2に示すように谷の角度を昇順に並べた番号である。

表2 基本形の谷を与える角度(300MeV)

型	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8
A-1	19.2	33.2	47.6	62.8	79.2	98	121.2	
B-1	17.6	35.2	54	74.4	98			
C-1	20	30.4	44	61.2	80.8	104		
D-1	20	30.8	43.6	61.6	80.4	104.8		
G-1	20.4	30.4	45.6	62.8	75.6	91.6	116.8	
H-1	21.6	34.4	49.6	67.2				
E-2	22	31.6	44.8	55.6	69.6	82.4	98.8	116.4
F-2	46.8	54.8	63.6	73.2	83.2	94	106.4	120.4

・一様分布の型 A-1 と中空の

- 型 B-1 を比較すると, θ_1 は A-1 の方が 1.6° 大きい
 θ_2 以降の角度は B-1 の方が大きく, その差は角度とともに増加し顕著になる.
- 二重球 C-1 と中空二重球 D-1 では, ほぼ同じ傾向にあり角度の差は 0.8° 以下である.
 - 型 E-2(電荷分布の減少が線形のも)とガウス分布 (F-2, $\sigma=3.996$)は, 谷の数が(125° 以下で)8個と他の型と比べて最も多い.
 - 中空の B-1 は, 他のどの型より谷と谷との間隔が大きく, 谷の間隔の平均値は 20° である. また谷と谷との間隔の最も小さいのは, F-2 型で平均値は 10° である.
 - 各型の θ_1 (谷を与える角度の最小値)を昇順に並べると B-1(17.6°), A-1(19.2°), C-1, D-1(20°), G-1(20.4°), H-1(21.6°), E-2(22°), F-2(46.8°)であり, ガウス分布が他の型と大きく異なっていることが分かる.
 - 調和振動子型(H-1)は, 谷を4個生じるが入射エネルギーが大きくなっても谷の数は増えない.

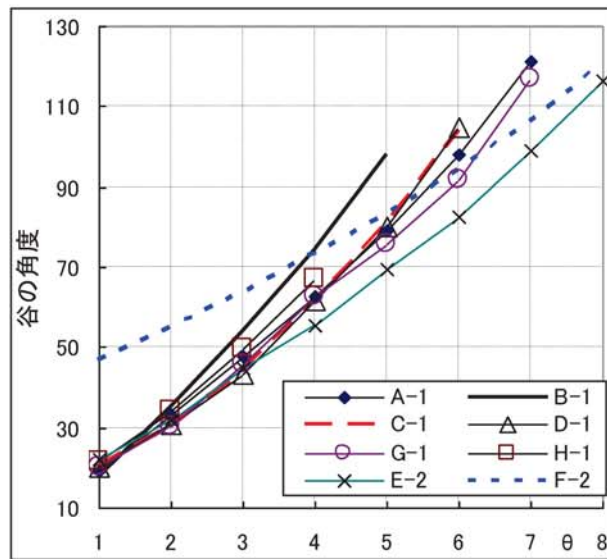


図3 基本形の谷を与える角度

(横軸の1, 2, 3, ...は, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, を示す. 以下同じ.)

4.2 同一型内のパターンの違いによる影響

入射エネルギー300MeVにおける同一型でのパターンによる影響を述べる.

4.2.1 型A(中心の詰まった球状)

型Aのパターンによる状況を表3と図4に示す. パターンの違いによる影響は, ほとんどないことが分かる.

すなわち一様分布であるか, Fermi 分布か, それとも線形に減少しているのか判別するのは困難であるといえる.

表3 型Aのパターンによる影響

	300MeV						
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
A-1	19.2	33.2	47.6	62.8	79.2	98	121.2
A-2	19.2	33.6	48	63.6	80	99.2	123.2
A-3	19.2	33.6	48	63.2	79.6	98.4	122

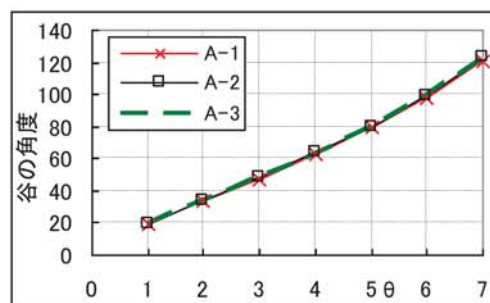


図4 型A パターンによる影響

4.2.2 型B(中空の球状)

型Bのパターンによる状況を表4, 図5に示す.

- B-2(内側, 外側とも Fermi 型)と B-3(内側のみ Fermi 型)は角度の差は最大で 1.6° でほぼ同じ傾向を示している. なお, B-2(内側, 外側とも Fermi 型)の散乱断面積の計算結果を図6に示す.
- B-1 は, 他の型と比較すると谷と谷の間隔が最も大きかったが, 中空球の変形としてガウス分布の平均値をシフトしたもの(B-4)と比較すると, 谷の間隔は B-4 の方が遙かに大きく約 30° となっている.

表4 型Bのパターンによる影響

	300MeV					
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
B-1	17.6	35.2	54	74.4	98	
B-2	18.4	36.4	50	63.6	84.4	106.4
B-3	18.4	35.6	51.2	65.2	83.2	104.8
B-4	25.2	52.8	84.8			

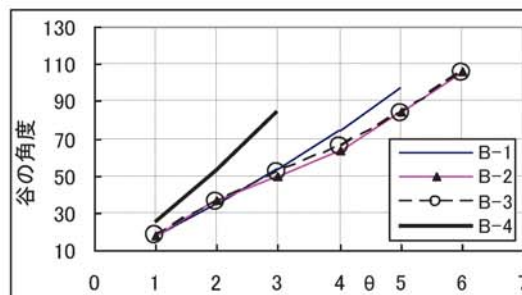


図5 型B パターンによる影響

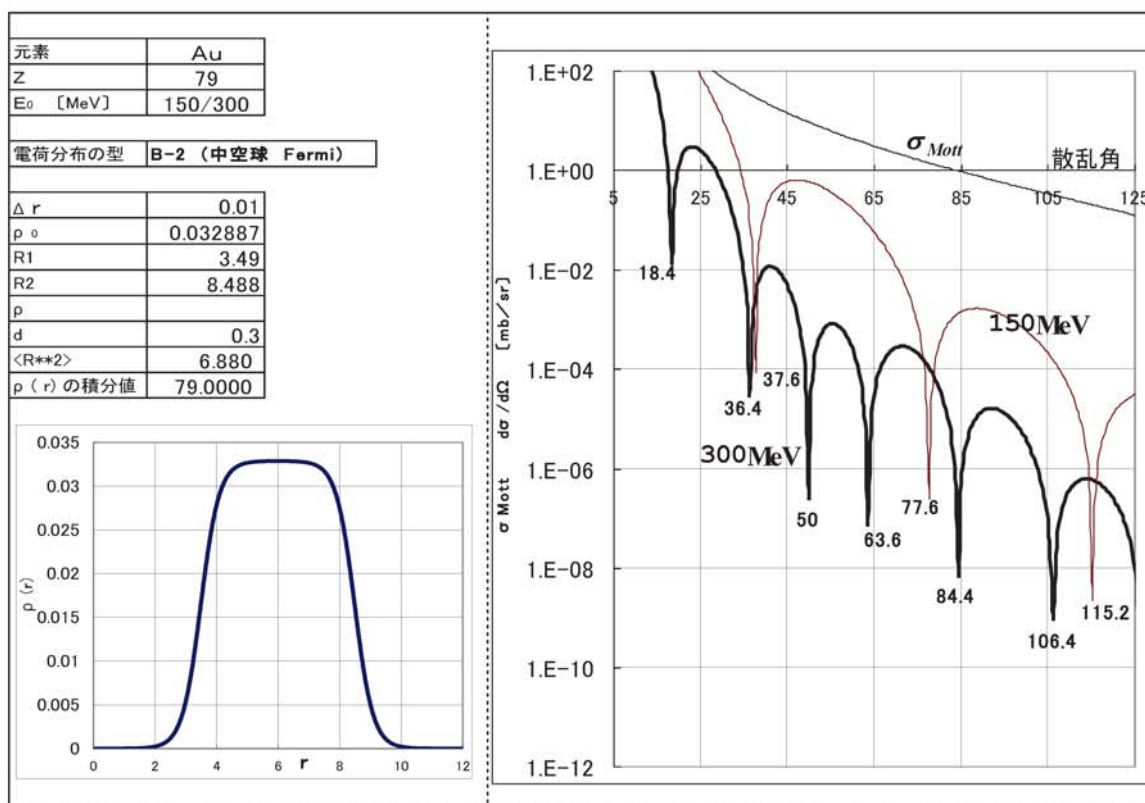


図6 中空フェルミ型の散乱断面積角分布

4.2.3 型C(二重球)

型Cのパターンによる状況を表5, 図7に示す.

- 内外球の電荷量の比に着目すると, θ_1 では内球の電荷量が多い C-3, C-4 の

方が角度は $2\sim 3^\circ$ 大きいですが、 θ_3 以降については外球の電荷量大きい C-1, C-2 の方が角度が大きくなること認められる。そして、C-3, C-4 との角度の差は角度とともに増加する。

表5 型Cのパターンによる影響

	300MeV					
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
C-1	20	30.4	44	61.2	80.8	104
C-2	20	30.4	44	61.2	80.8	104
C-3	21.6	32	37.2	54	72	92.4
C-4	23.2	29.2	36.4	54	72	92.8

- C-1 と C-2 は同じ傾向を示している。
- C-3 と C-4 も同じ傾向を示している。

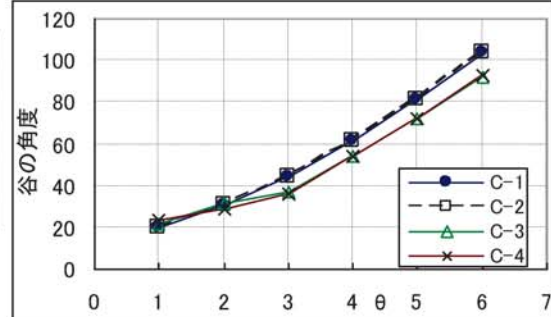


図7 型C パターンによる影響

4.2.4 型D(中空の二重球)

型Dのパターンによる状況を表6, 図8に示す。

型Cと殆ど同じ傾向にある。すなわち θ_1 では内球の電荷量大きいD-3, D-4の方が谷の角度は $2\sim 4^\circ$ 大きいですが、 θ_3 以降については外球の電荷量大きいD-1, D-2の方が角度が大きくなる。

表6 型Dのパターンによる影響

	300MeV					
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
D-1	20	30.8	43.6	61.6	80.4	104.8
D-2	20	30.8	44	61.6	80.4	104.8
D-3	21.6	32.8	36.4	54.4	71.6	92.8
D-4	24.4	27.2	35.6	54.4	72	93.6

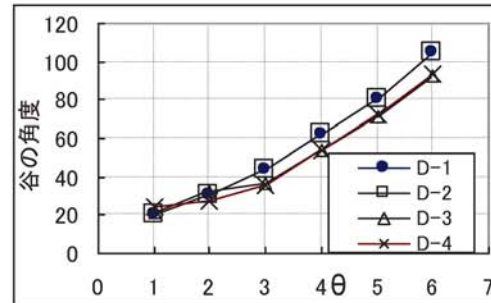


図8 型D パターンによる影響

4.2.5 型G(二層構造)

表7, 図9に見るように、矩形の分布とFermi型との差は微少なものである。

表7 型Gのパターンによる影響

	300MeV						
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7
G-1	20.4	30.4	45.6	62.8	75.6	91.6	116.8
G-2	20.4	30.4	46	63.6	76.4	92.8	118.8

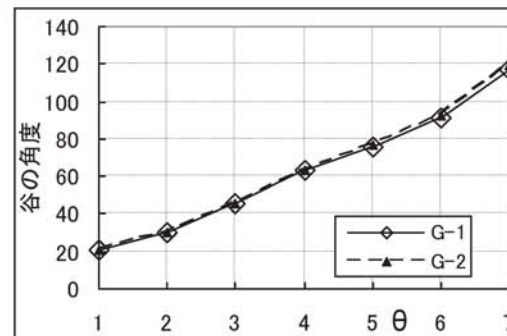


図9 型G パターンによる影響

4.3 入射エネルギーの影響

型A, Bについて、矩形, Fermiによる違いが波長の短い領域で確認できるの可否かを見極めるために、入射エネルギーを500MeV, 1GeVについても解析を行った。

150MeV, 300MeV を含めて一覧にしたものを表 8 に示す.

500MeV, 1GeV についてのグラフを図 10, 図 11 に, 150, 300, 1000MeV の散乱断面積の様子を比較したものを図 12 に示す.

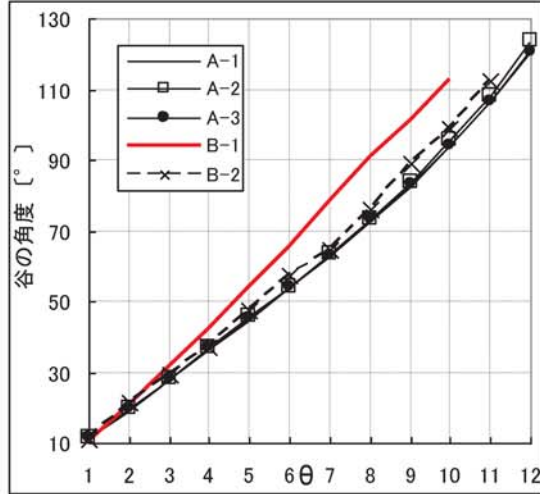


図10 型A, B パターンによる影響(500MeV)

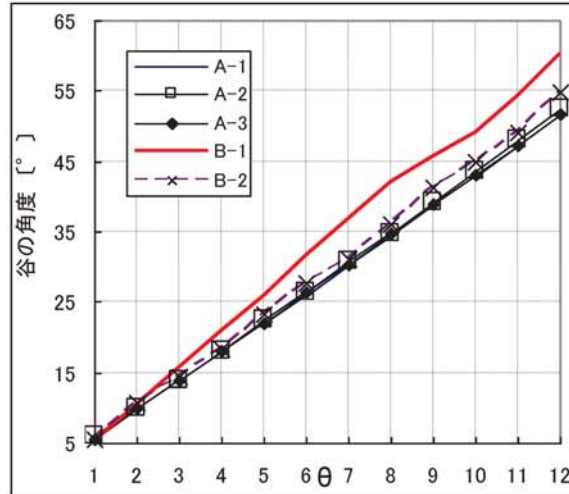


図11 型A, B パターンによる影響(1GeV)

表 8 入射エネルギーと谷を生じる角度の関係

型	入射エネルギー [MeV]	谷を生じる角度 [°]											
		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}
A-1	150	38.8	69.6	107.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	300	19.2	33.2	47.6	62.8	79.2	98	121.2	-	-	-	-	-
	500	11.6	19.6	28	36.4	44.8	54	62.8	72.8	82.8	94	106.8	121.2
	1000	5.6	10	14	18	22	26	30.4	34.4	38.8	42.8	47.2	51.6
A-2	150	39.2	70.4	109.2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	300	19.2	33.6	48	63.6	80	99.2	123.2	-	-	-	-	-
	500	11.6	20	28.4	36.8	45.6	54.4	63.6	73.6	84	95.6	108.4	123.6
	1000	6	10	14	18	22.4	26.4	30.8	34.8	39.2	43.6	48	52.4
A-3	150	39.2	70	108.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	300	19.2	33.6	48	63.2	79.6	98.4	122	-	-	-	-	-
	500	11.6	20	28	36.8	45.2	54	63.2	73.2	83.2	94.4	106.8	120.4
	1000	5.6	10	14	18	22	26.4	30.4	34.8	38.8	43.2	47.2	51.6
B-1	150	35.2	74.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	300	17.6	35.2	54	74.4	98	-	-	-	-	-	-	-
	500	10.4	20.8	31.6	42.4	54	65.6	78.4	91.2	101.6	112.8	-	-
	1000	5.2	10.4	15.6	20.8	26	31.6	36.8	42	45.6	49.2	54.4	60.4
B-2	150	37.6	77.6	115.2	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	300	18.4	36.4	50	63.6	84.4	106.4	-	-	-	-	-	-
	500	11.2	21.6	29.2	36.8	47.6	57.2	64.8	76	89.2	98.8	112.4	-
	1000	5.6	10.8	14.4	18.4	23.2	27.6	31.2	36	41.2	44.8	49.2	54.8

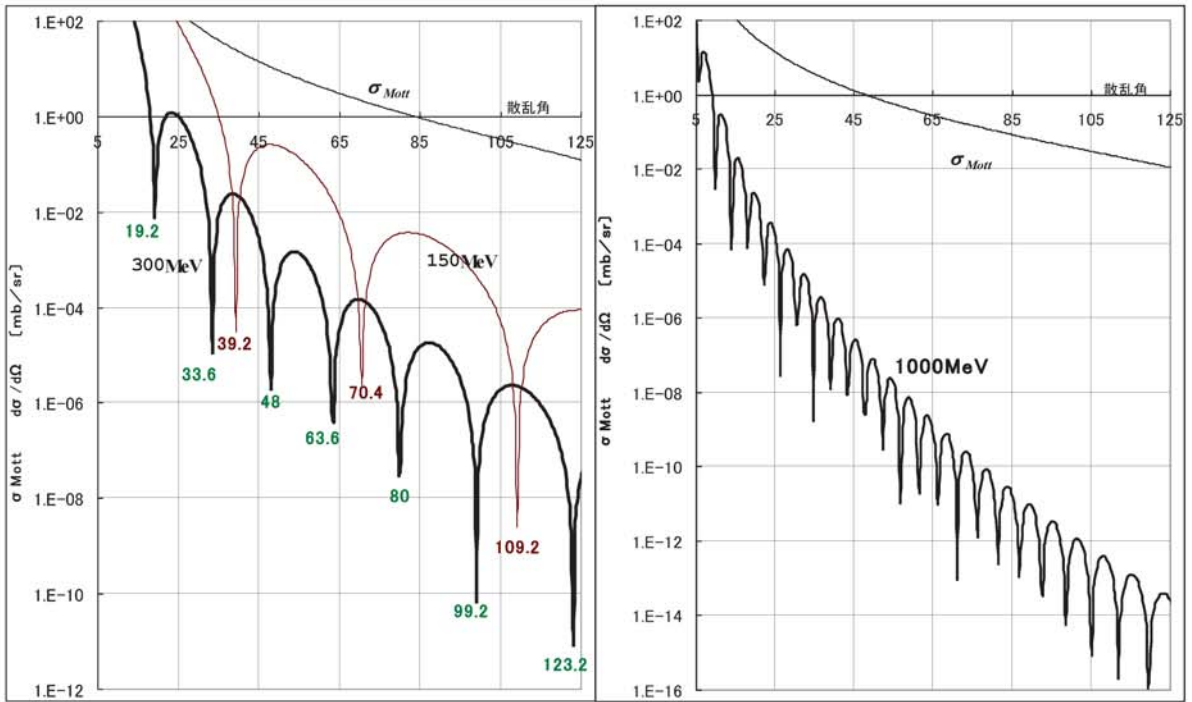


図12 150/300/1000MeVの散乱断面積の比較(Fermi分布)

- ・ エネルギーを大きくすればするほど、谷を与える角度が小さくなり、谷と谷の間隔が狭くなり谷の数が増加するのが一般的な傾向であるが、その傾向にはパターンによる大きな違いはない。ただし、調和振動子型ではエネルギーを大きくしても谷の数は増加しないので、この状況を図 13 に示す。

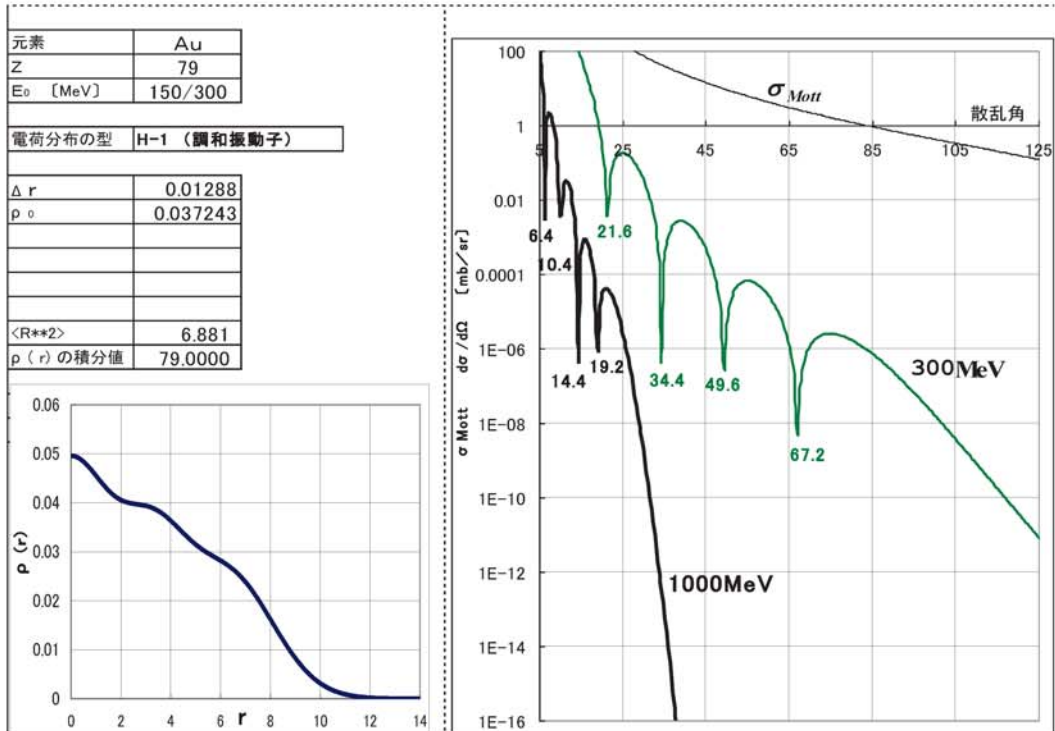


図13 調和振動子型の散乱断面積 (300/1000MeV)

- 500MeV, 1GeV における θ_3 以降の谷の角度は, A-1, A-2 < B-2 < B-1 という傾向にある.
- 表 8 において, 同一型内の同一列 (θ_1 の列, θ_2 の列 . . .) の角度は列ごとに一つの波長に対応した散乱角である. 例えば, A-1 の θ_3 列の 107.6, 47.6, 28, 14° の 4 つの角度はいずれも $\lambda=5.12\text{fm}$ に対応した谷の角度を表している.

4.4 Fermi 分布における表面厚さの違いによる影響

Fermi 分布(A-2)と表面電荷が線形に減少する A-3 について, その電荷分布の傾斜の大きさが谷を与える角度にどのような影響を与えるのか, 入射エネルギーが 300MeV の場合について解析をした結果は以下の通りである.

- Fermi 分布 表面厚さのパラメータ d を 0.3, 0.6, 1.0fm について谷の角度を計算した結果を, 表 9, 図 14 に示す.

表 9 A-2型表面厚さパラメータ d の影響 (300MeV)

d	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
0.3	19.2	33.6	48	63.6	80	99.2
0.6	20	34.8	50	66	84	104.4
1	21.6	38.4	55.6	74	96	122

d の値の増加とともに谷の角度は増加の傾向にあり, その傾向は θ_1 では小さいものの, 後ろになるほど大きくなる.

表 10 一様分布と Fermi 分布違い (300MeV)

d		θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
0.3	A-1	19.2	33.2	47.6	62.8	79.2	98
	A-2	19.2	33.6	48	63.6	80	99.2
	A2-A1	0	0.4	0.4	0.8	0.8	1.2
0.6	A-2	20	34.8	50	66	84	104.4
	A2-A1	0.8	1.6	2.4	3.2	4.8	6.4

一様分布と Fermi 分布を比べると表 10 に示すとおり $d=0.3\text{fm}$ の場合は大きな差はないが, $d=0.6\text{fm}$ になると明らかな差を生じる.

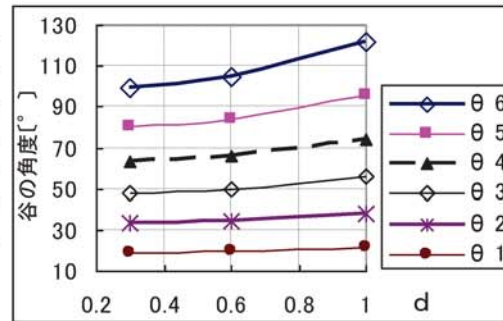


図 14 表面厚さパラメータの影響 (A-2)

表 11 A-3型 表面傾斜の影響 (300MeV)

ΔR	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1.32	19.2	33.6	48	63.2	79.6	98.4
2.64	19.6	34	48.4	64	80	96.4
4.4	20	34.8	48.4	58	69.6	86.4

- 台形分布(A-3)

球表面の電荷分布が線形で減少するパターンについて傾斜部分の半径差 ΔR が, 表面厚さ $t=4.4d$ に対応したものととして 1.35, 2.64, 4.4fm の 3 パターンについて計算した結果を表 11, 図 15 に示す. $\Delta R=4.4\text{fm}$ では, θ_1, θ_2 については角度が若干増加しているが,

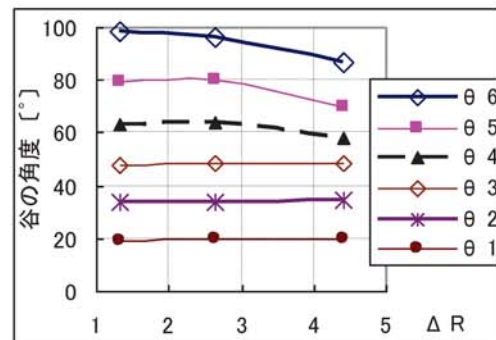


図 15 表面傾斜の影響 (A-3)

θ_4 以降は谷の角度が、 ΔR が小さい場合と比べて減少している。これは、Fermi分布の傾向と異なるところである。

表12 各型の谷を与える角度

	Ca (300MeV)			
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
A-1	36.8	65.2	99.2	
B-1	33.6	70.4	119.6	
C-1	38	60	90	
D-1	37.6	61.6	88	
G-1	39.6	59.2	88.8	
H-1	43.2	73.2		
E-2	42	62	91.6	124
F-2				

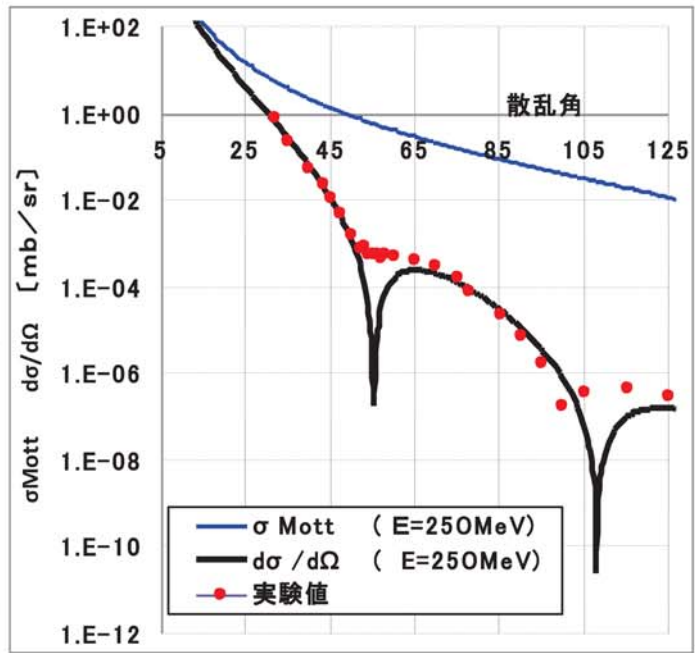


図16 実験値との対比

4.5 原子核 $^{40}_{20}\text{Ca}$ の実験データと理論値の比較

4.5.1 解析データ

カルシウムについての解析結果の概要を表12に示す。核半径が3.64fmで $^{197}_{79}\text{Au}$ と比較して小さいので、谷を与える角度が大きい。また、点電荷に近づくためガウス分布では谷を生じない。

4.5.2 実験値との対比

理論計算の妥当性を検証するため実験値との対比を行った。その結果を、図16に示す。この実験データはStanford大学における250MeVに対する $^{40}_{20}\text{Ca}$ についての実験データ^[5]である。点電荷としての計算値と比べて、形状因子を用いての大きさのある核としての計算では飛躍的に精度が向上している。

4.5.3 谷を与える角度の最小値(θ_1)

基本形の谷を与える角度の最小値(θ_1)を昇順に並べると表13に示すとおり、 θ_1 は

- ・中空球(B-1)
- ・一様分布(A-1)
- ・二重球(D-1, C-1)
- ・二層構造(G-1)
- ・調和振動子(H-1)

表13 基本形、谷の角度の最小値 (θ_1) (300MeV)

基本形	Au	Ca
B-1	17.6	33.6
A-1	19.2	36.8
D-1	20	37.6
C-1	20	38
G-1	20.4	39.6
H-1	21.6	43.2

の順に大きくなる。これは $^{197}_{79}\text{Au}$ と $^{40}_{20}\text{Ca}$ に共通していえることである。

5. 散乱断面積を与える電子波の干渉メカニズムに関する考察

5.1 谷を与える角度と原子核の大きさとの関係

理論計算において、 $^{197}_{79}\text{Au}$ は平均 2 乗半径を 6.88fm に、また $^{40}_{20}\text{Ca}$ では平均 2 乗半径を 3.64fm という条件で角分布を求めたが、電荷分布の形状によって核の物理的な半径にはバラツキがでてくるので、これと谷を与える角度との関連について考察する。

平均 2 乗半径は同じでも、物理的な半径の大小によって散乱角(谷を与える角度)が異なるので、ここで、型 A~D の θ_3 を例に外径と谷の角度との関係を散布図にしたものを図 17 に示す。核の半径によって散乱角が異なることが、図 17 から明らかである。つまり半径が大きいと散乱角は小さく、半径が小さいと散乱角は大きくなるということである。このことは、単スリットによる光の干渉理論から類推することができる。以下にその概要を述べる。

図 18 において光の波動関数を $u(x,t) = Ae^{ik(x-vt)}$ とするとスクリーン上の光の強度は

$$2 \left(\frac{A}{\frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda} \right) \quad (37)$$

で表されるから、谷を与える角度は、 $\sin\theta = \frac{n\lambda}{d}$ ($n=1, 2, \dots$) で与えられる。

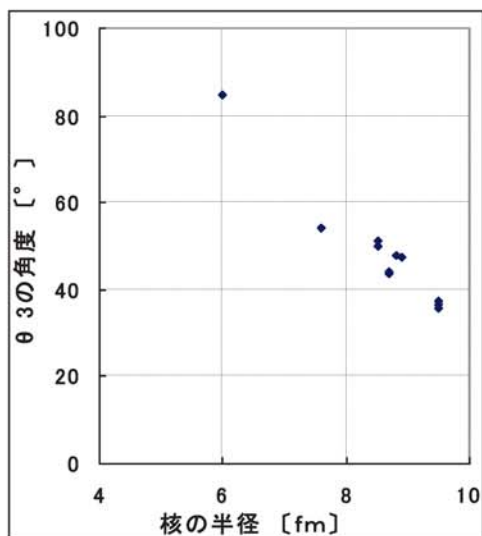


図17 型A~D 核半径と θ_3 との関係

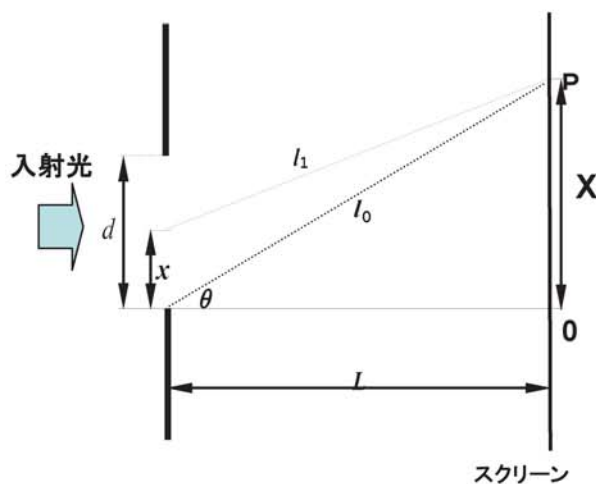


図18 単スリットによる干渉

すなわち、このスリット間隙 d をクーロン散乱を起こす原子核の直径に対応しているとみると、波長 λ が一定の下では d と $\sin\theta$ が反比例するから、直径の大きな核では直径の小さな核より谷を与える角度は小さくなるということである。単スリットによる干渉縞の計算結果を図 19 に示す。

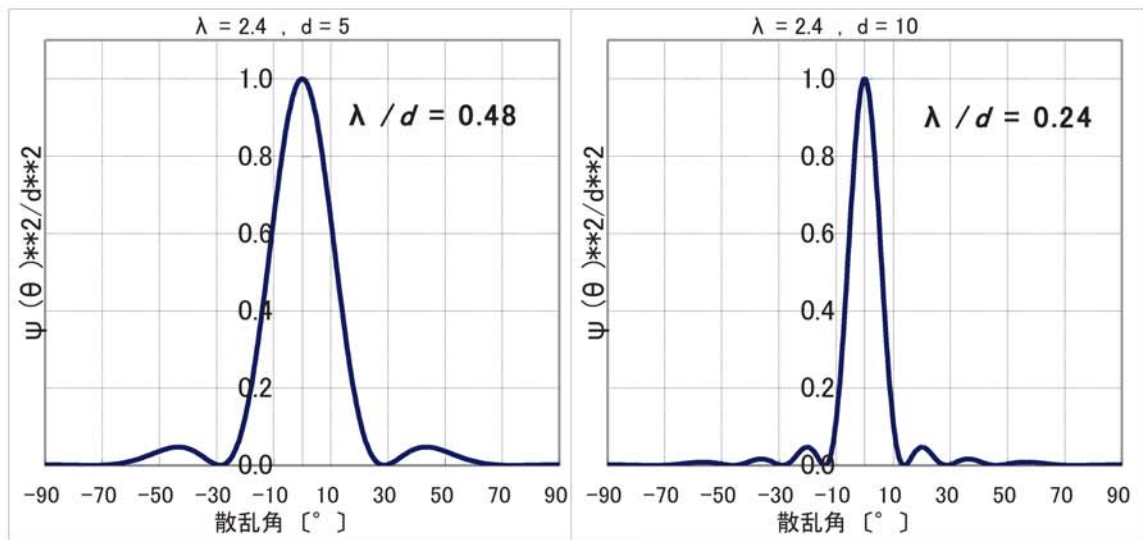


図19 干渉縞の比較

このことは、図 17 で一例として述べた型 A～D の核半径と θ_3 の関係を裏付けるものであると考えることができる。この考えから、計算の結果得られたいくつかの現象を説明することができる。

以下にその概要について述べる。

- 中心部の詰まった球と比べて中空球の方が谷の角度が大きくなる理由

中心の詰まった一様分布(A-1)と中空球(B-1)とでは、平均 2 乗半径は同じ 6.88 fm であっても物理的な半径(外径)は一様分布が 8.9fm で、中空球の方は外径が 7.6fm と小さくなっている。従って、同じ平均 2 乗半径で比較しても外径の小さい B 型の方が谷を与える角度は大きくなるということである。

- C-1, C-2 と C-3, C-4 の関係(D-1, D-2 と D-3, D-4 の関係)について

C-1, C-2 と C-3, C-4 の谷の角度を比較すると表 5 に示したとおり、 θ_1 は C-1, C-2 の方が小さいものの θ_3 以降は C-1, C-2 の角度が C-3, C-4 よりも大きくなっているが、これは前述の B-1 と A 型との関係によく似ている。これは、両者とも平均 2 乗半径は 6.88fm で同じであるが、C-1, C-2 の外径は 8.74fm で、外球の電荷量の比の小さい C-3, C-4 の外径 9.53fm に比べて外径が小さいので、C-3, C-4 よりも C-1, C-2 の方が谷を与える角度が大きくなるというように考えられる。

D-1, D-2 と D-3, D-4 の関係についても、全く同じである。

- 型 A では差がないのに、中空球では一様分布と Fermi 型に差が出る理由

A-1 と A-2 の半径の比は 1.01(A-1 の方が大きい)であるのに対して、B-1 と B-2 の外径の比は 1.12(B-2 が大きい)と違いが大きいため、この外径の比の違いが谷を与える角度の差に大きく影響を与えたものと考えられる。

5.2 入射エネルギーと谷を与える角度、散乱波の波長との関係

4.3 節で述べたように、一つの谷を与える角度(例えば、 θ_1 なら θ_1 、 θ_2 なら θ_2)は、入射エネルギーに係わらず、同じ波長に対応した角度である。表 14 に型 B-2

の、入射エネルギー150~1000MeV についての θ_3 までの谷を与える角度を示すが、
 これの θ_3 を例にとって考察する。

まず、入射電子のエネルギー E_0 , と運動量 P_0 および、散乱波の波数 q , と
 散乱角 θ との関係は、(34)式, (35)式で与えられる。ここで 150MeV の θ_3 の角度
 115.2° から散乱波の波長を求める。

$m_0c^2 = 0.511\text{MeV}$ であるから、(35)式から $p_0 = 0.5 \text{ eVs/m}$ となる。したがっ
 て $\theta_3 = 115.2^\circ$ に対応する波数は、(34)式から $q = 1.2828\text{fm}^{-1}$ であり、波長は
 $\lambda = 4.89 \text{ fm}$ となる。この波長は、型 B-2 における3番目の谷に対応した波長であ
 り、入射エネルギーを変えてもこの波長は変化しない。

例えば、入射エネルギーを 500MeV とした場合の型 B-2 における3番目の谷を与
 える角度は、図 20 の $\lambda = 4.89\text{fm}$ と 500MeV の曲線に対応した散乱角である
 29.2° であり、これは表 8 の値と一致している。

表14 入射エネルギーと散乱角

型	入射エネ ルギー [MeV]	谷を与える角度 [°]		
		θ_1	θ_2	θ_3
B-2	150	37.6	77.6	115.2
	300	18.4	36.4	50
	500	11.2	21.6	29.2
	1000	5.6	10.8	14.4

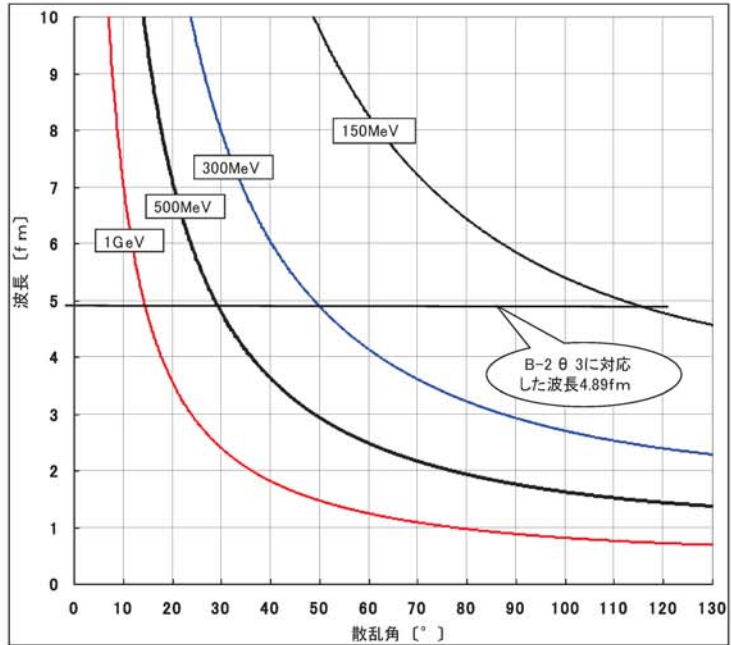


図20 入射エネルギーと散乱波の波長、散乱角の関係

5.3 表面電荷分布の減少パターンの比較

原子核表面の電荷分布の減少パター
 ンによる谷を与える角度の違いを、
 Fermi 分布(A-2)をベースに他の型と
 の差で示したものを次の表 15 と図 21
 に示す。

- ・ 際だって他のものと異なっている
 のがガウス分布(F-2, $\sigma = 3.996$)で
 あり、次いで他のパターン
 と($\theta_1 \sim \theta_3$ で)傾向の異な

表15 電荷分布の減少パターンの比較
 (谷を与える角度の差)

差	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
B2-A2	-0.8	2.8	2	0	4.4
C2-A2	0.8	-3.2	-4	-2.4	0.8
D2-A2	0.8	-2.8	-4	-2	0.4
E2-A2	2.8	-2	-3.2	-8	-10.4
F2-A2	27.6	21.2	15.6	9.6	3.2
G2-A2	1.2	-3.2	-2	0	-3.6
H1-A2	2.4	0.8	1.6	3.6	-

っているものは中空球の Fermi 型(B-2)である。 Fermi(A-2)と中空の Fermi 型(B-2)とは $\theta_1 \sim \theta_3$ を見れば区別できる。

- ・調和振動子型(H-1)は谷の数が4個しかなく、その角度は全て Fermi 分布の対応する角度より大きい。
- ・C-2 と D-2 を区別することは困難である。 G-2(二層構造 Fermi 型)も C-2 によく似た傾向を示しているが、 θ_3 、 θ_4 を比較すれば C-2 と G-2 との区別は可能である。

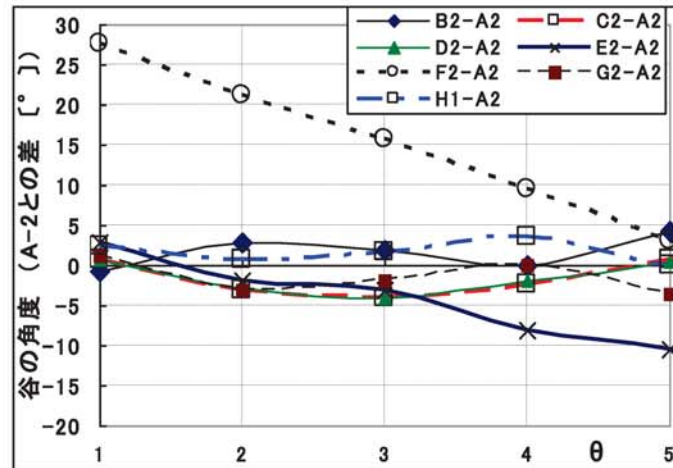


図21 電荷分布の減少パターンによる谷の角度の差

6. まとめ

- ・入射エネルギー300MeVにおける基本形の谷を与える角度の最小値(θ_1)を昇順に並べて比較すると、 $^{197}_{79}\text{Au}$ と $^{40}_{20}\text{Ca}$ に共通して
 - ①中空球、②一様分布、③二重球、④二層構造、⑤調和振動子という順に大きくなるのが分かった。
- ・原子核表面の電荷分布の減少パターンによる谷を与える角度の違いを、Fermi 分布をベースに他の型と比較すると、理論計算の結果は次の3点に要約できる。
 - ア、際だって他のものと異なっているのがガウス分布であり、次いで他のパターンと($\theta_1 \sim \theta_3$ で)傾向の異なっているものは中空球の Fermi 型である。 Fermi 分布と中空の Fermi 型とは $\theta_1 \sim \theta_3$ を見れば区別できる。
 - イ、調和振動子型は谷の数が4個しかなく、その角度は全て Fermi 分布の対応する角度より大きい。
 - ウ、二重球の Fermi 型と中空二重球の Fermi 型を区別することは困難である。二層構造の Fermi 型も二重球の Fermi 型によく似た傾向を示しているが、 θ_3 、 θ_4 を比較すれば二重球の Fermi 型と二層構造の Fermi 型との区別は可能である。
- ・ $^{40}_{20}\text{Ca}$ について実験値との対比を行った。単純な点電荷としての計算した場合は、散乱断面積は実験値の100倍ほど過大な値を示すが、これに対して Fermi 分布を導入して形状因子を第1Born近似で理論計算すると、散乱角 45° で2桁ほど小さくなり実験値を正しく再現することが分かった。
- ・入射エネルギーが大きくなると、谷と谷との間隔が狭まり谷の数が増える。ただし、調和振動子型では谷の数は増えないことが判明した、

参考文献

- [1] H.A.Bethe, “Coulomb Energy of Light Nuclii”, *Physical Review* , 54, 436, (1938)
- [2] 高田健次郎, “量子力学 I” 朝倉書店物理学ライブラリー 7 (1983)
関根松夫, “量子電磁気学” コロナ社 (1996)
- [3] R.R.Roy, B.P.Nigam, “原子核物理学 I” 西川哲治監訳, 紀伊国屋書店現代物理学選書(1972)
- [4] H.Crannell, R.Helm, H.Kendall, J.Oeser, M.Yearian, “Scattering of High-Energy Electrons for Ca^{40} , V^{51} , Co^{59} , In^{115} , $\text{Sb}^{121,123}$ and Bi^{209} ”, *Physical Review* 121, No.1, 283-289 (1961)
- [5] M.Croissiaux, R.Hofstadter, A.E.Walker, M.R.Yearian, D.G.Ravenhall, B.C.Clark, R.Herman, “Electron Scattering by Calcium at 250 MeV”, *Physical Review* 137, No.4B, B865-B873 (1965)